

Trigonométrie

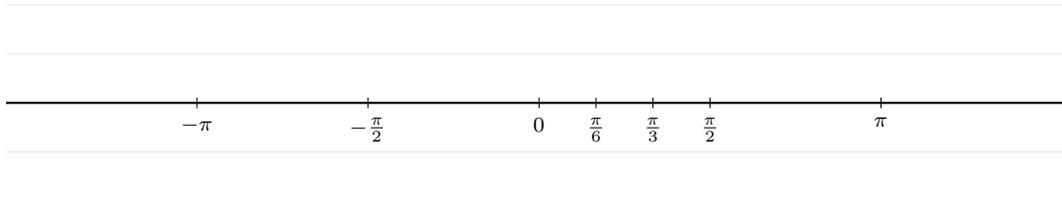
exercices



Trigonométrie

Dessignons !

101 Des sinusoïdes _____
Tracer la fonction sinus ci-dessous



Et le dessin de la fonction cosinus ?

102 Tangente et arctangente! _____ mardi, en classe
Tracer le graphe de la fonction tangente.
Sur un autre dessin, tracer le graphe de la fonction tangente restreinte à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, puis symétriser par rapport à la droite d'équation $y = x$ cette courbe (faire un troisième dessin).

Équations

103 Quatre points _____
Résoudre l'équation $\cos(3x) = \cos(x)$.

104 Quatre points _____
Résoudre l'équation $\sin \theta = \sin 2\theta$.

105 Trois points _____
Résoudre l'équation $\sin \theta = \cos 2\theta$.

106 Deux points _____
Résoudre l'équation $\sin \theta = \sqrt{3} \cos \theta$.

Et ramener à une équation du type $\tan \theta = \dots$

107 Des équations _____
Résoudre sur \mathbb{R} les équations suivantes

- (i) $4 \sin^2 x - 2(1 + \sqrt{3}) \sin x + \sqrt{3} = 0$
- (ii) $\sqrt{3} \cos x - \sin x = -\sqrt{3}$
- (iii) $2 \sin x \tan x + 4 \cos x = 5$
- (iv) $\cos(5x) - \cos x = \sin(3x)$

D'égaler deux ; Dépassage ; Chasser les dénominateurs ; $\cos y - \cos x = \dots$

Inéquations

108 Une inéquation (0) _____
Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $\sin^2 \theta \leq \frac{1}{2}$.

109 Une inéquation (1) _____
Résoudre dans $]-\pi, \pi[$ l'inéquation $\tan x \geq 2 \sin x$.

110 Une inéquation (2) _____
Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'inéquation $\sin(3x) \geq \sin(2x) + \sin(x)$.

Autres formules (tangente)

111 Formule de l'angle moitié

1. Donner l'ensemble de définition \mathcal{D} de la fonction $x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.
2. Soit $x \in \mathcal{D}$. On pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Montrer que

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

3. En déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
4. Que pensez-vous de l'ensemble suivant

$$\left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists t \in \mathbb{R}, a = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ et } b = \frac{2t}{1+t^2} \right\} \text{ qui s'écrit aussi } \left\{ \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right) \right\}_{t \in \mathbb{R}}$$

Manipulation des formules

112 Expression avec radicaux

Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ de deux manières à l'aide des relations $\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.

113 L'angle π divisé par 2, puis redivisé par 2, puis ... vendredi 23

Montrer que

$$\forall n \geq 2, \quad 2 \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots + \sqrt{2}}}}$$

où la formule comporte $n - 1$ radicaux.

En déduire une formule analogue pour $2 \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.

114 Une étude de fonction vendredi 23

Soit $f : x \mapsto \sin(x) \sin(2x)$ définie sur \mathbb{R} .

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $f(x)$ comme polynôme en $\cos(x)$.
2. Étudier les variations de f sur $[0, \pi]$.
3. En déduire que f admet un maximum et un minimum sur \mathbb{R} et les déterminer.

Avec des suites

115 Une inégalité, par récurrence ? mardi 20

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |\sin(nx)| \leq n |\sin x|$$

116 Un produit de cosinus vendredi 23

Soit $\theta \in]0, \pi[$.

Soit u la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$$

1. Montrer que la suite u converge.
2. A l'aide de la formule de duplication du sinus, simplifier u_n .
En déduire la limite de u .

117**Une belle somme** _____ mardi 20

Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) = \frac{1}{2^n \sqrt{3}} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

118**Cette formule est fausse!** _____Un élève propose la formule (fausse) suivante ~~$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$~~ .

Trouver un argument pour lui dire qu'il ne peut pas avoir raison!

Trigonométrie

corrigés

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a les équivalences :

$$\begin{aligned}\cos(3x) = \cos(x) &\iff 3x \equiv x [2\pi] \quad \text{ou} \quad 3x \equiv -x [2\pi] \\ &\iff 2x \equiv 0 [2\pi] \quad \text{ou} \quad 4x \equiv 0 [2\pi] \\ &\iff x \equiv 0 [\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv 0 \left[\frac{\pi}{2}\right]\end{aligned}$$

Finalement, la deuxième condition englobant la première, on déduit que x est solution si et seulement si $x \equiv 0 \left[\frac{\pi}{2}\right]$.

L'ensemble des solutions est donc

$$\left\{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Comme cela correspond à 4 points sur le cercle trigonométrique, on peut écrire l'ensemble solution sous la forme :

$$\left\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

L'équation est définie sur \mathbb{R} .

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\sin \theta = \sin 2\theta &\iff \theta \equiv 2\theta [2\pi] \quad \text{ou} \quad \theta \equiv \pi - 2\theta [2\pi] \\ &\iff -\theta \equiv 0 [2\pi] \quad \text{ou} \quad 3\theta \equiv \pi [2\pi] \\ &\iff \theta \equiv 0 [2\pi] \quad \text{ou} \quad \theta \equiv \frac{\pi}{3} \left[\frac{2\pi}{3} \right]\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est :

$$S = \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Cela correspond à 4 points sur le cercle trigonométrique.

L'équation est définie sur \mathbb{R} .

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

On a les équivalences :

$$\sin(\theta) = \cos(2\theta) \iff \sin \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta \iff 2 \sin^2 \theta + \sin \theta - 1 = 0$$

L'équation $2x^2 + x - 1 = 0$ ayant comme racines réelles -1 et $\frac{1}{2}$, on a :

$$\sin(\theta) = \cos(2\theta) \iff \sin \theta \in \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$$

Cela correspond à 3 points sur le cercle trigonométrique, et l'on obtient comme ensemble solution :

$$\left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

L'équation est définie sur \mathbb{R} .

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

- Si $\theta \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$, alors $\sin \theta = \pm 1$ et $\cos \theta = 0$.
Un tel θ n'est donc pas solution de l'équation.
- Supposons $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$. Alors on a $\cos \theta \neq 0$ et donc :

$$\sin \theta = \sqrt{3} \cos \theta \iff \tan \theta = \sqrt{3}$$

Puisque $\sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3}$, l'ensemble des solutions de est

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

- (i) Le discriminant du polynôme $4X^2 - 2(1 + \sqrt{3})X + \sqrt{3}$ vaut $4(1 - \sqrt{3})^2$. Il possède donc deux racines qui sont $\frac{1}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

On a donc, pour $x \in \mathbb{R}$, les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} 4 \sin^2 x - 2(1 + \sqrt{3}) \sin x + \sqrt{3} = 0 &\iff \sin x = \frac{1}{2} \text{ ou } \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\iff \begin{cases} x \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] \\ x \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi] \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \\ x \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

- (ii) Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \cos x - \sin x = -\sqrt{3} &\iff \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ &\iff \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \\ &\iff \begin{cases} \frac{\pi}{6} + x \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi] \\ \frac{\pi}{6} + x \equiv -\frac{5\pi}{6} [2\pi] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi] \\ x \equiv -\pi [2\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

- (iii) L'équation est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$.

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} 2 \sin x \tan x + 4 \cos x = 5 &\iff 2 \sin^2 x + 4 \cos^2 x = 5 \cos x \\ &\iff 2(1 - \cos^2 x) + 4 \cos^2 x = 5 \cos x \\ &\iff 2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 = 0 \end{aligned}$$

L'équation $2y^2 - 5y + 2 = 0$ a pour solution 2 et $\frac{1}{2}$.

D'où :

$$\begin{aligned} 2 \sin x \tan x + 4 \cos x = 5 &\iff \cos x = 2 \text{ ou } \cos x = \frac{1}{2} \\ &\iff \cos x = \frac{1}{2} \\ &\iff x \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi] \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

- (iv) Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant la formule de factorisation, le théorème de la classe de 3^{ème}, on obtient les équivalences :

$$\begin{aligned} \cos 5x - \cos x = \sin 3x &\iff \sin(3x) [1 + 2 \sin(2x)] = 0 \\ &\iff \sin(3x) = 0 \text{ ou } \sin(2x) = -\frac{1}{2} \\ &\iff x \equiv 0 \left[\frac{\pi}{3}\right] \text{ ou } \begin{cases} 2x \equiv -\frac{\pi}{6} [2\pi] \\ 2x \equiv -\frac{5\pi}{6} [2\pi] \end{cases} \\ &\iff x \equiv 0 \left[\frac{\pi}{3}\right] \text{ ou } \begin{cases} x \equiv -\frac{\pi}{12} [\pi] \\ x \equiv -\frac{5\pi}{12} [\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\left\{\frac{\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Le premier ensemble correspond à 6 points sur le cercle, les deuxième et troisième ensembles fournissent chacun 2 points, soit au total 10 points.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence :

$$\sin^2 \theta \leq \frac{1}{2} \iff \sin \theta \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right].$$

Sur le cercle trigonométrique, cet encadrement de $\sin \theta$ correspond à deux arcs de cercles, indiqués en gras sur le dessin ci-contre.

L'ensemble des solutions est :

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \right].$$

Soit $x \in [0, 2\pi]$. Posons $A(x) = \sin(3x) - \sin(2x) - \sin(x)$.

En factorisant $\sin(3x) - \sin(x)$ et utilisant la formule de duplication du sinus, on a :

$$\begin{aligned} A(x) &= 2 \sin(x) \cos(2x) - 2 \sin x \cos x \\ &= 2 \sin x (\cos(2x) - \cos x) \\ &= 2 \sin x \left(-2 \sin\left(\frac{3x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right) && \text{(factorisation du cosinus)} \\ &= -4 \sin\left(\frac{3x}{2}\right) \sin(x) \sin\left(\frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

Comme la fonction sinus

- est strictement positive sur $]0, \pi[$ et $]2\pi, 3\pi[$,
- est strictement négative sur $]\pi, 2\pi[$,
- s'annule en tout point de $\pi\mathbb{Z}$,

on obtient le tableau de signes :

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	2π
$\sin\left(\frac{3x}{2}\right)$	0	+	0	-	0
$\sin x$	0	+	+	0	-
$\sin\left(\frac{x}{2}\right)$	0	+	+	+	0
$A(x)$	0	-	0	+	0

On en déduit que $A(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in \{0\} \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc

$$\{0\} \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) \text{ existe} \iff \frac{x}{2} \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \iff x \not\equiv \pi \pmod{2\pi}$$

Donc l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ est

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}](2k-1)\pi, (2k+1)\pi[$$

2. Avec les formules d'addition, on obtient :

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$

En appliquant cette formule à $a = \frac{x}{2}$, on obtient

$$\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

• Soit $x \in \mathcal{D}$. Montrons que $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ où $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

Partons du membre droit.

On a

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} \stackrel{\text{WHY}}{=} \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\cos x}{1} = \cos x$$

• Pour la formule avec le sinus, partons également du membre droit :

$$\frac{2t}{1+t^2} = 2 \frac{\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}{1 + \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = 2 \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sin x$$

• Pour la formule avec la tangente, utilisons les deux formules précédentes.

On obtient

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{2t}{1-t^2}$$

On peut aussi utiliser la formule d'addition

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

avec $a = b = \frac{x}{2}$, ce qui donne le résultat directement.

3. Notons $T = \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ qui s'écrit $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ avec $x = \frac{\pi}{4}$.

Utilisons la dernière formule avec cette valeur de x .

On obtient

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2T}{1-T^2}$$

Comme $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, on obtient $1 - T^2 = 2T$.

Après calcul du discriminant du polynôme du second degré $X^2 + 2X - 1$, on obtient

$$T = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

Comme $T \geq 0$ (WHY), on obtient $T = -1 + \sqrt{2}$, c'est-à-dire

$$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = -1 + \sqrt{2}$$

ce qui peut encore s'écrit $\sqrt{2} - 1 = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\sin x \sin(2x) &= \sin x \times 2 \sin x \cos x \\ &= 2 \sin^2 x \cos x \\ &= 2(1 - \cos^2 x) \cos x \\ &= 2 \cos x - 2 \cos^3 x\end{aligned}$$

2. La fonction f est dérivable sur $[0, \pi]$, même sur \mathbb{R} , et on a

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= -2 \sin x - 2 \times 3(-\sin x) \cos^2 x \\ &= 2 \sin x (3 \cos^2 x - 1) \\ &= 6 \sin x \left(\cos x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(\cos x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

Appelons θ l'unique réel de $[0, \pi]$ tel que $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

x	0	θ	$\pi - \theta$	π
$\sin x$	0	+	+	0
$\cos x - \frac{1}{\sqrt{3}}$		+	0	-
$\cos x + \frac{1}{\sqrt{3}}$		+	+	0
$f'(x)$	0	+	0	-
f	0			0

Calculons $f(\theta)$, sachant que $\cos^2 \theta = \frac{1}{3}$.

On a

$$\begin{aligned}f(\theta) &= 2(1 - \cos^2 \theta) \cos \theta \\ &= 2\left(1 - \frac{1}{3}\right) \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{4}{3\sqrt{3}}\end{aligned}$$

On calcule de même $f(\pi - \theta)$, ou bien on remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(\pi - x) = \sin(\pi - x) \sin(2\pi - 2x) = \sin x \sin(-2x) = -f(x)$$

Ainsi $f(\pi - \theta) = -\frac{4}{3\sqrt{3}}$.

3. Comme f est 2π -périodique, étudier f sur \mathbb{R} revient à l'étudier sur $[-\pi, \pi]$.

Comme f est paire, on peut restreindre l'intervalle à $[0, \pi]$.

Ainsi, f admet un maximum sur \mathbb{R} qui vaut $\frac{4}{3\sqrt{3}}$ et est atteint en tous les réels de la forme $\theta + 2k\pi$ ou $-\theta + 2k\pi$.

De la même façon, f admet un minimum sur \mathbb{R} qui vaut $-\frac{4}{3\sqrt{3}}$ et est atteint en tous les réels de la forme $\pi - \theta + 2k\pi$ ou $\theta - \pi + 2k\pi$.

1. — Montrons que la suite u est minorée par 0.

Par récurrence immédiate sur k , on a (ne pas oublier que $\theta \in]0, \pi[$, utile pour l'initialisation) :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\theta}{2^k} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

On en déduit que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) > 0$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $u_n \geq 0$.

Le réel u_n est un produit de n termes (même strictement) positifs donc $u_n \geq 0$.

- Montrons que la suite u est décroissante (on pourrait même montrer qu'elle l'est strictement).

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$$

Comme $\frac{\theta}{2^{n+1}} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on en déduit que $\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) \leq 1$ (même < 1). D'où $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, puis $u_{n+1} \leq u_n$ (car u_n est positif).

La suite u est donc (strictement) décroissante.

D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que la suite u converge.

2. En appliquant la formule de $\sin(2x)$ avec $x = \frac{\theta}{2^k}$, on obtient :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sin\left(\frac{\theta}{2^{k-1}}\right) = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2^k}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$$

Comme $\sin\left(\frac{\theta}{2^k}\right) \neq 0$ (WHY?), on en déduit que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2^{k-1}}\right)}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2^k}\right)}$$

Par produit puis télescopie, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^n \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2^{k-1}}\right)}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2^k}\right)} = \frac{1}{2^n} \frac{\sin \theta}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$$

Déterminons la limite de u_n .

$$\text{On a } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\theta}{2^n} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \end{cases} \quad \text{donc par composition de limites, on obtient } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{\frac{\theta}{2^n}} = 1.$$

Donc par passage à l'inverse, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\theta}{2^n}}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} = 1$.

Or

$$u_n = \frac{1}{2^n} \frac{\sin \theta}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} = \sin \theta \times \frac{1}{2^n} \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} = \frac{\sin \theta}{\theta} \times \frac{\theta}{2^n} \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$$

Par produit de limites, on obtient que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\sin \theta}{\theta}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons \mathcal{H}_n la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \left\langle \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) = \frac{1}{2^n \sqrt{3}} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \right\rangle$$

— Initialisation. La propriété \mathcal{H}_1 s'écrit

$$\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

ce qui est vrai car les deux membres valent $\frac{1}{4}$.

— Hérité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que \mathcal{H}_n est vraie.

Montrons \mathcal{H}_{n+1} .

On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^k} \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) + \frac{1}{2^{n+1}} \cos\left(\frac{(n+1)\pi}{3}\right) \\ &\stackrel{\mathcal{H}_n}{=} \frac{1}{2^n \sqrt{3}} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{1}{2^{n+1}} \cos\left(\frac{(n+1)\pi}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2^{n+1} \sqrt{3}} \left(2 \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \cos\left(\frac{(n+1)\pi}{3}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2^{n+1} \sqrt{3}} \left(2 \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] \right) \\ &= \frac{1}{2^{n+1} \sqrt{3}} \left(2 \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \frac{1}{2} - \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \right) \\ &= \frac{1}{2^{n+1} \sqrt{3}} \left(\underbrace{\left(2 - \frac{3}{2}\right)}_{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2^{n+1} \sqrt{3}} \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Ainsi \mathcal{H}_{n+1} est vraie.

Bilan. On a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathcal{H}_n \text{ est vraie}$$

c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) = \frac{1}{2^n \sqrt{3}} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

On peut penser à la chose suivante. Le membre gauche fait sortir un signe $-$ si l'on réalise $p \mapsto -p$ et $q \mapsto -q$.

Le membre droit doit donc aussi faire apparaître un signe $-$ en faisant ces deux changements.

Et « hélas », c'est bien le cas !

Une meilleure idée m'a été soufflée par Jean-Baptiste Fournier (2022-2023, promo 2024). Il me dit qu'il suffit de prendre $p = q$.

Le membre gauche fournit $2 \sin p$ et le membre droit est nul car égal à $2 \sin 0 \cos p$.