Rudiments de logique

exercices

Rudiments de logique, ensembles

Assertions, quantificateurs

101 **Tâche de sélection de Wason**

Quatre cartes ont un nombre imprimé sur une de leurs faces et une lettre de l'autre côté. Elles sont posées sur une table et montrent **A** **B** **1** **2**

Quelle(s) carte(s) doit-on retourner pour savoir si les cartes respectent la règle : « *au dos de chaque voyelle se trouve un nombre pair* » ?

102 **Au plus, au moins, exactement**

Soient a, b, et c trois réels. On note E l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. On considère les trois propositions suivantes :

(i) $\exists\, x \in \mathbb{R},\ ax^2 + bx + c = 0$

(ii) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ \big((ax^2 + bx + c = 0 \text{ et } ay^2 + by + c = 0) \Rightarrow x = y\big)$

(iii) $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ \big(ax^2 + bx + c = 0 \text{ et } (ay^2 + by + c = 0 \Rightarrow x = y)\big)$

Faire trois phrases du type :

« La proposition n° ... signifie que l'équation E possède ...... solution réelle. »

103 **Interversion des quantificateurs**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Quelle différence de sens ont les deux assertions proposées ? Dire si elles sont vraies ou fausses.

(i) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R},\ y = f(x)$ VERSUS $\exists\, y \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ y = f(x)$

(ii) $\forall\, y \in \mathbb{R},\ \exists\, x \in \mathbb{R},\ y = f(x)$ VERSUS $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ y = f(x)$

(iii) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, M \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$ VERSUS $\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$

104 **En français**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

Voici deux assertions

(i) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \big(f(x) = 1 \text{ ou } f(x) = -1\big)$ (ii) $\big(\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1\big)$ ou $\big(\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = -1\big)$

1. Exprimer verbalement la signification des assertions suivantes et donner un exemple concret de fonction f vérifiant l'assertion.
2. Y a-t-il une équivalence entre ces deux assertions ?
3. Écrire la négation de ces assertions.
4. Écrire en langage formel que « f est à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et prend effectivement -1 et 1 comme valeurs ».

Raisonnements divers et variés

105 **Contraposée et réciproque**

1. Montrer l'assertion $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ x + y > 2 \implies x > 1$ ou $y > 1$.
2. Énoncer précisément la réciproque de cette assertion, et déterminer si elle est vraie ou fausse.

106 **Constance, es-tu là ?** mardi

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes

(i) $\exists\, c \in \mathbb{R},\ \forall\, t \in \mathbb{R},\ f(t) = c$

(ii) $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ f(x_1) = f(x_2)$

107 **Circuit d'équivalences** mardi

Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Démontrer que les quatre assertions suivantes sont équivalentes

(i) $x = y$

(ii) $\forall\, \varepsilon \geqslant 0,\ |x-y| \leqslant \varepsilon$

(iii) $\forall\, \varepsilon' > 0,\ |x-y| \leqslant \varepsilon'$

(iv) $\forall\, \varepsilon > 0,\ |x-y| < \varepsilon$

108 **Somme nulle**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que : $\forall\, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+, \quad a_1 + \cdots + a_n = 0 \implies \forall\, i \in [\![1, n]\!],\ a_i = 0$?
2. Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = n$.
   En calculant $(1-x_1)^2 + \cdots + (1-x_n)^2$, montrer que : $\quad \forall\, k \in [\![1, n]\!],\ x_k = 1$.

109 **Utilisation d'une $\forall$-assertion**

On a montré dans le cours :

$$(\star) \qquad \forall\, a \in \mathbb{R}, \qquad \Big(\forall\, \varepsilon > 0,\ a \leqslant \varepsilon\Big) \implies a \leqslant 0$$

En déduire :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \qquad \Big(\forall\, \varepsilon' > 0,\ x \leqslant y + \varepsilon'\Big) \implies x \leqslant y$$

110 **Inégalités en bataille !**

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}^+$.

Montrer que l'un des trois produits $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

On commencera par montrer que $\quad \forall\, x \in \mathbb{R},\quad x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$.

111 **Décomposition paire-impaire**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

Montrer qu'il existe une unique fonction paire $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une unique fonction impaire $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f = g + h$.

On a donc montré le résultat suivant :

> *Toute fonction s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.*

112 **Une double inclusion**

Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall\, p, q \in \mathbb{N}, \quad u_{p+q} = u_p + u_q$$

Montrer que

$$\mathcal{L} \;=\; \Big\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists\, a \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = an\Big\}$$

113 **Une analyse-synthèse !** mardi

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\spadesuit \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

114 Une autre analyse-synthèse !

Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$(\star) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(y) = 2\big[f(x) + f(y)\big] + xy - 4$$

115 Conjectures de Goldbach

La *conjecture de Goldbach forte* affirme que tout nombre pair $\geqslant 4$ est la somme de deux nombres premiers. La *conjecture de Goldbach faible* affirme que tout nombre impair $\geqslant 7$ est la somme de trois nombres premiers.

1. Montrer que la conjecture forte implique la conjecture faible.
2. En 2013, Harald Helfgott a démontré la conjecture de Goldbach faible.
   Que peut-on en déduire sur la conjecture forte ?

Récurrence

116 Somme des inverses des carrés — mardi

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}.$$

117 Inégalité de Bernoulli

Montrer

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ (1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

118 Où est l'arnaque ?

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{P}_n$ la propriété « quels que soient les entiers strictement positifs a et b, s'ils sont plus petits que n, alors ils sont égaux ».

- ▷ La propriété $\mathcal{P}_1$ est évidente, car a et b ne peuvent être qu'égaux à 1, donc égaux entre eux.
- ▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie. Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$. Pour cela, on prend deux entiers a et b strictement positifs et inférieurs à $n+1$. Alors $a-1$ et $b-1$ sont inférieurs à n, et donc égaux d'après l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}_n$. Ainsi $a = b$.
- ▷ Bilan : tous les entiers sont égaux !

Où est l'erreur ?

119 Initialisation versus Hérédité

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété suivante :

$$\mathcal{P}_n : \qquad \text{« } 2^n > n^2 \text{ »}$$

1. Montrer que $\forall n \geqslant 3, \ \mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$.
2. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}_n$ est-elle vraie ?

120 Stratégies

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n - 1} \end{cases}$

On souhaite montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{2n} = \frac{1}{2}$ et $u_{2n+1} = -1$.
Sans rédiger la solution, expliquer les diverses alternatives de preuves possibles.

Existence & Unicité

121 Conjugaison dans $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$

1. A-t-on
$$\forall\, u, v, u', v' \in \mathbb{R}, \quad u + v\sqrt{3} = u' + v'\sqrt{3} \implies u = u' \text{ et } v = v'$$
2. A-t-on
$$\forall\, u, v, u', v' \in \mathbb{Z}, \quad u + v\sqrt{3} = u' + v'\sqrt{3} \implies u = u' \text{ et } v = v'$$
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un couple $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que
$$(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3} \quad \text{et} \quad (2-\sqrt{3})^n = a_n - b_n\sqrt{3}$$
Puis montrer l'unicité d'un tel couple.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $a_n^2 - 3b_n^2 = 1$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. En considérant $(2-\sqrt{3})^n$, montrer que $\lfloor (2+\sqrt{3})^n \rfloor$ est un entier impair.

122 Les deux bissectrices

On définit les ensembles
$$A = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\Big\} \qquad \text{et} \qquad B = \big\{(t, t)\big\}_{t\in\mathbb{R}}.$$
Montrer que tout élément de $\mathbb{R}^2$ s'écrit de manière unique comme la somme d'un élément de A et d'un élément de B.

Ensembles

123 Ménage à 4, puis à 3

Soit E un ensemble et A, B, C, D des parties de E.

1. Montrer l'implication $(A \subset C \text{ et } B \subset D) \implies A \cup B \subset C \cup D$.
2. Montrer l'équivalence $B \subset C \iff (A \cup B \subset A \cup C \text{ et } A \cap B \subset A \cap C)$.
3. Montrer l'équivalence $A \subset B \iff \forall X \in \mathscr{P}(E),\ A \cap X \subset B \cap X$.

124 A-B-C

Soient E un ensemble et A, B, C des parties de E. Montrer l'implication
$$A \setminus B = C \implies A \cup B = B \cup C.$$

125 Recouvrement

Soient Ω un ensemble et A, B deux parties de Ω. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $A \cup B = \Omega$.

(ii) $\forall X \in \mathcal{P}(\Omega),\ \big(X \cap A = \varnothing \implies X \subset B\big)$.

126 Partition

Soit E un ensemble et soient A, B deux parties de E.
Montrer l'équivalence :
$$\begin{cases} A \cap B = \varnothing \\ A \cup B = E \end{cases} \iff E = (B \setminus A) \cup (A \setminus B).$$

Miscellaneus

127 Une récurrence double subtile

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$.

En procédant par récurrence double, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.

Utiliser $\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right) = \left(ab + \frac{1}{ab}\right) + \left(\frac{a}{b} + \frac{1}{\frac{a}{b}}\right)$ avec $a = x^{n+1}$ et $b = x$

128 Somme de deux parties de $\mathbb{R}$

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$.
On définit l'ensemble **somme de A et B** par :

$$A \boxplus B = \left\{a + b \mid a \in A,\, b \in B\right\} \quad \text{ou encore} \quad A \boxplus B = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists (a,b) \in A \times B,\, x = a + b\}\,.$$

1. Dans le cas particulier où $A = \{0, 1\}$ et $B = \{1, 4\}$, déterminer $A \boxplus B$.
2. Montrer que : $\forall\, A_1, A_2, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ (A_1 \cup A_2) \boxplus B = (A_1 \boxplus B) \cup (A_2 \boxplus B)$.
3. (a) Montrer que : $\forall\, A_1, A_2, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ (A_1 \cap A_2) \boxplus B \subset (A_1 \boxplus B) \cap (A_2 \boxplus B)$.
   (b) L'assertion $\forall\, A_1, A_2, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ (A_1 \cap A_2) \boxplus B = (A_1 \boxplus B) \cap (A_2 \boxplus B)$ est-elle vraie ? Justifier votre réponse.

129 Nombres de Fibonacci (théorème de Zeckendorf, 1952)

On définit les *nombres de Fibonacci* $(F_n)_{n \geqslant 1}$ par :

$$F_1 = F_2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \geqslant 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. Soit $n \geqslant 1$. Conjecturer puis démontrer une expression simple pour la somme
$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n.$$
2. Démontrer que tout entier $n \geqslant 1$ peut s'écrire comme une somme de nombres de Fibonacci non consécutifs.

   Cette question est difficile et ne doit être abordée que si la totalité des autres exercices a été traitée !

130 Le disque unité n'est pas un produit cartésien !

Montrer que l'ensemble $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$ ne peut pas s'écrire comme le produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.

Rudiments de logique

corrigés

102

La proposition (i) signifie que l'équation E possède *au moins une* solution réelle.
La proposition (ii) signifie que l'équation E possède *au plus une* solution réelle.
La proposition (iii) signifie que l'équation E possède *exactement une* solution réelle.

(i) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y = f(x)$ versus $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y = f(x)$

L'assertion de gauche, c'est la définition d'une fonction (l'assertion est vraie).

L'assertion de droite dit que f est constante (l'assertion est donc vraie ou fausse selon la fonction f considérée).

(ii) $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ y = f(x)$ versus $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y = f(x)$

L'assertion de gauche dit que tout élément réel est atteint par f (l'assertion est donc vraie ou fausse selon la fonction f considérée).

On dira plus tard dans l'année que f est surjective.

L'assertion de droite dit : « il existe un x tel que son image $f(x)$ fasse tous les réels du monde ! ». Cette assertion est clairement fausse (si vous n'êtes pas convaincu, montrer que sa négation est vraie !)

(iii) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$ versus $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$

L'assertion de gauche dit que, pour x fixé, on peut trouver M tel que $f(x) \leqslant M$. C'est vrai, prendre par exemple $M = f(x) + 1$.

L'assertion de droite dit que l'on peut trouver un M comme précédemment, mais qui fonctionne pour tout x ! Cela dit que la fonction f est majorée (l'assertion est donc vraie ou fausse selon la fonction f considérée : vraie si f est majorée, et fausse sinon !).

1. L'assertion (i) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \Big(f(x) = 1 \text{ ou } f(x) = -1\Big)$ signifie que f ne peut prendre que deux valeurs, à savoir 1 et -1.

   On dit parfois « f prend ses valeurs dans l'ensemble $\{-1, 1\}$ » ; plus tard dans l'année, on écrira $f(\mathbb{R}) \subset \{-1, 1\}$, ou encore $\operatorname{Im} f \subset \{-1, 1\}$ pour dire que l'image de f est incluse dans $\{-1, 1\}$.

   L'assertion (ii) $\Big(\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1\Big)$ ou $\Big(\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = -1\Big)$ signifie que f est constante égale à 1 ou bien f est constante égale à -1.
2. Le lecteur vérifiera que (ii) $\Rightarrow$ (i), mais (i) $\not\Rightarrow$ (ii).
3. La négation de (i) est $\exists\, x \in \mathbb{R}, \Big(f(x) \neq 1 \text{ et } f(x) \neq -1\Big)$.

   La négation de (ii) est $\Big(\exists\, x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) \neq 1\Big)$ et $\Big(\exists\, x_1 \in \mathbb{R}, f(x_1) \neq -1\Big)$
4. Une solution possible :

$$\Big(\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \in \{-1, 1\}\Big) \text{ et } \Big(\exists\, x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) = 1\Big) \text{ et } \Big(\exists\, x_1 \in \mathbb{R}, f(x_1) = -1\Big)$$

   ou encore :

$$\Big(\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \in \{-1, 1\}\Big) \text{ et } \Big(\forall\, y \in \{-1, 1\},\ \exists\, x_0 \in \mathbb{R},\ y = f(x_0)\Big)$$

   ou encore :

$$f(\mathbb{R}) \subset \{-1, 1\} \text{ et } \Big(\forall\, y \in \{-1, 1\},\ \exists\, x_0 \in \mathbb{R},\ y = f(x_0)\Big)$$

   Le must :

$$f(\mathbb{R}) = \{-1, 1\}$$

105

1. Donnons deux méthodes, l'une par contraposée, l'autre en suivant le canevas standard.

   Première méthode (par contraposée).

   On va montrer la contraposée de l'assertion, c'est-à-dire

   $$\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ (x \leqslant 1 \text{ et } y \leqslant 1) \implies x + y \leqslant 2$$

   Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leqslant 1$ et $y \leqslant 1$.
   En sommant, on obtient $x + y \leqslant 2$.
   D'où l'implication.

   Deuxième méthode (canevas standard).

   Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x + y > 2$.
   Montrons $x > 1$ ou $y > 1$ par la méthode standard (c'est-à-dire en supposant la négation de $x > 1$ et en montrant $y > 1$).
   Supposons non$(x > 1)$, c'est-à-dire $x \leqslant 1$.
   En ajoutant l'inégalité stricte $x + y > 2$ et l'inégalité large $1 \geqslant x$, on obtient l'inégalité stricte $x + y + 1 > x + 2$.
   En ajoutant $-(x + 1)$ des deux côtés, il vient $y > 1$.

2. La réciproque est
   $$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad (x > 1 \ \text{ ou } \ y > 1) \implies x + y > 2.$$

   Cette réciproque est fausse. Sa négation est en effet

   $$\exists\, x, y \in \mathbb{R},\ \Big((x > 1 \ \text{ ou } \ y > 1) \ \text{ et } \ x + y \leqslant 2\Big)$$

   que l'on montre facilement en prenant par exemple $x = 0$ et $y = 3/2$.

Sens direct. Supposons (i).

On peut donc trouver c tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = c$ (✠).
Montrons (ii).
Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Le nombre x_1 appartient à $\mathbb{R}$, donc on peut lui appliquer la $\forall$-assertion (✠).
On en déduit $f(x_1) = c$.
De même, d'après (✠), $f(x_2) = c$.
On a donc $f(x_1) = f(x_2)$.

Cela conclut la preuve de (ii).

Sens réciproque. Supposons (ii).
Montrons (i), c'est-à-dire $\exists\, c \in \mathbb{R},\ \forall\, t \in \mathbb{R},\ f(t) = c$.
Candidat : $c = f(0)$.

- On a bien $c \in \mathbb{R}$.
- Montrons que c vérifie la propriété, c'est-à-dire que $\forall\, t \in \mathbb{R},\ f(t) = c$.
  Soit $t \in \mathbb{R}$.

  Les nombres 0 et t sont réels, donc on peut leur appliquer la $\forall$-assertion (ii).
  On en déduit que $f(0) = f(t)$, c'est-à-dire que $f(t) = c$.

Cela conclut la preuve de (i).

1. Donnons deux méthodes, l'une par contraposée, l'autre en suivant le canevas standard.

• Première méthode (par contraposée)

Fixons $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$.
Supposons non $\big(\forall\, i,\ a_i = 0\big)$, donc il existe i_0 tel que $a_{i_0} \neq 0$.
Montrons non $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i = 0\right)$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$.

Comme a_{i_0} est positif (hypothèse de l'énoncé) et non nul (hypothèse du raisonnement), on a $a_{i_0} > 0$.
Montrons maintenant ce que l'on doit montrer !
Par sommation par paquets, et avec les hypothèses, on a

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \;=\; \underbrace{a_{i_0}}_{>0} + \underbrace{\sum_{i \neq i_0} a_i}_{\geqslant 0}$$

On en déduit que la somme $\sum_{i=1}^{n} a_i$ est strictement positive (la somme d'un nombre strictement positif et d'un positif est un nombre strictement positif).
A fortiori, la somme $\sum_{i=1}^{n} a_i$ est **non** nulle !

• Deuxième méthode (par itération finie)

Soit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$.

— On a $a_1 + \cdots + a_n = 0$ par hypothèse
  Montrons tout d'abord que $a_n = 0$.
  D'une part, a_n est un réel positif par hypothèse.
  D'autre part, on a
  $$a_n \;=\; -(a_1 + \cdots + a_{n-1})$$
  donc a_n est négatif (car égal à l'opposé d'une somme de réels positifs).
  Donc $a_n = 0$.

— On a donc $a_1 + \cdots + a_{n-1} = 0$ (grâce à l'hypothèse initiale et au fait que $a_n = 0$.
  On montre comme précédemment que $a_{n-1} = 0$.

— En itérant un nombre fini de fois ce procédé, on finit par obtenir
  $$a_{n-2} = \cdots = a_1 = 0$$

On a donc montré que $\forall\, i \in [\![1,n]\!],\ a_i = 0$.
Bilan. On a montré l'implication :

$$\forall\, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+, \quad a_1 + \cdots + a_n = 0 \implies \forall\, i \in [\![1,n]\!],\ a_i = 0$$

• Deuxième méthode bis (par récurrence finie, forte, descendante !)

Soit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$.
Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, notons $\mathcal{H}_i$ l'assertion « $a_i = 0$ ».
Montrons $\forall\, i \in [\![1,n]\!],\ \mathcal{H}_i$.
Procédons par récurrence finie, forte, descendante !

Initialisation. Montrons $\mathcal{H}_n$.

Hérédité. Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $\mathcal{H}_n, \dots, \mathcal{H}_{i+1}$. Montrons $\mathcal{H}_i$.

D'après l'hypothèse de l'énoncé, on a $a_1 + \cdots + a_n = 0$.
D'après $\mathcal{H}_n, \dots, \mathcal{H}_{i+1}$, on a $a_n = \cdots = a_{i+1} = 0$.
D'où $a_1 + \cdots + a_i = 0$ puis

$$a_i = -(a_1 + \cdots + a_{i-1})$$

donc a_i est négatif (car égal à l'opposé d'une somme de réels positifs).
Comme a_i est positif par hypothèse, on a donc $a_i = 0$.
D'où $\mathcal{H}_i$.

• Troisième méthode (la plus jolie, la plus efficace !)

Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$.
Montrons que $\forall\, i \in [\![1, n]\!],\ a_i = 0$.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$.
On a

$$a_i = -(a_1 + \cdots + a_{i-1} + a_{i+1} + \cdots + a_n)$$

donc a_i est négatif (car égal à l'opposé d'une somme de réels positifs).
Comme a_i est positif par hypothèse, on a donc $a_i = 0$.
D'où $a_i = 0$.

2. Calculons $(1-x_1)^2 + \cdots + (1-x_n)^2$. On a

$$\begin{aligned}(1-x_1)^2 + \cdots + (1-x_n)^2 &= (1 - 2x_1 + x_1^2) + \cdots + (1 - 2x_n + x_n^2)\\ &= \underbrace{(1 + \cdots + 1)}_{n} - 2\underbrace{(x_1 + \cdots + x_n)}_{n} + \underbrace{(x_1^2 + \cdots + x_n^2)}_{n}\\ &= n - 2n + n\\ &= 0\end{aligned}$$

On peut appliquer la question 1 à $a_i = (1-x_i)^2$. En effet, $a_i \in \mathbb{R}^+$ et la somme des a_i est nulle.
On en déduit que tous les a_i sont nuls.
Autrement dit, $\forall\, i \in [\![1, n]\!],\ (1-x_i)^2 = 0$. D'où

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!],\ x_i = 1$$

109

Sachant $(\star)$, montrons

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \qquad \Big(\forall\, \varepsilon' > 0,\ x \leqslant y + \varepsilon'\Big) \implies x \leqslant y$$

Soit $x, y \in \mathbb{R}$.
Supposons la prémisse $\forall\, \varepsilon' > 0,\ x \leqslant y + \varepsilon'$.
Autrement dit, on suppose $\forall\, \varepsilon' > 0,\ x - y \leqslant \varepsilon'$

Posons $a = x - y$. Ce réel a vérifie donc $\quad \forall\, \varepsilon' > 0,\ a \leqslant \varepsilon'$.
D'après $(\star)$, on en déduit que $a \leqslant 0$.

Donc $x \leqslant y$.

110

Raisonnons par l'absurde et supposons que les trois produits sont strictement supérieurs à $\frac{1}{4}$:

$$a(1-b) > \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad b(1-c) > \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad c(1-a) > \frac{1}{4}$$

Par produit d'inégalités **positives**, on a

$$a(1-b) \times b(1-c) \times c(1-a) > \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

ce qui s'écrit encore (par commutativité de $\times$) :

$$(\clubsuit) \qquad abc(1-a)(1-b)(1-c) > \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

Or, on sait que $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$, donc on a

$$a(1-a) \leqslant \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad b(1-b) \leqslant \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad c(1-c) \leqslant \frac{1}{4}$$

Et on a $a(1-a) \geqslant 0$ (en effet, $a \geqslant 0$ par hypothèse, et l'inégalité $c(1-a) > \frac{1}{4}$ implique que $1-a \geqslant 0$ car $c \geqslant 0$).
De la même façon $b(1-b) \geqslant 0$ et $c(1-c) \geqslant 0$.
Par produit d'inégalités **positives**, on a

$$a(1-a) \times b(1-b) \times (1-c) \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

ce qui s'écrit encore (par commutativité de $\times$) :

$$abc(1-a)(1-b)(1-c) \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

ce qui contredit l'inégalité ($\clubsuit$) précédente.

111

Montrons qu'il existe un unique couple de fonctions (g, h) tel que $\begin{cases} f = g + h \\ g \text{ paire} \\ h \text{ impaire} \end{cases}$.

C'est un problème d'existence et unicité, procédons par analyse-synthèse.

Analyse. Supposons qu'il existe un couple de fonctions (g, h) tel que $\begin{cases} f = g + h \\ g \text{ paire} \\ h \text{ impaire} \end{cases}$

On a une égalité de *fonctions* et l'on en fait une infinité d'égalité de *réels* (en appliquant à $x \in \mathbb{R}$ puis à $-x$ et en tenant compte de la parité des fonctions) :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(x) - h(x) \end{cases}$$

En ajoutant et soustrayant, on obtient : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \begin{cases} g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \\ h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \end{cases}$

Pour la culture :

on pourrait résumer cela en une seule égalité de *fonctions* : $\begin{cases} g = \dfrac{f + \widetilde{f}}{2} \\ h = \dfrac{f - \widetilde{f}}{2} \end{cases}$ en notant $\widetilde{f} : x \mapsto f(-x)$

Synthèse. Réciproquement, considérons g et h les fonctions définies par

$$\begin{cases} g : x \mapsto \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \\ h : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \end{cases}$$

On vérifie facilement (à vous de le faire sur une copie) que $\begin{cases} f = g + h \\ g \text{ paire} \\ h \text{ impaire} \end{cases}$

Bilan. On a montré que f s'écrit (cf. la synthèse) de manière unique (cf. l'analyse) comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

113

On procède par analyse-synthèse.

Analyse. Supposons qu'il existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant ♠.

En particulier, l'assertion ♠ pour $x = 0$ fournit :

$$(\star) \qquad \forall y \in \mathbb{R}, \quad f(0)f(y) - f(0) = y$$

En particulier, l'assertion ♠ pour $y = 0$ fournit :

$$f(0)^2 - f(0) = 0$$

c'est-à-dire

$$f(0)\big(f(0) - 1\big) = 0$$

D'où $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

• Montrons que le cas $f(0) = 0$ est impossible.
Supposons $f(0) = 0$. En reprenant l'égalité précédente $(\star)$ avec $y = 1$, on a

$$f(0)f(1) - f(0) = 1$$

et comme on suppose $f(0) = 0$, on obtient $0 = 1$, ce qui est absurde.

On a donc $f(0) = 1$. L'égalité $(\star)$ devient

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad 1 \times f(y) - 1 = y$$

On a donc

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f(y) = y + 1$$

Ainsi, si une telle fonction f existe, alors nécessairement elle est égale à la fonction

$$f_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array}$$

Ici, dans cet exercice, à la fin de l'analyse, on trouve qu'il y a 0 ou 1 fonction à vérifier ♠

Synthèse. Montrons que la fonction $f_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array}$ vérifie la condition ♠.

Fixons $x, y \in \mathbb{R}$.
On a

$$\begin{aligned} f_0(x)f_0(y) - f_0(xy) &= (x+1)(y+1) - (xy+1) \\ &= x + y \end{aligned}$$

Bilan. On a montré l'égalité d'ensembles

$$\Big\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ vérifie } ♠\Big\} = \{x \mapsto x+1\}$$

Autrement dit, l'ensemble des fonctions vérifiant la condition ♠ est l'ensemble $\{x \mapsto x+1\}$.
Autrement dit, il n'y a qu'une seule fonction à vérifier la condition ♠ à savoir $x \mapsto x+1$.

Analyse. Supposons qu'il existe f vérifiant $(\star)$.

— En utilisant $(\star)$ avec $x = 1$ et $y = 1$, on trouve

$$f(1)f(1) = 2\big[f(1) + f(1)\big] + 1 \times 1 - 4$$

D'où $f(1)$ est solution de l'équation $t^2 - 4t + 3 = 0$, qui a pour solution 1 et 3. Ainsi $f(1) = 1$ ou $f(1) = 3$.

— En utilisant $(\star)$ avec $y = 1$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(1) \;=\; 2\big[f(x) + f(1)\big] \;+\; x \times 1 \;-\; 4$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Big(f(1) - 2\Big) f(x) \;=\; 2f(1) + x - 4$$

Cas $f(1) = 1$
Dans ce cas, on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -f(x) \;=\; 2 + x - 4$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \;=\; -x + 2$$

Cas $f(1) = 3$
Dans ce cas, on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \;=\; 2 \times 3 + x - 4$$

d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \;=\; x + 2$$

Bilan de l'analyse : si f existe, alors f est égale à $f_1 : x \mapsto -x + 2$ ou $f_2 : x \mapsto x + 2$.
Autre façon de formuler le bilan de l'analyse :

$$\Big\{ f \mid f \text{ vérifie } (\star) \Big\} \;\subset\; \{f_1, f_2\}$$

Synthèse. Regardons si f_1 et f_2 vérifient ou non $(\star)$.

— Montrons que f_2 vérifie $(\star)$.
Soit $x, y \in \mathbb{R}$.
On a d'une part :

$$\begin{aligned} f_2(x)f_2(y) &= (x+2)(y+2) \\ &= xy + 2(x+y) + 4 \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} 2\big[f_2(x) + f_2(y)\big] + xy - 4 &= 2\big[(x+2) + (y+2)\big] + xy - 4 \\ &= 2\big[x + y + 4\big] + xy - 4 \\ &= xy + 2(x+y) - 4 \end{aligned}$$

Les deux membres sont égaux, donc f_2 vérifie $(\star)$.

— Un calcul analogue montre que f_1 vérifie $(\star)$.

Bilan de la synthèse : f_1 et f_2 sont deux fonctions qui vérifient $(\star)$.
Autre façon de formuler le bilan de la synthèse :

$$\{f_1, f_2\} \;\subset\; \Big\{ f \mid f \text{ vérifie } (\star) \Big\}$$

Bilan. L'ensemble des fonctions f vérifiant $(\star)$ est égal à l'ensemble $\{f_1, f_2\}$.

Deuxième solution (beaucoup plus compliqué pour un élève ; et en fait, ce n'est PAS une belle preuve !)

Analyse. Supposons qu'il existe f vérifiant $(\star)$.

En particulier, en prenant $y = x$ dans $(\star)$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)^2 - 4f(x) + (4 - x^2) = 0$$

Ainsi, $\boxed{\textbf{à } x \textbf{ fixé}}$, $f(x)$ est solution de $t^2 - 4t + (4 - x^2) = 0$, de discriminant $4x^2$ et dont les solutions sont $t = \dfrac{4 \pm 2x}{2} = 2 \pm x$.

Bilan de l'analyse. Si f existe, alors f est du type

$$f : x \mapsto 2 + \varepsilon(x)x$$

où ε est une fonction qui prend ses valeurs dans $\{-1, 1\}$.

Remarquons, qu'a priori, on ne sait pas si ε est constante égale à 1 ou constante égale à -1 (ce qui va finir par être vrai, confer la synthèse).

Synthèse. Vérifions si les fonctions f trouvées précédemment sont solutions, c'est-à-dire vérifient $(\star)$.

On a

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (2 + \varepsilon(x)x)(2 + \varepsilon(y)y) \;=\; 2\Big[(2 + \varepsilon(x)x) + (2 + \varepsilon(y)y)\Big] + xy - 4$$

d'où

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad 4 + 2\Big(\varepsilon(x)x + \varepsilon(y)y\Big) + \varepsilon(x)\varepsilon(y)xy \;=\; 2\Big[4 + \varepsilon(x)x + \varepsilon(y)y\Big] + xy - 4$$

d'où

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad 4 + 2\Big(\varepsilon(x)x + \varepsilon(y)y\Big) + \varepsilon(x)\varepsilon(y)xy \;=\; 2\Big[\varepsilon(x)x + \varepsilon(y)y\Big] + xy + 4$$

d'où

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon(x)\varepsilon(y)xy \;=\; xy$$

Reprenons un peu l'analyse. Si f est solution, alors

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^*, \quad \varepsilon(x)\varepsilon(y) = 1$$

Cela impose à ε d'être une fonction constante égale à 1 ou -1 sur $\mathbb{R}^*$ (WHY ? !) ; de plus, sa valeur en 0 n'impacte pas sur f, car $f(0) = 2$ quoi qu'il arrive.

BILAN : l'ensemble des fonctions vérifiant $\star$ est réduit à l'ensemble contenant les deux fonctions $x \mapsto 2 \pm x$.

115

1. Supposons la conjecture de Goldbach forte.

   Montrons la conjecture de Goldbach faible, c'est-à-dire que tout nombre impair $\geqslant 7$ est la somme de trois nombres premiers.

   Soit $n \geqslant 7$ un nombre impair.

   On va appliquer la conjecture de Goldbach forte à l'entier $n-3$. C'est légitime car

   — On a bien $n-3$ pair (car n est impair).

   — On a bien $n-3 \geqslant 4$ (car $n \geqslant 7$).

   D'après la conjecture de Goldbach forte, on peut donc trouver deux nombres premiers p et q tels que $n-3 = p+q$.

   On en déduit $n = 3+p+q$.

   On a donc bien écrit n comme la somme de trois nombres premiers.

2. Rien !

Pour tout $n \geqslant 1$, on note $\mathcal{P}_n$ l'assertion

$$\mathcal{P}_n : « \tfrac{1}{1^2} + \tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{3^2} + \tfrac{1}{4^2} + \cdots + \tfrac{1}{n^2} \leqslant 2 - \tfrac{1}{n} ».$$

Montrons $\forall n \geqslant 1,\ \mathcal{P}_n$.
Procédons par récurrence simple.

Initialisation. On a $\frac{1}{1^2} = 1$ et $2 - \frac{1}{1} = 1$, d'où $\mathcal{P}_1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$.

On a :

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = \underbrace{\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right)}_{\leqslant \left(2 - \frac{1}{n}\right) \text{ d'après } \mathcal{P}_n} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

On a donc :

$$(\star) \qquad \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant 2 + \left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n}\right)$$

Faisons une pause dans notre raisonnement et montrons que $\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n} \leqslant -\frac{1}{n+1}$.
Pour cela, raisonnons par chaîne d'équivalences.
On a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n} \leqslant -\frac{1}{n+1} &\iff \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\
&\iff \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{n(n+1)} \\
&\iff n(n+1) \leqslant (n+1)^2 && \text{décroissance de la fonction inverse sur }]0, +\infty[\\
&\iff n \leqslant n+1 && \text{division par } n+1 > 0
\end{aligned}$$

L'assertion finale est vraie, donc l'assertion initiale aussi :

$$\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n} \leqslant -\frac{1}{n+1}$$

Reprenons l'inégalité $(\star)$. Par transitivité de $\leqslant$, on a donc

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n+1}$$

ce qui démontre $\mathcal{P}_{n+1}$.

Montrons

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (1+x)^n \geqslant 1+nx$$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$.
Montrons $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \underbrace{(1+x)^n \geqslant 1+nx}_{\mathcal{H}_n}$

Procédons par récurrence.

Initialisation.

Le membre gauche $(1+x)^1 = 1+x$ est supérieur ou égal au membre droit $1+1\times x = 1+x$.
D'où $\mathcal{H}_1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{H}_n$.

Montrons $\mathcal{H}_{n+1}$.
D'après $\mathcal{H}_n$, on a

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx$$

Multiplions cette inégalité par $1+x$ qui est positif. On obtient :

$$(1+x)^{n+1} \geqslant \underbrace{(1+nx)(1+x)}_{=1+(n+1)x+nx^2}$$

Comme $nx^2 \geqslant 0$, on obtient :

$$(1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)x$$

D'où $\mathcal{H}_{n+1}$.

Bilan de la récurrence. On a montré

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{H}_n$$

Bilan de la question. On a montré

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{H}_n$$

1. Soit $n \geqslant 3$ tel que $\mathcal{P}_n$.
   Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$.
   D'après $\mathcal{P}_n$, on a $2^n \geqslant n^2$.
   En multipliant par 2, on a $2^{n+1} \geqslant 2n^2$.
   Montrons que $2n^2 > (n+1)^2$ ce qui suffira à conclure.
   On a les équivalences suivantes :

   $$2n^2 > (n+1)^2 \iff n^2 - 2n - 1 > 0$$

   et le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
Signe de $x^2 - 2x - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Comme $n \geqslant 3$ et $3 \geqslant 1 + \sqrt{2}$, on en déduit que $n^2 - 2n - 1 > 0$, d'où $2n^2 > (n+1)^2$.

   Autre solution.
   On a les équivalences suivantes :

   $$\begin{aligned} 2n^2 > (n+1)^2 &\iff \sqrt{2}n > n+1 \\ &\iff (\sqrt{2}-1)n > 1 \\ &\iff n > \frac{1}{\sqrt{2}-1} \\ &\iff n > \sqrt{2}+1 \qquad \text{car } \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \dots \end{aligned}$$

2. On a

   $$1 = 2^0 \;>\; 0^2 = 0 \quad \text{et} \quad 2 = 2^1 \;>\; 1^2 = 1 \quad \text{mais} \quad \cancel{2^2 > 2^2} \quad \cancel{2^3 > 3^2} \quad \cancel{2^4 > 4^2}$$

   En revanche $2^5 > 5^2$.
   D'après la question 1, on en déduit que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 5$.
   Bilan. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{2, 3, 4\}$, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie.

• 1$^{\text{ère}}$ preuve, sans récurrence
Sans récurrence, on prouve que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_{2n+2} = u_{2n} \quad \text{et} \quad u_{2n+3} = u_{2n+1}$$

Pour cela, on fixe $n \in \mathbb{N}$, et on calcule u_{2n+2} en fonction de u_{2n+1} puis u_{2n+1} en fonction de u_{2n}, ce qui permet d'avoir u_{2n+2} en fonction de u_{2n}. Précisément

$$u_{2n+2} \;=\; \frac{u_{2n+1}}{u_{2n+1}-1} \;=\; \frac{\dfrac{u_{2n}}{u_{2n}-1}}{\dfrac{u_{2n}}{u_{2n}-1}-1} \overset{\text{WHY}}{=} u_{2n}$$

Une fois cela fait, on en déduit que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à u_0, qui vaut $\frac{1}{2}$.
On établit une formule analogue pour u_{2n+3} en fonction de u_{2n+1}. Et on en déduit que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à u_1, qui vaut $\dfrac{u_0}{u_0-1} = -1$.

• 2$^{\text{ème}}$ preuve
On commence par prouver par récurrence que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\; u_{2n} = \frac{1}{2}$$

Je vous laisse faire (dans l'hérédité, vous aurez à prouver que $u_{2n+2} = \frac{1}{2}$, donc vous aurez à exprimer u_{2n+2} en fonction de u_{2n} comme dans la première preuve).

Puis, on prouve, sans effort, que $\forall\, n \in \mathbb{N},\; u_{2n+1} = -1$ (donc sans récurrence). Et ceci grâce au fait que l'on vient de prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = \frac{1}{2}$. Allons-y. Fixons $n \in \mathbb{N}$.
On a

$$u_{2n+1} \;=\; \frac{u_{2n}}{u_{2n}-1} \;=\; \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1} \;=\; -1$$

• 3$^{\text{ème}}$ preuve **maladroite**
On prouve par récurrence que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_{2n} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = -1$$

1. C'est non !
   Contemplez
$$\sqrt{3}+(-1)\sqrt{3} \;=\; 0+0\sqrt{3}$$
2. C'est oui ! En admettant que $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel (ne s'écrit pas comme le quotient de deux entiers).
   Soit $u,v,u',v' \in \mathbb{Z}$.
   Supposons $u+v\sqrt{3}=u'+v'\sqrt{3}$.
   Alors $u-u'=(v'-v)\sqrt{3}$.
   Si $v'-v$ n'était pas nul, $\sqrt{3}$ s'écrirait comme le quotient de deux entiers. Ce qui est impossible par irrationnalité de $\sqrt{3}$.
   Ainsi $v'-v=0$.
   En reportant dans l'égalité précédente, on obtient $u-u'=0$.
   D'où $u=u'$ et $v=v'$.
   Bilan : on a donc bien montré que ... (recopier la question) ...
3. ▶ **Existence.**
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{H}_n$ l'assertion :
$$\mathcal{H}_n : « \,\exists\,(a_n,b_n)\in\mathbb{N}^2,\quad (2+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3} \quad \text{et} \quad (2-\sqrt{3})^n=a_n-b_n\sqrt{3}\, »$$
   Montrons que $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \mathcal{H}_n$ par récurrence.

   Initialisation. En posant $a_0=1$ et $b_0=0$, on a
$$(2+\sqrt{3})^0=a_0+b_0\sqrt{3} \quad \text{et} \quad (2-\sqrt{3})^0=a_0-b_0\sqrt{3}$$
   Hérédité. Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}_n$. Montrons $\mathcal{H}_{n+1}$. On a
$$(2+\sqrt{3})^{n+1}=(a_n+b_n\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=(2a_n+3b_n)+(a_n+2b_n)\sqrt{3}$$
   et
$$(2-\sqrt{3})^{n+1}=(a_n-b_n\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=(2a_n+3b_n)-(a_n+2b_n)\sqrt{3}$$
   Posons $a_{n+1}=2a_n+3b_n$ et $b_{n+1}=a_n+2b_n$. On a alors
$$(2+\sqrt{3})^{n+1}=a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad (2-\sqrt{3})^{n+1}=a_{n+1}-b_{n+1}\sqrt{3}$$
   D'où $\mathcal{H}_{n+1}$

   Bilan. On a montré l'existence.

   Pour la culture. L'existence peut également être assurée de manière explicite par la formule du binôme de Newton.
   On trouve
$$(2+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3} \quad \text{avec} \quad a_n=\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2j}2^{n-2j}3^j \qquad \text{et} \qquad b_n=\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2j+1}2^{n-2j-1}3^j$$
   On constate que a_n et b_n sont bien des entiers.
   Et la formule du binôme de Newton montre également $(2-\sqrt{3})^n=a_n-b_n\sqrt{3}$.

   ▶ **Unicité.** Soit $n\in\mathbb{N}$.
   Soit a_n, b_n tels que $(2+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3}$.
   Soit a'_n, b'_n tels que $(2+\sqrt{3})^n=a'_n+b'_n\sqrt{3}$.
   On a alors
$$a_n+b_n\sqrt{3} \;=\; a'_n+b'_n\sqrt{3}$$
   D'après la question 2, que l'on peut appliquer car a_n,b_n,a'_n,b'_n sont des entiers, on en déduit
$$a_n=a'_n \qquad \text{et} \qquad b_n=b'_n$$
   D'où l'unicité.
4. Montrons que $a_n^2-3b_n^2=1$.
   On a
$$a_n^2-3b_n^2 \;=\; (a_n+b_n\sqrt{3})(a_n-b_n\sqrt{3}) \;=\; (2+\sqrt{3})^n(2-\sqrt{3})^n \;=\; \Big((2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\Big)^n \;=\; 1^n \;=\; 1$$

5. On a

$$(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = 2a_n$$

D'où

$$(2+\sqrt{3})^n \;=\; 2a_n - (2-\sqrt{3})^n$$

Comme $2a_n \in \mathbb{N}$, on a par propriété de la partie entière :

$$\left\lfloor (2+\sqrt{3})^n \right\rfloor \;=\; 2a_n + \left\lfloor -(2-\sqrt{3})^n \right\rfloor$$

Or $2-\sqrt{3} \in]0,1[$, donc $(2-\sqrt{3})^n \in]0,1[$. Ainsi, $\lfloor -(2-\sqrt{3})^n \rfloor \;=\; -1$.
D'où

$$(2+\sqrt{3})^n \;=\; 2a_n - 1$$

122

Soit $\chi = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Montrons qu'il existe un unique couple $(\alpha, \beta) \in A \times B$ tel que $\chi = \alpha + \beta$.
Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Supposons qu'il existe $\alpha = (a_1, a_2) \in A$ et $\beta = (b_1, b_2) \in B$ tels que $\chi = \alpha + \beta$.

On a alors $\begin{cases} x &= a_1 + b_1 \\ y &= a_2 + b_2. \end{cases}$

De plus $\alpha \in A$ donc $a_1 + a_2 = 0$, c'est-à-dire $a_2 = -a_1$ et $\beta \in B$ donc $b_1 = b_2$.

On en déduit $\begin{cases} x &= a_1 + b_1 \\ y &= -a_1 + b_1 \end{cases}$

et ainsi $\begin{cases} a_1 &= \dfrac{x-y}{2} \\ b_1 &= \dfrac{x+y}{2}. \end{cases}$

Finalement $\alpha = \left(\dfrac{x-y}{2}, \dfrac{y-x}{2}\right)$ et $\beta = \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}\right)$.

Synthèse. Posons $\alpha = \left(\dfrac{x-y}{2}, \dfrac{y-x}{2}\right)$ et $\beta = \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}\right)$. On a alors :

- $\dfrac{x-y}{2} + \dfrac{y-x}{2} = 0$ donc $\alpha \in A$;
- les deux composantes de β sont égales donc $\beta \in B$;
- $\alpha + \beta = (x, y) = \chi$.

La synthèse prouve que χ s'écrit comme la somme d'un élément de A et d'un élément de B.
L'analyse prouve que cette écriture est unique.

1. Supposons ($A \subset C$ et $B \subset D$).
   Montrons $A \cup B \ \subset \ C \cup D$.

   Soit $x \in A \cup B$.

   On a donc $x \in A$ ou $x \in B$.

   Cas $x \in A$. Par hypothèse $A \subset C$. Et on a toujours $C \subset C \cup D$. Donc $A \subset C \cup D$.
   Comme $x \in A$, on en déduit $x \in C \cup D$.

   Cas $x \in B$. Ce cas est totalement similaire (à vous).
   Il suffit d'échanger les rôles joués par A, B d'une part, et C, D d'autre part.

   Dans tous les cas, on a $x \in C \cup D$.

2. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $B \subset C$.

   — Montrons $A \cup B \ \subset \ A \cup C$.
   On utilise la question précédente avec les inclusions $A \subset A$ et $B \subset C$.
   On en déduit $A \cup B \ \subset \ A \cup C$.

   — Montrons $A \cap B \subset A \cap C$.
   Soit $x \in A \cap B$.

   - On a $x \in A$.
   - On a $x \in B$. Or $B \subset C$ par hypothèse. Donc $x \in C$.

   Ainsi, $x \in A \cap C$.

   $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $A \cup B \subset A \cup C$ $(*)$ et $A \cap B \subset A \cap C$ $(**)$.
   Montrons $B \subset C$.
   Soit $x \in B$.
   On a $B \subset A \cup B$ (toujours) et $A \cup B \subset A \cup C$ (hypothèse $*$), donc $B \subset A \cup C$.
   Ainsi x, qui est dans B, appartient à $A \cup C$.

   - Cas $x \in A$.
     Comme $x \in B$, et $x \in A$ dans ce cas, on a $x \in A \cap B$.
     D'après l'hypothèse $(**)$, on obtient $x \in A \cap C$.
     A fortiori, $x \in C$.
   - Cas $x \in C$.
     Dans ce cas, on a $x \in C$.

   Dans les deux cas, on a $x \in C$.

3. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $A \subset B$.
   Montrons l'assertion de droite.
   Soit $X \in \mathscr{P}(E)$.
   Comme $A \subset B$, l'implication directe de la question 2 (avec des notations adaptées !) permet d'obtenir $A \cap X \subset B \cap X$.

   $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\forall X \in \mathscr{P}(E),\ A \cap X \subset B \cap X$.
   En particulier, pour $X = E \in \mathscr{P}(E)$, on obtient $A \cap E \subset B \cap E$.
   D'où $A \subset B$.

Supposons que $A \setminus B = C$.
Montrons l'égalité d'ensembles $A \cup B = B \cup C$.
1$^{\text{ère}}$ preuve : par double inclusion

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in A \cup B$. Montrons que $x \in B \cup C$.

Procédons par disjonction de cas : $x \in B$ ou sinon $x \notin B$.

- Cas $x \in B$. Comme $B \subset B \cup C$ (toujours), on a $x \in B \cup C$.
- Cas $x \notin B$. Comme $x \in A \cup B$ par hypothèse, on a alors dans ce cas $x \in A$.
  On a donc $x \in A \setminus B$. Or par hypothèse $A \setminus B = C$.
  Donc $x \in C$.
  A fortiori, $x \in B \cup C$.

$\boxed{\supset}$ Montrons $B \cup C \subset A \cup B$.

D'après l'implication $\Rightarrow$ de la question 2 (avec des notations adaptées), il suffit de montrer l'inclusion $C \subset A$.

On a toujours $(A \setminus B) \subset A$. Or par hypothèse, $A \setminus B = C$, d'où $C \subset A$.

2$^{\text{ème}}$ preuve : par égalité ensembliste
Montrons que $A \cup B$ est égal à $(A \setminus B) \cup B$.
On a :

$$\begin{array}{rcll}
(A \setminus B) \cup B & = & (A \cap \overline{B}) \cup B & \text{d'après le cours} \\
 & = & (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B) & \text{par distributivité de l'union par rapport à l'intersection} \\
 & = & (A \cup B) \cap E & \\
 & = & A \cup B. &
\end{array}$$

Or, par hypothèse, $A \setminus B = C$ d'où

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup B = C \cup B = B \cup C$$

125

Montrons (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons (i) $A \cup B = \Omega$.
Montrons l'assertion (ii).

Soit $X \in \mathcal{P}(\Omega)$ telle que $X \cap A = \varnothing$.
Montrons que $X \subset B$.

Soit $x \in X$.
A fortiori, $x \in \Omega$.
D'après (i), on a donc $x \in A$ ou $x \in B$.
Or $X \cap A = \varnothing$ donc le premier cas est impossible et on est dans le deuxième cas.
D'où $x \in B$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons (ii).
Montrons que $A \cup B = \Omega$.
Procédons par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Comme A et B sont deux parties de Ω, on a bien sûr, $A \cup B \subset \Omega$.

$\boxed{\supset}$ Montrons $\Omega \subset A \cup B$.
Soit $x \in \Omega$. Montrons que $x \in A \cup B$.
Distinguons deux cas.

— Cas $x \in A$. Dans ce cas, on a $x \in A \cup B$.
— Cas $x \notin A$. Posons $X = \{x\}$. Comme $x \notin A$, on a donc $X \cap A = \varnothing$.
  On peut donc appliquer l'hypothèse (ii) avec ce X.
  On obtient $X \subset B$.
  Comme par définition $x \in X$, on a $x \in B$.
  A fortiori, $x \in A \cup B$.

Dans les deux cas, on a $x \in A \cup B$.

$\boxed{\supset}$ **Autre preuve (dangereuse pour un élève, mais elle fonctionne !).** Vous remarquerez qu'il n'y a pas d'éléments dans cette preuve que de la manipulation d'ensembles.

Appliquons l'hypothèse (ii) avec la partie $X = \Omega \setminus A$ qui vérifie bien $X \cap A = \varnothing$.
On en déduit $X \subset B$, c'est-à-dire $(\Omega \setminus A) \subset B$.
En prenant l'union avec A de cette inclusion, on obtient :

$$A \cup (\Omega \setminus A) \ \subset \ A \cup B$$

Or $A \cup (\Omega \setminus A) = \Omega$ donc $\Omega \subset A \cup B$.

Bilan. On a donc montré que les assertions (i) et (ii) sont équivalentes.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = E$.
Montrons $E = (B \setminus A) \cup (A \setminus B)$.
Procédons par double inclusion.
L'inclusion $\supset$ est évidente.
Montrons l'autre inclusion $\subset$.
Soit $x \in E$. Puisque $E = A \cup B$ par hypothèse, on peut distinguer deux cas :

$$x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B$$

Puisque $A \cap B = \varnothing$, ce « ou » est exclusif, donc

$$x \in A \setminus B \quad \text{ou} \quad x \in B \setminus A$$

D'où $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $E = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
Montrons successsivement $A \cup B = E$ et $A \cap B = \varnothing$.

— On a tout d'abord $(A \setminus B) \subset A$ et $(B \setminus A) \subset B$. Ainsi (reprendre la question 1 de l'exercice 123).
$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subset A \cup B.$$
Or, par hypothèse $E = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, d'où $E \subset A \cup B$.
L'autre inclusion $E \supset A \cup B$ étant évidente, on obtient l'égalité $A \cup B = E$.

— Montrons $A \cap B = \varnothing$.
Raisonnons par l'absurde en supposant que $A \cap B$ n'est pas vide.
Il existe alors $x \in A \cap B$. Autrement dit, on a $x \in E$ et
$$x \in A \quad \text{et} \quad x \in B$$
On en déduit que
$$x \notin A \setminus B \quad \text{et} \quad x \notin B \setminus A$$
D'où $x \notin (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
Or $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = E$ par hypothèse.
D'où $x \notin E$, d'où l'absurdité !

1. Soit $x \in A \boxplus B$.
   Alors x est de la forme $a+b$ avec $a \in A$ et $b \in B$.
   Dans ce cas particulier, on a donc $a = 0$ ou 1 et $b = 1$ ou 4.
   Donc $x = a+b = 1, 4, 2$ ou 5.
   Ainsi,
$$A \boxplus B = \{1, 2, 4, 5\}.$$

2. Soient $A_1, A_2, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.
   Inclusion réciproque.
   Soit $x \in (A_1 \cup A_2) \boxplus B$.
   Alors, il existe $a \in A_1 \cup A_2$ et $b \in B$ tels que $x = a+b$.
   Donc $a \in A_1$ ou $a \in A_2$.
   — Si $a \in A_1$, alors $x \in A_1 \boxplus B$.
   — Si $a \in A_2$, alors $x \in A_2 \boxplus B$.
   Donc $x \in (A_1 \boxplus B) \cup (A_2 \boxplus B)$.
   Inclusion directe.
   Soit $x \in (A_1 \boxplus B) \cup (A_2 \boxplus B)$.
   Alors $x \in A_1 \boxplus B$ ou $x \in A_2 \boxplus B$.
   Distinguons ces deux cas.
   — Si $x \in A_1 \boxplus B$, alors on peut écrire $x = a_1 + b$, où $a_1 \in A_1$ et $b \in B$.
     En particulier, on a $a_1 \in A_1 \cup A_2$.
     Donc $x \in (A_1 \cup A_2) \boxplus B$.
   — Si $x \in A_2 \boxplus B$, on procède de même.
   Ainsi, dans chacun des cas, $x \in (A_1 \cup A_2) \boxplus B$.
   Bilan. On a montré que :
$$(A_1 \boxplus B) \cup (A_2 \boxplus B) = (A_1 \cup A_2) \boxplus B$$

3. (a) Soient $A_1, A_2, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.
   Soit $x \in (A_1 \cap A_2) \boxplus B$.
   Alors, il existe $a \in A_1 \cap A_2$ et $b \in B$ tels que $x = a+b$.
   Comme $a \in A_1$, on a $x \in A_1 \boxplus B$ et comme $x \in A_2$, on a $x \in A_2 \boxplus B$.
   Donc $x \in (A_1 \boxplus B) \cap (A_2 \boxplus B)$.
   Bilan :
$$(A_1 \cap A_2) \boxplus B \subset (A_1 \boxplus B) \cap (A_2 \boxplus B)$$
   (b) La réponse est non : exhibons un contre-exemple.
   En prenant $A_1 = \{0, 1\}$, $A_2 = \{1, 3\}$, et $B = \{1, 4\}$, on a :
   — $A_1 \cap A_2 = \{1\}$ d'où $(A_1 \cap A_2) \boxplus B = \{2, 5\}$.
   — $A_1 \boxplus B = \{1, 2, 4, 5\}$ et $A_2 \boxplus B = \{2, 4, 5, 7\}$ d'où $(A_1 \boxplus B) \cap (A_2 \boxplus B) = \{2, 4, 5\}$.
   Donc $(A_1 \cap A_2) \boxplus B \neq (A_1 \boxplus B) \cap (A_2 \boxplus B)$.
   Ainsi, il n'y a pas égalité (dans le cas général) entre les ensembles $(A_1 \cap A_2) \boxplus B$ et $(A_1 \boxplus B) \cap (A_2 \boxplus B)$.

1. Calculons les premières valeurs de $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
$F_1 + F_2 + \cdots + F_n$	1	2	4	7	12	20	33	54	88	143

Il semble donc naturel de conjecturer que $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$.
Pour $n \geqslant 1$, notons $P(n)$ l'assertion « $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$ ».
Nous allons montrer $\forall\, n \geqslant 2,\ P(n)$ par récurrence simple.

Initialisation. On a $F_1 = 1$ et $F_3 - 1 = 2 - 1 = 1$, ce qui prouve $P(1)$.

Hérédité. Soit $n \geqslant 1$ tel que $P(n)$. On a alors :

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 + \cdots + F_n + F_{n+1} &= (F_1 + F_2 + \cdots + F_n) + F_{n+1} \\ &= (F_{n+2} - 1) + F_{n+1} && \text{d'après } P(n) \\ &= F_{n+1} + F_{n+2} - 1 \\ &= F_{n+3} - 1 \end{aligned}$$

La dernière égalité ayant lieu d'après la définition des nombres de Fibonacci. Ceci prouve $P(n+1)$, et conclut la récurrence.

2. Pour $n \geqslant 1$, on note $P(n)$ l'assertion « n peut s'écrire comme une somme de nombres de Fibonacci non consécutifs ».
Montrons $\forall\, n \geqslant 1, P(n)$ par récurrence forte.

Initialisation. On a $1 = F_1$, ce qui démontre $P(1)$.

Hérédité. Soit $n \geqslant 1$ tel que $P(m)$ soit vraie pour tous les $1 \leqslant m \leqslant n$. Démontrons $P(n+1)$.
Il ne fait guère de doute qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $F_{p_0} > n+1$ (une récurrence double montre par exemple que l'on a $F_p \geqslant p - 1$ pour tout p).
De plus, une récurrence simple montre que la suite $(F_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante, de sorte que

$$\forall\, p \geqslant p_0,\ F_p > n+1$$

Par ailleurs, il existe des indices k tels que $F_k \leqslant n+1$ (par exemple $k = 1$, car $n+1 \geqslant 2$).
Tout ceci nous autorise donc à considérer k le plus grand des indices tels que $F_k \leqslant n+1$ (après les chapitres sur les suites et sur l'ensemble $\mathbb{N}$, on formalisera plus économiquement les arguments qui précèdent, en se servant de la propriété suivante : *toute partie finie non vide de* $\mathbb{N}$ *admet un plus grand élément*).

— Si $F_k = n+1$, alors $n+1$ est lui-même un nombre de Fibonacci, d'où $P(n+1)$.

— Si $F_k < n+1$, posons $m = n + 1 - F_k$.
Il s'agit d'un entier vérifiant $1 \leqslant m \leqslant n$ donc, d'après $P(m)$, il peut s'écrire comme une somme $F_{i_1} + F_{i_2} + \cdots + F_{i_r}$, avec $i_{s+1} > i_s + 1$ pour tout $s \in [\![1, r-1]\!]$.
On obtient ainsi une écriture de $n+1$ comme somme de nombres de Fibonacci :

$$n + 1 = F_{i_1} + F_{i_2} + \cdots + F_{i_r} + F_k, \tag{✠}$$

dont il s'agit de montrer qu'elle ne contient pas deux nombres de Fibonacci consécutifs.
Déjà, on a $F_{i_r} \leqslant n+1$, donc la définition de k montre que $k \geqslant i_r$.
Montrons que $k > i_r + 1$ en montrant que les cas $k = i_r$ et $k = i_r + 1$ ne peuvent pas arriver.

— Si $k = i_r$, on a
$$n+1 \ \geqslant\ 2\,F_{i_r} \ \geqslant\ F_{i_r} + F_{i_r-1} = F_{i_r+1},$$
ce qui démontre que $k \geqslant i_r + 1$ et constitue une contradiction.

— Si $k = i_r + 1$, on a
$$n+1 \ \geqslant\ F_{i_r} + F_{i_r+1} = F_{i_r+2},$$
ce qui démontre que $k \geqslant i_r + 2$ et constitue une contradiction.

Ainsi, (✠) exprime bien $n+1$ comme une somme de nombres de Fibonacci non consécutifs, ce qui prouve $P(n+1)$ et conclut la récurrence.