# Rudiments de logique

# I. Assertions et propriétés

Une assertion est une phrase mathématique qui est vraie ou fausse.
Par exemple :

— « $6 \times 7 = 42$ » est une assertion (vraie).

— « Il existe $x \in \mathbb{C}$ tel que $x^2 + x + 1 = 0$ » est une assertion (vraie).

— « Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 + x + 1 = 0$ » est une assertion (fausse).

— « Il existe un nombre parfait impair » est une assertion (dont nul ne sait si elle est vraie ou fausse). Pour la culture : un nombre est parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs positifs propres (c'est-à-dire différents de lui-même). Les premiers nombres parfaits sont $6 = 1 + 2 + 3$ et $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

— Si l'entier $n$ est défini, « l'entier $n$ est pair » est une assertion dont la valeur de vérité dépend de $n$. On dira qu'il s'agit d'une assertion dépendant de $n$.

— « $1 + 3\mathrm{i} < 2 + 5\mathrm{i}$ » n'est pas une assertion.

## Connecteurs logiques

On peut former une assertion en en combinant plusieurs à l'aide de connecteurs logiques.

1 **Définition.**

— L'assertion « non($P$) » est vraie lorsque $P$ est fausse.

— L'assertion « $P$ et $Q$ » est vraie lorsque $P$ et $Q$ le sont.

— L'assertion « $P$ ou $Q$ » est vraie lorsque $P$ est vraie ou $Q$ est vraie (cela inclut le cas où $P$ et $Q$ sont toutes les deux vraies).

— L'assertion « $P \Rightarrow Q$ » (lue « $P$ implique $Q$ ») est vraie lorsque $P$ est fausse ou $Q$ est vraie.

— L'assertion « $P \Leftrightarrow Q$ » (lue « $P$ équivalente à $Q$ ») est vraie lorsque $P$ et $Q$ sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses.

On résume souvent ces définitions par les tables de vérité suivantes :

| $P$ | $Q$ | non($P$) | $P$ et $Q$ | $P$ ou $Q$ | $P \Rightarrow Q$ | $P \Leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| F | F | V | F | F | V | V |
| F | V | V | F | V | V | F |
| V | F | F | F | V | F | F |
| V | V | F | V | V | V | V |

2 **Remarques importantes sur l'implication (à méditer tout au long de l'année !)**

- Quand on a une implication $P \Rightarrow Q$, on dit que $P$ est la **prémisse** (ou l'hypothèse) de l'implication et $Q$ est la *conclusion*.
- On dispose d'un vocabulaire très riche pour dire que $P \Rightarrow Q$ est vraie.
  Voici les différentes manières d'affirmer que l'assertion $P \Rightarrow Q$ est vraie :

  — $P$ implique $Q$

  — Si $P$, alors $Q$

  — $Q$ est vraie si (dès que, lorsque, quand) $P$ est vraie

  — $P$ est une condition suffisante pour $Q$

  — $Q$ est une condition nécessaire pour $P$

  — il suffit que $P$ soit vraie pour que $Q$ le soit

  — il faut que $Q$ soit vraie pour que $P$ le soit

- La définition de l'implication $P \implies Q$ (et notamment le fait que $P \implies Q$ soit vraie dès que $P$ est fausse peut surprendre !

  Essayons d'expliquer que c'est au contraire parfaitement raisonnable. Le code de la route dit que « Tout conducteur doit marquer l'arrêt absolu devant un feu de signalisation rouge, fixe ou clignotant. » ce que l'on peut retraduire par une implication « si le feu est rouge, je m'arrête » ou « le feu est rouge $\implies$ je m'arrête ».

  Respecter ce règlement, c'est rendre cette implication vraie. Or, ce règlement ne donne aucune obligation dans le cas où le feu est vert : le règlement n'exige rien de nous dans ce cas, et on ne peut donc pas l'enfreindre. **L'implication est toujours vraie quand la prémisse est fausse.**

**Attention : « implique » versus « donc »**
Ce que l'implication n'est pas :

- l'implication n'est pas une relation de causalité ;
  par exemple, l'implication :

$$3 = \sqrt{9} \implies \text{le carré d'un nombre réel est un réel positif}$$

  est vraie parce que les assertions de part et d'autre du connecteur $\Rightarrow$ sont vraies, mais il n'y a aucun lien de causalité ou de déduction entre les deux ;

  autre exemple, l'implication :

$$3 = \sqrt{8} \implies \textit{truc}$$

  est vraie parce que sa prémisse est fausse, mais il n'y a aucun lien de causalité ou de déduction entre les deux ; il ne nous viendrait pas à l'idée d'écrire « $3 = \sqrt{8}$ donc *truc* », ce qui serait faux (que *truc* soit vrai ou faux d'ailleurs !).
- l'implication n'est pas un raccourci pour la conjonction « donc » ; en effet :

  — lorsque l'on écrit « $P$ donc $Q$ », on veut dire « je sais que $P$ est vraie, j'en déduis que $Q$ est vraie ».

  — lorsque l'on écrit « $P \Rightarrow Q$ », on veut dire « je ne sais pas si $P$ est vraie ou fausse, mais je sais que, si $P$ est vraie, alors $Q$ est vraie aussi ».

  Comparons les deux phrases suivantes :

  « Si Socrate est un chat, il est mortel »  « Socrate est un chat, donc il est mortel »

  Les deux n'ont pas du tout le même sens : contrairement à la première, la seconde affirme que Socrate est un chat (et en déduit qu'il est mortel). La première, elle, ne prend pas partie quant à la félinité de Socrate : il peut être un chat (auquel cas il sera mortel) ou tout autre chose (auquel cas on ne dit rien sur son sort).

  On n'utilisera donc jamais le symbole $\implies$ comme abréviation de « donc »

  Ce que l'implication permet de faire : des déductions !

Pour la culture, voici le lien entre l'implication et la déduction naturelle :

*Lemme (modus ponens). Soit $P$ et $Q$ deux assertions. Si $P$ est vraie et si l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors $Q$ est vraie. En symboles, on a :*

$$\big(P \text{ et } (P \Rightarrow Q)\big) \implies Q.$$

Une telle assertion, vraie indépendamment des valeurs de vérité de $P$ et $Q$, est appelée une *tautologie* (le sens est proche de *lapalissade*).

## Quantificateurs

On dispose de deux quantificateurs :

— le *quantificateur universel* $\forall$ (« pour tout », « quel que soit ») ;
l'assertion « $\forall\, x \in X,\ P(x)$ » affirme que l'assertion $P(x)$ est vraie quelle que soit la valeur de $x$ dans $X$ ;

— le *quantificateur existentiel* $\exists$ (« il existe ») ;
l'assertion « $\exists\, x \in X,\ P(x)$ » affirme que l'on peut trouver un élément $x_0$ dans $X$ tel que $P(x_0)$ soit vraie.

3 **Mini exo.** Écrire en langage formel les assertions (vraies) suivantes :

- Le carré d'un nombre réel est un réel positif.
- Un réel positif est supérieur à $-1$.
- Deux nombres réels positifs de somme nulle sont nécessairement nuls.
- La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Deux nombres réels positifs de somme nulle sont nécessairement nuls.
- Il n'existe pas de réel plus grand que tous les autres.

4 **Zérologie !**
Si $X$ est *l'ensemble vide*, alors

— l'assertion « $\forall\, x \in X,\ P(x)$ » est toujours vraie :

$$\Big(\forall\, x \in \emptyset,\ P(x)\Big) \text{ est vraie}$$

— l'assertion « $\exists\, x \in X,\ P(x)$ » est toujours fausse :

$$\Big(\exists\, x \in \emptyset,\ P(x)\Big) \text{ est fausse}$$

5 **Attention !**
Il est capital de prêter attention à l'*ordre des quantificateurs* dans une assertion.
Par exemple, l'assertion (vraie)

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R},\ y > x$$

affirme que, quel que soit le réel $x$ que l'on considère, on peut en trouver un autre, $y$, qui soit strictement plus grand (par exemple $x+1$). Mais ce $y$ dépend de $x$.
L'assertion avec les quantificateurs inversés

$$\exists\, y \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ y > x$$

est fausse, parce qu'elle demande un $y$ qui ne dépende pas de $x$.

Cela se retrouve évidemment hors des maths.
Comparer : « Un candidat a eu 20 a toutes les épreuves. » et « Lors de chaque épreuve, un candidat a eu 20. »

## Négation des connecteurs logiques

Une activité mathématique importante est de déterminer si une assertion $P$ est vraie ou fausse. On verra plus loin dans le chapitre tout un arsenal de méthodes pour démontrer $P$, c'est-à-dire certifier qu'elle est vraie. Pour infirmer $P$, c'est-à-dire certifier qu'elle est fausse, il s'agira de démontrer $\mathrm{non}(P)$. Il est donc important de savoir déterminer $\mathrm{non}(P)$ rapidement.

6 preuve **Proposition (Négation d'une négation).** Soit $P$ une assertion.
Les assertions $\mathrm{non}(\mathrm{non}(P))$ et $P$ sont équivalentes.

7 preuve **Proposition (Lois de De Morgan).** Soit $P$ et $Q$ deux assertions.

— Les assertions « $\mathrm{non}(P \text{ ou } Q)$ » et « $\mathrm{non}(P) \text{ et } \mathrm{non}(Q)$ » sont équivalentes.

— Les assertions « $\mathrm{non}(P \text{ et } Q)$ » et « $\mathrm{non}(P) \text{ ou } \mathrm{non}(Q)$ » sont équivalentes.

8 preuve **Proposition (Négation d'une implication).** Soit $P$ et $Q$ deux assertions.
L'assertion « $\mathrm{non}(P \implies Q)$ » est équivalente à « $P \text{ et } \mathrm{non}(Q)$ ».

Cette proposition est extrêmement importante, et mérite un slogan :

*Dire qu'une implication est fausse, c'est dire que la prémisse est vraie,*
*et, pourtant, la conclusion est fausse.*

Pour reprendre l'exemple du code de la route, pour griller un feu, c'est-à-dire rendre fausse l'implication « Si le feu est rouge, je m'arrête », il faut que le feu soit rouge et que, pourtant, on ne s'arrête pas.

9 **Proposition (Double distributivité et/ou).** Soit $P$, $Q$, $R$ trois assertions.

— Les assertions « $P \text{ et } (Q \text{ ou } R)$ » et « $(P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$ » sont équivalentes.

— Les assertions « $P \text{ ou } (Q \text{ et } R)$ » et « $(P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)$ » sont équivalentes.

## Négation des assertions avec quantificateurs

10 **Axiome.** Soit $X$ un ensemble. On se donne une assertion $P(x)$ dépendant d'un élément $x \in X$.

— Les assertions « $\mathrm{non}\left(\forall x \in X,\ P(x)\right)$ » et « $\exists x \in X,\ \mathrm{non}\left(P(x)\right)$ » sont équivalentes.

— Les assertions « $\mathrm{non}\left(\exists x \in X,\ P(x)\right)$ » et « $\forall x \in X,\ \mathrm{non}\left(P(x)\right)$ » sont équivalentes.

Une manière de paraphraser la première partie de ce résultat est de dire que pour démontrer qu'un résultat comme « $\forall x \in X,\ P(x)$ » est faux, on peut exhiber un contre-exemple, c'est-à-dire un élément $x_0 \in X$ tel que $P(x_0)$ soit faux.

11 **Mini exo.** Écrire en langage formel qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas croissante.

# II. Canevas de preuve

Les deux prochaines sections ont pour but de poser les bases de la rédaction de preuves. Dans cette section, on découvre les « canevas de preuves standard », c'est-à-dire les approches les plus basiques pour démontrer une assertion quantifiée. On enrichira notre boîte à outils dans la section suivante.

12 **Mini exo.**
A l'aide de la boîte à outils, montrer que les assertions suivantes sont vraies.

- $\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4,\ (ac-bd)^2+(ad+bc)^2=\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)$
- $\exists x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0$
- $\exists x \in \mathbb{R},\ x^3+x+1=0$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ n \text{ pair} \implies n^2 \text{ pair}$
- $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x=y \iff \big(\forall t \in \mathbb{R}, xt=yt\big)$
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists y \in \mathbb{R},\ 0<y<x$

## Preuve de l'implication « $P \Rightarrow Q$ »

Pour montrer une implication de la forme $P \Rightarrow Q$, on suppose la prémisse $P$, et on démontre la conclusion $Q$.

Montrons $P \Rightarrow Q$.
    Supposons $P$.
    Montrons $Q$.
        [*Arguments et/ou calculs exploitant probablement l'hypothèse* $P$]
    Donc $Q$.
On a donc montré $P \Rightarrow Q$.

## Preuve d'une équivalence « $P \Leftrightarrow Q$ »

L'assertion « $P \Leftrightarrow Q$ » est équivalente à « $\big(P \Rightarrow Q\big)$ et $\big(Q \Rightarrow P\big)$ » (dresser une table de vérité pour s'en convaincre).
Ainsi, pour démontrer $P \Leftrightarrow Q$, on démontre successivement $P \Rightarrow Q$ puis $Q \Rightarrow P$.
On dit que l'on procède par double implication.

Montrons $P \Leftrightarrow Q$. On procède par double implication.

**Sens direct** $\boxed{\Rightarrow}$
    Supposons $P$.
    Montrons $Q$.
    [*Arguments et/ou calculs exploitant probablement l'hypothèse* $P$]
    Donc $Q$.
On a donc montré $P \Rightarrow Q$.

**Sens réciproque** $\boxed{\Leftarrow}$
    Supposons $Q$.
    Montrons $P$.
    [*Arguments et/ou calculs exploitant probablement l'hypothèse* $Q$]
    Donc $P$
On a donc montré $Q \Rightarrow P$.
On a donc montré $P \Leftrightarrow Q$.

## Preuve de « $P$ ou $Q$ »

L'assertion « $P$ ou $Q$ » est équivalente à « non$(P) \Rightarrow Q$ ».

> Montrons $\big(P$ ou $Q\big)$. On va en fait montrer non$(P) \Rightarrow Q$.
>     Supposons non$(P)$.
>     Montrons $Q$.
>         [*Arguments et/ou calculs exploitant probablement non*$(P)$]
>     Donc $Q$.
> On a donc montré $\big(P$ ou $Q\big)$.

## Preuve d'une $\forall$-assertion

Pour démontrer une assertion du type $\forall\, x \in X, P(x)$, on « prend » un élément $x \in X$ (sur lequel on ne fait aucune autre supposition que son appartenance à $X$), et on démontre $P(x)$.

> Montrons $\forall x \in X, P(x)$.
>     Soit $x \in X$.
>     Montrons $P(x)$.
>         [*Arguments et/ou calculs*]
>     Donc $P(x)$.
> On a donc montré $\forall x \in X, P(x)$.

- Il est important de souligner qu'au cours de la preuve, $x$ est un objet mathématique tout à fait bien défini, au même titre que l'entier 2 ou la fonction sin. D'un point de vue psychologique, il est certainement plus mystérieux, mais cela ne changera pas son traitement logique.
- Notons que cette utilisation de « soit » n'est pas la seule en mathématiques. On utilisera ce mot pour, comme ici, « invoquer » un élément de $X$ dans la preuve d'une assertion $\forall\, x \in X, P(x)$, mais on peut aussi l'utiliser pour donner un nouveau nom à un objet dont on souhaite reparler.
  Par exemple, « soit $n$ l'entier dont l'écriture décimale comporte un milliard de ' 1 ' consécutifs » ; « soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto \sin x$ », et les énoncés d'exercices l'utiliseront abondamment :
      *Soit* $x \in \mathbb{R}^+$. *Montrer l'inégalité* $(1+x)^3 \geqslant 1+3x$.
  Cette polysémie n'est pas vraiment gênante, mais il faut avoir à l'esprit que « soit » n'annonce pas à lui tout seul la preuve d'une $\forall$-assertion.
- Pour ne pas surcharger ce mot, on essayera d'éviter d'utiliser la locution très courante en français « soit ... soit ... » qui signifie « de deux choses l'une : ou bien ... ou bien ... ».

## Preuve d'une $\exists$-assertion

Pour démontrer une assertion du type $\exists\, x \in X, P(x)$, on on définit explicitement un élément judicieux $x$, et on démontre successivement qu'il est vrai que $x$ appartient à $X$, puis que $P(x)$ est vrai.

> Montrons $\exists\, x \in X, P(x)$.
> **Candidat :** $x =$ *[choix intelligent d'un élément de X]*
> — Montrons que $x \in X$.
>         *[Arguments et/ou calculs]*
>     Donc $x \in X$.
> — Montrons que $P(x)$.
>         *[Arguments et/ou calculs]*
>     Donc $P(x)$.
> On a donc montré $\exists\, x \in X, P(x)$.

Au lieu de « **Candidat :** $x = \dots$ », on peut également trouver « Posons $x = \dots$ » ou « Soit $x = \dots$ »).

### Utilisation d'une $\forall$-assertion

*Début de preuve*

$\vdots$

*On croise un élément $y$ qui est dans $X$*

On a $y \in X$.
Or on sait que « $\forall x \in X, P(x)$ » est vrai.
Donc $P(y)$ est vrai.

### Utilisation d'une $\exists$-assertion

On sait que « $\exists x \in X, P(x)$ » est vrai.
Considérons donc $x_0 \in X$ tel que $P(x_0)$ est vrai.

On sait que « $\exists x \in X, P(x)$ » est vrai.
Donc il existe $x_0 \in X$ tel que $P(x_0)$ est vrai.

## III. Différents modes de raisonnement

13 La section qui vient va nous permettre de prouver des assertions du type :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$ On utilisera uniquement les règles usuelles sur les inégalités (somme, produit).
- $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 = 0 \implies x = y = 0$
- $\forall a \in \mathbb{R},\ \Big(\forall \varepsilon > 0,\ a \leqslant \varepsilon\Big) \implies a \leqslant 0$

### Contraposée

14 **Définition.**

— La contraposée d'une implication de la forme $P \Rightarrow Q$ est l'implication

$$\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$$

— La contraposée d'une implication du type « $\forall x \in X,\ P(x) \Rightarrow Q(x)$ » est

$$\forall x \in X,\ \text{non}(Q(x)) \Rightarrow \text{non}(P(x))$$

15 preuve **Proposition.** Une implication et sa contraposée sont logiquement équivalentes.

- Considérons l'implication $P \Rightarrow Q$. On prendra garde à ne pas mélanger la contraposée (qui est $\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$ et qui lui est équivalente), et la réciproque (qui est $Q \Rightarrow P$ et qui ne lui est PAS équivalente).
- Même si, d'un point de vue logique, une implication et sa contraposée sont équivalentes, elles peuvent paraître psychologiquement assez différentes. Comparer par exemple « tous les corbeaux sont noirs » et « tout ce qui n'est pas noir n'est pas un corbeau ».
- Face à une implication retorse à démontrer, il faut absolument passer quelque temps à se demander s'il ne serait pas plus facile de démontrer sa contraposée.

16 **Question.** Montrer $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 \text{ pair} \implies n \text{ pair}.$

## Raisonnement par l'absurde

**Principe.** Si non$(P)$ implique une assertion fausse, alors $P$ est vraie.

- La démonstration par l'absurde est très utile quand l'assertion non$(P)$ est facilement exploitable. En revanche, elle possède un inconvénient psychologique : elle force à raisonner sur des objets qui n'existent pas…
- La démonstration par l'absurde est proche de la démonstration par contraposée (puisqu'on suppose la négation de l'assertion à laquelle on souhaite aboutir). Faites quand même attention à ne pas confondre ces deux modes de raisonnement, car certains correcteurs sont chatouilleux là-dessus.

17 **Question.** Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

## Raisonnement par chaîne d'équivalences

Pour démontrer une équivalence $P \iff Q$, la méthode de la double implication est, dans l'immense majorité des cas, la méthode à suivre. Cependant, dans certains cas très simples, on peut rédiger par chaîne d'équivalences (on dit encore par équivalences successives).

18 **Question.** Montrer

$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}, \quad c^2 - (a+b)c + ab = 0 \iff \big(c = a \ \text{ ou } \ c = b\big)$$

## Raisonnement par analyse-synthèse

Un grand nombre de raisonnements visent à déterminer tous les objets vérifiant une certaine propriété. Pour cela, le mode de raisonnement le plus efficace est souvent le raisonnement par *analyse et synthèse*. Il s'agit d'un mode de raisonnement en deux temps.

- Dans un premier temps, on considère un objet vérifiant la propriété voulue, et on déduit ses propriétés, de façon à réduire l'ensemble des candidats possibles. C'est la phase d'analyse.
- Dans un second temps, on vérifie que les candidats satisfont bien la propriété, ou on les rejette si ce n'est pas le cas. C'est la phase de synthèse.

Les mots « analyse » et « synthèse » sont un peu durs à comprendre dans ce contexte. Il serait peut-être plus parlant de parler d'une phase de « profiling » (où on se ramène à une poignée de suspects) et d'une phase de « vérification » où l'on vérifie si les suspects sont coupables ou non.
Nous allons donner trois types (assez généraux) de situations où ce raisonnement est souvent applicable.

### Résolution d'équations

19 **Question.** Résoudre l'équation $|x+1| = 2x+3$ sur $\mathbb{R}$.

Il s'agit de trouver une partie $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}$ telle que l'on puisse démontrer l'équivalence $\quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ |x+1| = 2x+3 \iff x \in \mathcal{S}$

**Analyse.** Soit $x \in \mathbb{R}$ une solution de l'équation, c'est-à-dire un réel tel que $|x+1| = 2x+3$.
En élevant au carré, on obtient $|x+1|^2 = (2x+3)^2$.
En développant, on tombe sur l'équation du second degré suivante :

$$3x^2 + 10x + 8 = 0$$

C'est une équation du second degré dont le discriminant vaut 4, donc il y a deux solutions, à savoir $-2$ et $-\frac{4}{3}$.

**Synthèse.** Vérifions si les deux suspects sont solutions.

- On a $|-2+1| = 1 \ \neq\ -1 = 2 \times (-2) + 3$. Donc $-2$ n'est pas solution de l'équation.

- On a $|-\frac{4}{3}+1| = \frac{1}{3} \;=\; 2\times\left(-\frac{4}{3}\right)+3$. Donc $-\frac{4}{3}$ est solution de l'équation.

**Bilan.** L'ensemble des solutions de l'équation est donc l'ensemble $\left\{-\frac{4}{3}\right\}$. Pour la culture : $\{a\}$ est un *singleton*.

- Plus généralement, le raisonnement par analyse et synthèse est particulièrement adapté dans les cas d'énoncé du type « Déterminer tous les objets x tels que... ». Une résolution d'équation est un cas particulier de tel énoncé (l'équation que l'on vient de résoudre aurait pu être formulée sous la forme « Déterminer tous les réels $x$ tels que $|x+1| = 2x+3$ »).
- Insistons sur un point logique : résoudre une équation, c'est démontrer une équivalence, avec la difficulté supplémentaire que l'un des membres de l'équivalence n'est pas donné mais est à déterminer. Par exemple, ici, on a démontré l'équivalence

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \Big(|x+1| = 2x+3 \iff x \in \left\{-\tfrac{4}{3}\right\}\Big)$$

### Montrer l'existence et l'unicité d'un objet

20 **Question.** Soit $s, d \in \mathbb{R}$ fixé.

sol → xix

Montrer qu'il **existe** un **unique** couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant le système $\begin{cases} x+y=s \\ x-y=d \end{cases}$

- On trouve parfois le symbole $\exists!\, x \in X,\ P(x)$ pour dire qu'il existe un unique $x$ tel que $P(x)$. Ici, par exemple, on pourrait réécrire le résultat démontré sous la forme de l'assertion quantifiée :

$$\forall\, s, d \in \mathbb{R},\ \exists!\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \big(x+y=s \text{ et } x-y=d\big)$$

- Pour traiter une question du type « montrer qu'il existe un unique », on peut penser à un raisonnement par analyse-synthèse.
  L'analyse montre qu'il existe au plus une solution, et prouve donc l'unicité sous réserve d'existence (elle identifie la solution potentielle).
  La synthèse montre ensuite que cette candidate est bien solution, et prouve donc l'existence.

## Preuve d'un résultat d'existence

21 **Question.** Soit $s, d \in \mathbb{R}$ fixé.

Montrer qu'il **existe** un couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant le système $\begin{cases} x+y=s \\ x-y=d \end{cases}$

- En rédigeant sur sa copie uniquement la synthèse (et en gardant au brouillon l'analyse), on répond parfaitement à la question qui nous demande de prouver seulement *l'existence* d'objets (et qui ici ne demande pas de prouver l'unicité).
- La rédaction finale présente un aspect intéressant : à peu près tout ce qui est conceptuellement significatif est caché (dans le raisonnement au brouillon). Ce qui est présenté (et qui constitue une preuve correcte) n'est finalement qu'une suite de vérifications sans difficulté. De telles démonstrations peuvent se trouver (pour montrer des théorèmes, ou dans des corrigés d'exercices) ; il est souvent intéressant d'essayer de comprendre comment on a pu avoir telle ou telle idée.

## Preuve d'un résultat d'unicité

Si l'on veut montrer qu'il existe **au plus** un élément $x \in X$ vérifiant une propriété $P(x)$, on « invoque » deux éléments $x_1, x_2 \in X$ tels que $P(x_1)$ et $P(x_2)$ soient vraies, et on montre $x_1 = x_2$.

22 **Question.** Soit $x \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe au plus un inverse pour $x$, c'est-à-dire un élément $y \in \mathbb{C}$ tel que $xy = 1$.

- On vient donc de démontrer un résultat d'unicité, sans existence. À ce stade, la seule chose qu'on puisse dire sur un élément $x \in \mathbb{C}$ est qu'il peut ou bien avoir exactement un inverse ou bien n'en avoir aucun. (Comme on le sait, en fait, $x$ a un inverse si et seulement s'il est non nul, mais la preuve ne montre pas cela.)
  En particulier, **s'il existe**, on peut maintenant utiliser l'article défini et parler de l'inverse de $x$.
  On peut résumer le résultat que l'on vient de montrer en disant que :
  « l'inverse d'un nombre complexe, **s'il existe**, est unique »
  « l'inverse d'un nombre complexe est, sous réserve d'existence, unique »

- Il est intéressant d'analyser ce que dit la preuve dans le cas où $x$ n'a pas d'inverse (c'est-à-dire ici dans le cas où $x = 0$). La preuve commence par invoquer deux objets $y_1$ et $y_2$ qui n'existent pas, puis montrer qu'ils sont égaux. Rien n'est logiquement critiquable, mais le contenu de la preuve est alors essentiellement vide.

### Raisonnement par disjonction de cas

23 **Question.** Montrer $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 + \cos x > 0$

## IV. Le raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence est un ensemble de méthodes pour démontrer des assertions de la forme « $\forall\, n \geqslant n_0,\ \mathcal{H}_n$ », où $\mathcal{H}_n$ est une assertion dépendant d'un entier $n$ et $n_0$ est un entier fixé. En pratique, on rencontrera surtout les cas $n_0 = 0$ et $n_0 = 1$, et on écrira aussi $\forall\, n \in \mathbb{N}$, et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

### La récurrence simple

**Principe.** Pour démontrer l'assertion « $\forall\, n \geqslant n_0,\ \mathcal{H}_n$ », il suffit de démontrer :

— l'assertion $\mathcal{H}_{n_0}$

— l'implication : $\forall\, n \geqslant n_0,\ \mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$.

Pour tout $n \geqslant n_0$, on note $\mathcal{H}_n$ l'assertion :

$\mathcal{H}_n$ : « [*assertion dépendant de n*] »

Procédons par récurrence.

**Initialisation.** Montrons $\mathcal{H}_{n_0}$.

[*Arguments et/ou calculs*]

Donc $\mathcal{H}_{n_0}$.

**Hérédité.** Soit $n \geqslant n_0$.

Supposons $\mathcal{H}_n$.

Montrons $\mathcal{H}_{n+1}$.

[*Arguments et/ou calculs utilisant probablement* $\mathcal{H}_n$]

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$.

**Bilan.** D'après le principe de récurrence, on a montré que

$$\forall\, n \geqslant n_0,\ \mathcal{H}_n$$

- Il est capital de définir clairement l'assertion $\mathcal{H}_n$. Elle doit absolument dépendre de l'entier $n$. En particulier, elle ne peut pas commencer par $\forall\, n$.
- Il est très important de distinguer d'une part l'hypothèse de récurrence « $\mathcal{H}_n$ » et d'autre part l'assertion que l'on démontre qui est la $\forall$-assertion : « $\forall\, n \geqslant n_0,\ \mathcal{H}_n$ ».
- Si dans la phase d'hérédité, on n'utilise pas l'hypothèse de récurrence, c'est que la récurrence est inutile : il vaut mieux faire une preuve directe en fixant l'entier $n$ supérieur à $n_0$ en début de preuve.

24 **Question.** Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

## La récurrence multiple

Parfois, on a besoin, dans la phase d'hérédité, d'utiliser l'hypothèse de récurrence à plusieurs échelons. On peut dans ce cas faire une récurrence multiple : on dit que c'est une récurrence double si on utilise 2 échelons, une récurrence triple si on utilise 3 échelons, etc.

**Principe.** Pour démontrer l'assertion « $\forall\, n \geqslant n_0,\ \mathcal{H}_n$ », il suffit de démontrer :

— les deux assertions : $\mathcal{H}_{n_0}$ et $\mathcal{H}_{n_0+1}$

— l'implication : $\forall\, n \geqslant n_0,\ \Big(\mathcal{H}_n \text{ et } \mathcal{H}_{n+1}\Big) \implies \mathcal{H}_{n+2}$.

25 **Question.** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 3 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$.

Montrer que $\quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + 1$.

- La récurrence double est particulièrement adaptée à l'étude de ce genre de suites, elles-mêmes définies par une récurrence double.
- On pourrait remplacer la récurrence double sur l'assertion $\mathcal{H}_n$ par une récurrence simple sur l'assertion $\mathcal{P}_n$ : « $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ ». En ce sens, la récurrence double est en fait un cas particulier de la récurrence simple (même si, en partique, on n'y pense guère ainsi).
- On peut, de la même façon, effectuer des démonstrations par récurrence triple, quadruple, etc. Cela n'arrive guère en pratique.

## La récurrence forte

**Principe.** Pour démontrer l'assertion « $\forall\, n \geqslant n_0,\ \mathcal{H}_n$ », il suffit de démontrer :

— l'assertion $\mathcal{H}_{n_0}$

— l'implication : $\forall\, n \geqslant n_0,\ \Big(\mathcal{H}_{n_0}, \mathcal{H}_{n_0+1}, \dots, \mathcal{H}_n\Big) \implies \mathcal{H}_{n+1}$.

Ce qui s'écrit encore $\forall\, n \geqslant n_0,\ \Big(\forall\, k \in [\![n_0, n]\!],\ \mathcal{H}_k\Big) \implies \mathcal{H}_{n+1}$.

26 **Exemple.** Montrons par récurrence forte que tout entier $n \geqslant 2$ est un produit de nombres premiers (ce qui inclut le cas des nombres premiers eux-mêmes, vus comme des produits à un seul terme).

Pour tout $n \geqslant 2$, notons $\mathcal{H}_n$ la propriété « $n$ est un produit de nombres premiers ».
Procédons par récurrence forte.

**Initialisation.** 2 est un nombre premier, donc un produit de nombres premiers.
Donc $\mathcal{H}_2$ est vraie.

**Hérédité.** Soit $n \geqslant 2$.
On suppose $\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3, \dots, \mathcal{H}_n$.
Montrons $\mathcal{H}_{n+1}$.
Distinguons deux cas.

— Si $n+1$ est premier, il est en particulier un produit de nombres premiers.

— Si $n+1$ n'est pas premier, on peut trouver deux entiers $a$ et $b$, appartenant à $[\![2, n]\!]$, tels que $n + 1 = ab$.
D'après l'hypothèse de récurrence, $\mathcal{H}_a$ et $\mathcal{H}_b$ sont vraies.
Donc $a$ et $b$ sont produits de nombres premiers.
On peut donc trouver des nombres premiers $p_1, \dots, p_r$ et $q_1, \dots, q_s$ (pas nécessairement distincts) tels que

$$a = p_1 \cdots p_r \qquad \text{et} \qquad b = q_1 \cdots q_s$$

En effectuant le produit, on a alors $ab = p_1 \cdots p_r q_1 \cdots q_s$, ce qui démontre que $n+1$ est un produit de nombres premiers.

Dans les deux cas, $n+1$ est un produit de nombres premiers, ce qui démontre $\mathcal{H}_{n+1}$.

**Bilan.** D'après le principe de récurrence forte, on a montré que

$$\text{tout entier } n \geqslant 2 \text{ est un produit de nombres premiers}$$

- La récurrence forte peut paraître beaucoup plus puissante que la récurrence simple puisqu'elle nous donne plus de munitions pour démontrer $\mathcal{H}_{n+1}$ dans la phase d'hérédité.
- On pourrait remplacer la récurrence forte sur l'assertion $\mathcal{H}_n$ par une récurrence simple sur l'assertion

$$\mathcal{P}_n : \qquad « \mathcal{H}_{n_0} \text{ et } \mathcal{H}_{n_0+1} \text{ et } \dots \text{ et } \mathcal{H}_n »$$

En ce sens, la récurrence forte est en fait un cas particulier de la récurrence simple (même si, en pratique, on n'y pense guère ainsi).

# V. Rudiment de théorie des ensembles

## Ensemble et appartenance

Un ensemble est une collection d'objets mathématiques.
Étant donné un objet $x$ (un nombre, une fonction, une suite, voire un autre ensemble) et un ensemble $E$, il peut arriver que $x$ appartienne à $E$ (on dit aussi que $x$ est un élément de $E$ et on note $x \in E$) ou pas (et on note $x \notin E$).

Par exemple :

- $\{3, 4, 7\}$ est un ensemble ; $\mathbb{N}$ est un ensemble ; l'intervalle $[-1, \pi]$ est un ensemble. On dira qu'il s'agit d'ensemble *de nombres*, pour signaler que leurs éléments sont des nombres.
- $\{\sin, \cos, \exp\}$ est un ensemble (de fonctions).
- $\Big\{[0,1], \mathbb{R}^+, \mathbb{R}\Big\}$ est un ensemble (d'ensembles). Attention, cet exemple est difficile pour un élève de "sup".

## Modes de définition d'un ensemble

- On peut définir un ensemble *in extenso*, c'est-à-dire en en listant tous ses éléments : on peut ainsi parler de l'ensemble

$$\{1, 2, 3, \dots, 10\}$$

Pour des ensembles plus gros, on peut imaginer « lister » les élements, comme pour parler de l'ensemble des entiers pairs

$$2\mathbb{Z} \;=\; \{\dots, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$$

ou de celui des nombres premiers

$$\Big\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots\Big\}$$

mais cette méthode atteint vite ses limites.

- On peut définir un ensemble *en compréhension*, c'est-à-dire en « filtrant » parmi les éléments d'un ensemble donné, c'est-à-dire en ne sélectionnant que les éléments vérifiants une certaine propriété.
Si $X$ est un ensemble et si $P(x)$ est une propriété dépendant d'un élément $x \in X$,

$$E \;=\; \{x \in X \mid P(x)\}$$

est l'ensemble des éléments de $x \in X$ tel que $P(x)$.
Par exemple,

— l'ensemble des entiers relatifs pairs, noté $2\mathbb{Z}$, est :

$$2\mathbb{Z} \;=\; \Big\{n \in \mathbb{Z} \mid 2 \text{ divise } n\Big\}$$

— l'ensemble des nombres réels de l'intervalle $[-1,1]$ :

$$[-1,1] \;=\; \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$$

- On peut définir un ensemble *par paramétrage*, c'est-à-dire comme l'ensemble des valeurs d'une fonction. Précisément, si $f : X \to Y$ est une fonction, alors on peut considérer l'ensemble

$$E \;=\; \Big\{f(x),\, x \in X\Big\} \;=\; \Big\{f(x)\Big\}_{x\in X}$$

qui est l'ensemble des éléments de $Y$ qui s'écrivent sous la forme $f(x)$ avec $x \in X$.
Par exemple :

— l'ensemble des entiers relatifs pairs est :

$$2\mathbb{Z} \;=\; \{2p,\; p \in \mathbb{Z}\} \;=\; \{2p\}_{p\in\mathbb{Z}}$$

— l'ensemble des réels compris entre $-1$ et $1$ peut être paramétré par les fonctions trigonométriques :

$$[-1,1] \;=\; \Big\{\sin t,\; t \in \mathbb{R}\Big\} \;=\; \Big\{\sin t,\; t \in [0,2\pi[\Big\} \;=\; \Big\{x \in \mathbb{R} \mid \exists\, t \in [0,2\pi[,\; x = \sin t\Big\}$$

— l'ensemble des réels positifs peut être paramétré avec la fonction carré :

$$\mathbb{R}^+ \;=\; \Big\{x \in \mathbb{R} \mid \exists\, t \in \mathbb{R},\; x = t^2\Big\}$$

## Inclusion et égalité de deux ensembles

27 **Définition (inclusion).** Soit $A$ et $B$ deux ensembles.
On dit que $A$ est inclus dans $B$ (ou que $A$ est une partie de $B$, ou encore que $A$ est un sous-ensemble de $B$) lorsque tous les éléments de $A$ appartiennent également à $B$, c'est-à-dire lorsque

$$\forall\, x \in A,\; x \in B$$

On note cela $A \subset B$, ou encore $A \subseteq B$.

- Si $A$ et $B$ sont deux ensembles tels que $A \subset B$ et $B \subset A$, ils ont exactement les mêmes éléments et sont donc égaux. Pour montrer que deux ensembles sont égaux, on utilise souvent ce principe (et on dit alors qu'on procède par double inclusion).

Montrons $A = B$.
Procédons par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Montrons l'inclusion $A \subset B$.
Soit $x \in A$
*[Arguments et/ou calculs utilisant probablement que $x \in A$]*
Donc $x \in B$.

$\boxed{\subset}$ Montrons l'inclusion $B \subset A$.
Soit $x \in B$
*[Arguments et/ou calculs utilisant probablement que $x \in B$]*
Donc $x \in A$.

**Bilan.** On a montré $A = B$.

- Quel que soit l'ensemble $E$, on a $\emptyset \subset E$, car c'est une assertion du type $\forall x \in \emptyset,\ x \in E$.
- Attention à ne pas confondre *appartenance* et *inclusion*.
  Vous méditerez ceci : considérons $J = \Big\{[0,x] \mid x \in \mathbb{R}^{+*}\Big\}$. On a $[0,1] \in J$, mais

**28** **Question.**

- Montrer
$$\Big\{x \in \mathbb{R} \mid \exists\, t \in \mathbb{R}^-,\ x = t^2+1\Big\} \;=\; [1,+\infty[$$
- Montrer
$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & y & + & 5z & = & 0 \end{array}\right.\right\} = \Big\{(4t,-5t,t) \mid t \in \mathbb{R}\Big\}$$

## Opérations booléennes sur les ensembles

**29** **Définition.** Soit $\Omega$ un ensemble et $A, B \subset \Omega$ deux parties.

— L'*union* $A \cup B$ est l'ensemble des éléments appartenant à au moins une des deux parties :
$$A \cup B \;=\; \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ ou } \ x \in B\}$$

— L'*intersection* $A \cap B$ (lu « A inter B ») est l'ensemble des éléments appartenant aux deux parties :
$$A \cap B \;=\; \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ et } \ x \in B\}$$

— La *différence* $A \setminus B$ (lu « A privé de B ») est l'ensemble des éléments appartenant à $A$ mais pas à $B$ :
$$A \setminus B \;=\; \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ et } \ x \notin B\}$$

- Quand l'ensemble « ambiant » $\Omega$ est clair, la différence $\overline{A} = \Omega \setminus A$ est appelée le *complémentaire* de $A$.
- On trouve d'autres notations, notamment $A^c$ ou encore $\complement A$. Ce concept est très utile mais peut mener à des erreurs si $\Omega$ n'est pas précisé : $\mathbb{R}^{+*}$ est à la fois une partie de $\mathbb{R}^+$ et de $\mathbb{R}$. Dans le premier cas, son complémentaire est $\{0\}$ ; dans le second, c'est $\mathbb{R}^-$.
  La notation $\Omega \setminus A$, elle, ne prête pas à confusion.

**30** **Définition.** Soit $\Omega$ un ensemble et $A, B \subset \Omega$ deux parties.
On dit que

— $A$ et $B$ sont *distinctes* lorsque $A \neq B$, c'est-à-dire lorsque

.......................................................

— $A$ et $B$ sont *disjointes* lorsque $A \cap B = \emptyset$.

**31** **Proposition.** Soit $A$ et $B$ deux ensembles. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $A \subset B$

ii) $A \cup B = B$

iii) $A \cap B = A$

32 **Proposition.**
Soit $\Omega$ un ensemble et $A, B, C \subset \Omega$ trois parties.

- Lois de De Morgan. On a :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \Omega \setminus (A \cup B) \;=\; (\Omega \setminus A) \cap (\Omega \setminus B)$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \Omega \setminus (A \cap B) \;=\; (\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B)$$

- Double distributivité. On a :

$$A \cap (B \cup C) \;=\; (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) \;=\; (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

- Élément neutre. On a

$$A \cup \emptyset = A \qquad \text{et} \qquad A \cap \Omega = A$$

## Produit cartésien

« Rappelons » qu'un *couple* est la donnée de deux objets mathématiques dans un certain ordre. Par exemple, les couples $(2,6)$ et $(6,2)$ sont différents.

33 **Définition.** L'ensemble des couples $(a, b)$ où $a \in A$ et $b \in B$ est appelé le *produit cartésien* de $A$ et $B$, noté $A \times B$ et lu « $A$ croix $B$ ».

34 **Exemple.** L'ensemble $\{1, 2\} \times \{3, 4, 5\}$ est ..................................................

- On peut définir de la même façon des *triplets* $(a, b, c)$ avec $a \in A$, $b \in B$ et $c \in C$. Leur ensemble est noté $A \times B \times C$.
- Si on dispose de $n$ ensembles $A_1, \dots, A_n$, leur produit cartésien (à savoir $A_1 \times \cdots \times A_n$) est l'ensemble des $n$-uplets $(x_1, \dots, x_n)$, avec pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la condition $x_i \in A_i$.
- On retrouve en particulier la définition de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ou plus généralement $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ comme ensemble de couples ou de $n$-uplets de nombres réels (typiquement, les coordonnées d'un point du plan, ou de l'espace dans un certain repère).
- La notion de produit cartésien peut servir à « rassembler » plusieurs quantificateurs du même type.
Par exemple, une assertion comme
$$\forall x \in \left]1, +\infty\right[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x^n \geqslant x$$
peut se réécrire sous la forme
$$\forall (x, n) \in \left]1, +\infty\right[ \times \mathbb{N}^*,\ x^n \geqslant x$$
On peut d'ailleurs la réécrire sous la forme
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \left]1, +\infty\right[,\ \ x^n \geqslant x$$
- Pour quantifier sur deux réels, on pourra donc écrire au choix
« $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \dots$ », ou bien « $\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \dots$ », ou bien « $\forall x, y \in \mathbb{R}, \dots$ », ou bien « $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \dots$ ».
Attention cependant à ne pas écrire $\forall (x, y) \in \mathbb{R}, \dots$, qui n'aurait pas de sens.

## Ensemble des parties d'un ensemble

Soit $\Omega$ un ensemble. On note $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de ses parties.

- L'ensemble des parties d'un ensemble est donc un ensemble d'ensembles.
- Les assertions $A \subset \Omega$ et $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ signifient la même chose et se prononcent « $A$ est une partie de $\Omega$ ».

**35** **Exemples.** Décrire l'ensemble des parties de $\{1, 2\}$.
Puis l'ensemble des parties de $\{a, b, c\}$.

**36** **Attention !** La notion de parties d'un ensemble est compliqué.
Soit $\Omega$ un ensemble et $C, D$ des parties de $\Omega$.
Vrai ou Faux : Pour $X \in \mathcal{P}(\Omega)$, si $X \subset C \cup D$, alors $X \subset C$ ou $X \subset D$.
Vrai ou Faux : Pour $x \in \Omega$, si $x \in C \cup D$, alors $x \in C$ ou $x \in D$.

# Rudiments de logique

preuve et éléments de correction

## 6

Il suffit de réaliser une table de vérité.

| $P$ | non$(P)$ | non(non$(P)$) |
|---|---|---|
| F | V | F |
| V | F | V |

On constate que les colonnes non(non$(P)$) et $P$ sont identiques. Cela signifie que, quel que soit le statut de l'assertion $P$ (vraie ou fausse), les assertions non(non$(P)$) et $P$ ont la même valeur de vérité : elles sont donc équivalentes.

## 7

Il suffit de réaliser une table de vérité.

| $P$ | $Q$ | $P$ ou $Q$ | non$(P$ ou $Q)$ | non$(P)$ | non$(Q)$ | non$(P)$ et non$(Q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| F | F | | | | | |
| F | V | | | | | |
| V | F | | | | | |
| V | V | | | | | |

Ce tableau montre que les assertions « non$(P$ ou $Q)$ » et « non$(P)$ et non$(Q)$ » sont équivalentes.

## 8

Encore une fois, une table de vérité suffit.

| $P$ | $Q$ | $P \implies Q$ | non$(P \implies Q)$ | non$(Q)$ | $P$ et non$(Q)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| F | F | | | | |
| F | V | | | | |
| V | F | | | | |
| V | V | | | | |

## 15

Encore une table de vérité !

| $P$ | $Q$ | $P \implies Q$ | non$(Q)$ | non$(P)$ | non$(Q) \implies$ non$(P)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| F | F | | | | |
| F | V | | | | |
| V | F | | | | |
| V | V | | | | |

## 20

**Analyse.** Supposons qu'il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\left\{\begin{array}{l} x+y=s \\ x-y=d \end{array}\right.$.

En sommant les deux lignes, on a alors $2x = s+d$ d'où $x = \dfrac{s+d}{2}$.

En effectuant la différence des lignes 1 et 2, on obtient $2y = s-d$, d'où $y = \dfrac{s-d}{2}$.

Bilan de l'analyse : si $(x,y)$ existe (pour être solution du système), alors nécessairement, on a

$$(x,y) = \left(\frac{s+d}{2}, \frac{s-d}{2}\right)$$

**Synthèse.** Réciproquement, on vérifie que le couple $\left(\frac{s+d}{2}, \frac{s-d}{2}\right)$ est bien solution du système.

On a les calculs suivants

$$\frac{s+d}{2} + \frac{s-d}{2} = \frac{2s}{2} = s$$

et

$$\frac{s+d}{2} - \frac{s-d}{2} = \frac{2d}{2} = d$$

Ainsi, $\left(\frac{s+d}{2}, \frac{s-d}{2}\right)$ est bien solution du système.

**Bilan.** On a montré qu'il existe un unique couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\left\{ \begin{array}{l} x+y=s \\ x-y=d \end{array} \right.$, à savoir $(x, y) = \left(\frac{s+d}{2}, \frac{s-d}{2}\right)$.

Remarque.
On a en fait montré l'équivalence suivante

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x+y=s \\ x-y=d \end{cases} \iff (x, y) \in \left\{ \left(\frac{s+d}{2}, \frac{s-d}{2}\right) \right\}$$