Calculs algébriques

I. Symboles $\sum$ et $\prod$

Définitions

- Étant donné des nombres réels $a_1, \dots, a_n$, il arrive fréquemment que l'on ait besoin de considérer leur somme et/ou leur produit. Une première possibilité est d'utiliser des points de suspension :
  - $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ pour désigner la somme des n nombres $a_1, a_2, \dots, a_n$;
  - $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$ pour désigner le produit des n nombres $a_1, a_2, \dots, a_n$.
- Dans les notations ci-dessus, il faut bien comprendre que si n vaut 1, alors la somme et le produit considérés valent simplement a_1 (l'écriture du terme a_2 avant les points de suspension ne sert qu'à bien expliciter la liste utilisée).
  Pour pallier cet inconvénient et éviter toute ambiguïté, nous introduisons les notations suivantes :
  - $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ pour désigner la somme de ces n nombres ;
  - $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k$ pour désigner le produit de ces n nombres.
- Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ termes}} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} x$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *factorielle* n, et l'on note $n!$, le nombre entier :

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n = \prod_{k=1}^{n} k.$$

  On a ainsi

$$1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120, \quad 6! = 720, \quad 7! = 5040, \quad 8! = 40\,320, \quad 9! = 362\,880.$$

- Plus généralement, si p et q sont deux entiers vérifiant $p \leqslant q$, et si l'on dispose de $q - p + 1$ nombres réels numérotés de p à q, disons $a_p, \dots, a_q$, on note :
  - leur somme est notée $a_p + \cdots + a_q$, ou $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} a_k$;
  - leur produit $a_p \times \cdots \times a_q$, ou $\displaystyle\prod_{k=p}^{q} a_k$
- On utilise indifféremment les notations suivantes :

$$\sum_{k=p}^{q} a_k, \quad \sum_{k \in [\![p,q]\!]} a_k, \quad \sum_{p \leqslant k \leqslant q} a_k, \qquad\qquad \prod_{k=p}^{q} a_k, \quad \prod_{k \in [\![p,q]\!]} a_k, \quad \prod_{p \leqslant k \leqslant q} a_k.$$

Cas d'une famille finie quelconque

- On étend les notions introduites ci-dessus au cas de n'importe quelle famille $(a_k)_{k \in I}$, où l'ensemble d'indexation I est *fini* et *non vide* :
  - $\displaystyle\sum_{k \in I} a_k$ désigne la somme de tous les termes de la famille ;
  - $\displaystyle\prod_{k \in I} a_k$ désigne le produit de tous les termes de la famille.
- La somme des termes de la famille $(k^2)_{k \in [\![-3,2]\!]}$ vaut :

$$\sum_{k \in [\![-3,2]\!]} k^2 \;=\; (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 \;=\; 19.$$

  On voit dans cet exemple que les termes d'une famille ne sont pas nécessairement deux à deux distincts. Une valeur peut donc être comptée plusieurs fois dans une somme.

- Lorsque tous les termes de la famille $(a_k)_{k\in I}$ sont **égaux**, les calculs de $\sum_{k\in I} a_k$ et $\prod_{k\in I} a_k$ sont immédiats. En effet, en notant alors n le nombre de termes de la famille (*i.e.* le nombre d'éléments de I), et α leur valeur commune, on a :

$$\sum_{k\in I} a_k = \underbrace{\alpha+\cdots+\alpha}_{n\text{ termes}} = n\alpha \quad \text{et} \quad \prod_{k\in I} a_k = \underbrace{\alpha\times\cdots\times\alpha}_{n\text{ termes}} = \alpha^n.$$

- Chers Pistons 3, que vaut $\prod_{k=0}^{m} 3$?

  Et $\sum_{k=0}^{m} 3$?

Somme vide, produit vide

- On étend les notions de somme et produit au cas où l'ensemble d'indexation est vide, en convenant qu'une somme vide vaut 0 et qu'un produit vide vaut 1 :

$$\sum_{k\in\varnothing} a_k = 0 \quad \text{et} \quad \prod_{k\in\varnothing} a_k = 1.$$

- Si $p = q+1$, on convient que $\sum_{k=p}^{q} a_k = 0$ et $\prod_{k=p}^{q} a_k = 1$.
- Cette convention permet d'étendre naturellement :
  — la notation x^n pour $n=0$ (où $x\in\mathbb{R}$) : $\quad x^0 = \prod_{k=1}^{0} x = 1$;

  — la notation $n!$ pour $n=0$: $\quad 0! = \prod_{k=1}^{0} k = 1.$

1 **Question.** *(Produit des entiers pairs, produit des entiers impairs)*
sol → 19
Soit $n\in\mathbb{N}$.

1. Exprimer, à l'aide de $n!$, le produit A_n des entiers pairs compris entre 1 et $2n$.
2. On note B_n le produit des entiers impairs compris entre 1 et $2n+1$. Montrer que :

$$B_n = \frac{(2n+1)!}{2^n\, n!}.$$

2 **Question.** Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\prod_{k=1}^{n}(4k-2) = \prod_{k=1}^{n}(n+k)$$

3 **Question.** Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} k! \leqslant n!$$

Premières règles de calcul

Les règles de calculs dans $\mathbb{R}$ nous donnent les propriétés de calcul suivantes, qui ne sont pas à apprendre par cœur, mais à comprendre ! Pour cela, il ne faut pas hésiter à les vérifier en les écrivant avec des points de suspension.

- Grâce à la commutativité et l'associativité des lois $+$ et $\times$, on a :

$$\sum_{k\in I}(a_k+b_k)=\sum_{k\in I}a_k+\sum_{k\in I}b_k \qquad \text{et} \qquad \prod_{k\in I}(a_k\,b_k)=\left(\prod_{k\in I}a_k\right)\left(\prod_{k\in I}b_k\right).$$

- En notant n le nombre d'éléments de I :

$$\sum_{k\in I}(\lambda+a_k) \;=\; \sum_{k\in I}\lambda+\sum_{k\in I}a_k \;=\; n\lambda+\sum_{k\in I}a_k \qquad \text{et} \qquad \prod_{k\in I}(\lambda a_k) \;=\; \left(\prod_{k\in I}\lambda\right)\left(\prod_{k\in I}a_k\right) \;=\; \lambda^n\prod_{k\in I}a_k$$

- *Diverses opérations* ($\lambda\in\mathbb{R}$, $p\in\mathbb{N}$) :

$$\sum_{k\in I}(\lambda\,a_k)=\lambda\sum_{k\in I}a_k \qquad \text{et} \qquad \prod_{k\in I}(a_k)^p=\left(\prod_{k\in I}a_k\right)^p$$

- *Relation de Chasles*. Pour $p\leqslant r\leqslant q$, on a :

$$\sum_{k=p}^{q}a_k=\sum_{k=p}^{r}a_k+\sum_{k=r+1}^{q}a_k \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=p}^{q}a_k=\left(\prod_{k=p}^{r}a_k\right)\left(\prod_{k=r+1}^{q}a_k\right).$$

- *Additivité par rapport à l'ensemble d'indexation*. Pour I_1 et I_2 deux ensembles finis disjoints, alors :

$$\sum_{k\in I_1\cup I_2}a_k=\sum_{k\in I_1}a_k+\sum_{k\in I_2}a_k \qquad \text{et} \qquad \prod_{k\in I_1\cup I_2}a_k=\prod_{k\in I_1}a_k\times\prod_{k\in I_2}a_k.$$

Changements d'indice

Décalage d'indice

Soit $r\in\mathbb{N}$. Dans la somme $S=\sum_{k=p}^{q}a_k$, on peut effectuer un décalage d'indice en utilisant le changement d'indice $[j=k+r]$:

$$S=\sum_{j=p+r}^{q+r}a_{j-r}.$$

4 sol → 19 **Question.** Soit $n\geqslant 2$.
En remarquant que $\dfrac{2}{k(k+2)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}$, simplifier la somme $S=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{2}{k(k+2)}$.
La formule trouvée est-elle encore valable pour $n=1$?

Symétrisation

Dans certains calculs, il peut être judicieux d'inverser l'ordre des termes.

- Pour $n\in\mathbb{N}$, considérons une somme de la forme :

$$S=\sum_{k=0}^{n}a_k. \qquad (\star)$$

Pour inverser l'ordre de sommation, effectuons le changement d'indice $[j=n-k]$. Lorsque k décrit l'ensemble $[\![0,n]\!]$, alors j décrit sans redondance le même ensemble $[\![0,n]\!]$. On a donc :

$$S=\sum_{j=0}^{n}a_{n-j}. \qquad (\star\star)$$

Si l'on écrit les sommes avec des points de suspension :

— l'écriture ($\star$) correspond à $S = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$;
— l'écriture ($\star\star$) correspond à $S = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_0$.

- Dans ce qui précède, les indices k et j étant des variables muettes, on peut utiliser la même lettre avant et après le changement d'indice. Ainsi, il est correct d'écrire :

$$\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{k=p-1}^{q-1} a_{k+1}.$$

Cependant, l'utilisation d'une nouvelle lettre permet de réduire les risques d'erreurs dans la détermination des nouvelles bornes. En particulier, cela permet de faire de tête les raisonnements suivants :
— « quand k vaut p, alors j vaut ... et quand k vaut q, alors j vaut ... »
— « quand k décrit l'ensemble I, alors j décrit l'ensemble ... »

5 **Proposition.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- **Preuve.** Le résultat est évident pour $n = 0$, puisqu'une somme vide vaut 0.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Optons pour une démonstration intuitive, en utilisant des points de suspension.
Notons S la somme considérée, et sommons une fois dans un sens, et une fois dans l'autre :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
S & = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & (n-1) & + & n \\
S & = & n & + & (n-1) & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\
\hline
2\,S & = & (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) & + & (n+1)
\end{array}$$

On a donc $2\,S = n(n+1)$, c'est-à-dire $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
Plus formellement :

$$\begin{aligned}
2S &= \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k \\
&= \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{j=1}^{n} (n-j+1) && \text{changement d'indice } [j = n-k+1] \text{ dans la } 2^{\text{ème}} \text{ somme} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} (n-k+1) && \text{on renomme } j \text{ en } k \text{ dans la } 2^{\text{ème}} \text{ somme} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (n+1) && \text{linéarité du symbole } \Sigma \\
&= n\,(n+1) && \text{somme dont le terme général est constant}
\end{aligned}$$

D'où $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

- La formule peut bien sûr s'adapter très facilement lorsque la somme commence à 0... On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

- Plus généralement, pour $p \leqslant q$, on a

$$\sum_{k=p}^{q} k = \frac{(q-p+1)(p+q)}{2}$$

6 **Proposition.** Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique. Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leqslant q$, on a :

$$\sum_{k=p}^{q} u_k \;=\; (q-p+1)\,\frac{u_p + u_q}{2}.$$

La somme des termes *consécutifs* d'une suite arithmétique est égale

$$\frac{\text{nb termes} \times (1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{d}^{\text{er}} \text{ terme})}{2}$$

Sommation par paquets

Dans ce qui suit, I désigne un ensemble fini d'entiers.

- Étant donné une somme $S = \sum_{k \in I} a_k$, il peut être intéressant de traiter séparément les termes d'indice pair et ceux d'indice impair ; cela consiste à écrire :

$$S = \sum_{\substack{k \in I \\ k \text{ pair}}} a_k + \sum_{\substack{k \in I \\ k \text{ impair}}} a_k.$$

- Considérons une somme $S = \sum_{k=1}^{2n+1} a_k$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, dans laquelle on souhaite séparer les termes d'indice pair et ceux d'indice impair. On peut écrire :

$$S = \sum_{\substack{k \in [\![1,2n+1]\!] \\ k \text{ pair}}} a_k + \sum_{\substack{k \in [\![1,2n+1]\!] \\ k \text{ impair}}} a_k.$$

Pour rendre la formule plus explicite, constatons que, dans l'ensemble $[\![1, 2n+1]\!]$:

— les éléments pairs sont les entiers de la forme $2p$ avec $1 \leqslant 2p \leqslant 2n+1$, autrement dit $\frac{1}{2} \leqslant p \leqslant n + \frac{1}{2}$, c'est-à-dire, puisque p est un entier, $1 \leqslant p \leqslant n$;

— les éléments impairs sont les entiers de la forme $2p+1$ avec $1 \leqslant 2p+1 \leqslant 2n+1$, autrement dit $0 \leqslant p \leqslant n$.

On aboutit à la formule suivante : $S = \sum_{p=1}^{n} a_{2p} + \sum_{p=0}^{n} a_{2p+1}$.

7 preuve **Question.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k$.

Télescopie

Dans ce qui suit, on suppose $p \leqslant q$.

- On appelle *somme télescopique* toute somme de la forme $\sum_{k=p}^{q} (a_{k+1} - a_k)$.

L'intérêt de ce type de somme est que sa simplification est immédiate, car tous les termes, sauf le premier et le dernier, se simplifient. En effet, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{q} (a_{k+1} - a_k) &= (a_{q+1} - a_q) + (a_q - a_{q-1}) + \cdots + (a_{p+2} - a_{p+1}) + (a_{p+1} - a_p) \\
&= a_{q+1} - a_p.
\end{aligned}$$

Une autre manière de voir les choses est la suivante :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{q} (a_{k+1} - a_k) &= \sum_{k=p}^{q} a_{k+1} - \sum_{k=p}^{q} a_k \\
&= \sum_{j=p+1}^{q+1} a_j - \sum_{k=p}^{q} a_k \qquad [j = k+1] \text{ dans la première somme} \\
&= a_{q+1} + \underbrace{\sum_{j=p+1}^{q} a_j - \sum_{k=p+1}^{q} a_k}_{=0} - a_p \\
&= a_{q+1} - a_p.
\end{aligned}$$

- On appelle *produit télescopique* tout produit de la forme $\displaystyle\prod_{k=p}^{q} \frac{a_{k+1}}{a_k}$, où les a_k sont supposés tous non nuls. La simplification d'un tel produit est immédiate. De façon analogue au calcul précédent, on a :

$$\begin{aligned}\prod_{k=p}^{q} \frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{a_{p+1}}{a_p} \cdot \frac{a_{p+2}}{a_{p+1}} \cdots \frac{a_q}{a_{q-1}} \cdot \frac{a_{q+1}}{a_q} \\ &= \frac{a_{q+1}}{a_p},\end{aligned}$$

ou, d'une autre manière plus formelle :

$$\begin{aligned}\prod_{k=p}^{q} \frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{\displaystyle\prod_{k=p}^{q} a_{k+1}}{\displaystyle\prod_{k=p}^{q} a_k} = \frac{\displaystyle\prod_{j=p+1}^{q+1} a_j}{\displaystyle\prod_{k=p}^{q} a_k} \quad [j = k+1] \text{ dans le produit du haut} \\ &= \frac{\left(\displaystyle\prod_{j=p+1}^{q} a_j\right) a_{q+1}}{a_p \displaystyle\prod_{k=p+1}^{q} a_k} \\ &= \frac{a_{q+1}}{a_p}.\end{aligned}$$

8 **Question.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier la somme $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.
sol → 20

9 **Question.** Déterminer deux nombres a et b vérifiant : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k+1} + \dfrac{b}{k}$.
sol → 20

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une écriture simplifiée de $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Erreurs classiques

10 **Attention.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $C_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. Calculer $S_{n+1} - S_n$ et $C_{n+1} - C_n$.

11 **Attention.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1)$.

Un élève propose la solution suivante :

On fait le changement de variables $j = 2k-1$ et on a alors

$$A_n = \sum_{j=1}^{2n-1} j = \frac{(2n-1)(2n)}{2} = (2n-1)n$$

Le prof lui répond :

Vous avez dû faire une erreur...
En effet, on a $A_2 = 1+3 = 4$, et avec votre formule vous trouvez :

$$(2n-1)n = (2 \times 2 - 1) \times 2 = 6$$

II. Quelques calculs remarquables

Somme des premières puissances

12 preuve **Proposition.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Somme des termes d'une suite géométrique

13 **Proposition.** Soit $q \in \mathbb{R}$. Soit $m \leqslant n$ deux entiers. On a

$$\sum_{k=m}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{q^m - q^{n+1}}{1-q} = q^m \dfrac{1-q^{n-m+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-m+1 & \text{sinon} \end{cases}$$

- On a, par télescopage :

$$(1-q)\sum_{k=m}^{n} q^k = \sum_{k=m}^{n} (q^k - q^{k+1}) = q^m - q^{n+1}.$$

- Prenons une suite géométrique $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de raison $q \neq 1$. On a alors $\forall k \in \mathbb{N},\ u_k = u_0 q^k$.

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = u_0 \sum_{k=m}^{n} q^k$$

Prenons les deux expressions pour $q \neq 1$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = u_0 \frac{q^m - q^{n+1}}{1-q} = \frac{u_0 q^m - u_0 q^{n+1}}{1-q} = \frac{1^{\text{er}} \text{ t. présent} - 1^{\text{er}} \text{ t. absent}}{1-q}$$

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = u_0 q^m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q} = 1^{\text{er}} \text{ t.} \times \frac{1-q^{\text{nb de t.}}}{1-q}$$

14 **A retenir.**
La somme des termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ vaut $\dfrac{1^{er} \text{ t. présent} - 1^{er} \text{ t. absent}}{1-q}$

La somme des termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ vaut 1^{er} *t.* $\times \dfrac{1-q^{\text{nb de t.}}}{1-q}$

15 **Question.** Simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$.

16 preuve

Proposition. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k\, b^{n-1-k}.$$

- Cette formule peut aussi être écrite

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{i+j=n-1} a^i\, b^j$$

où la somme porte sur les couples $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $i + j = n - 1$.
En effet, un tel couple peut s'écrire $(k, n-1-k)$ d'où l'égalité des deux sommes.

- *Factorisation de $a^{2n+1} + b^{2n+1}$.*

On a $a^{2n+1} + b^{2n+1} = a^{2n+1} - (-b)^{2n+1}$. Ainsi, en appliquant la formule de factorisation, on a :

$$\begin{aligned}
a^{2n+1} + b^{2n+1} &= \big(a-(-b)\big)\sum_{k=0}^{2n} a^k\,(-b)^{(2n+1)-1-k}\\
&= (a+b)\sum_{k=0}^{2n}(-1)^{2n-k}\,a^k\,b^{2n-k}\\
&= (a+b)\sum_{k=0}^{2n}(-1)^{k}\,a^k\,b^{2n-k} && (k \text{ et } 2n-k \text{ ont la même parité}).
\end{aligned}$$

III. Sommes doubles

Sommes rectangulaires

On a, jusqu'ici, considéré des sommes simples, c'est-à-dire des sommes qui sont indexées par un seul indice.
On va maintenant considérer des sommes indexées par deux indices.
Considérons ce tableau

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$a_{1,4}$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	$a_{2,4}$
$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	$a_{3,4}$

La somme des éléments de ce tableau est notée

$$S = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\ 1\leqslant j\leqslant 4}} a_{i,j}$$

On peut évaluer cette somme de plusieurs façons :

— on peut sommer d'abord les termes de chaque ligne du tableau, puis additionner les trois sommes ainsi obtenues :

$$S = \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{4} a_{i,j}\right)$$

— on peut sommer d'abord les termes de chaque colonne du tableau, puis additionner les quatre sommes ainsi obtenues :

$$S = \sum_{j=1}^{4}\left(\sum_{i=1}^{3} a_{i,j}\right)$$

17 **A retenir.** Le calcul d'une somme double sur un rectangle se ramène au calcul de deux sommes simples imbriquées.

- La somme double $\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} a_{i,j}$ notée encore $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j}$, peut s'écrire à l'aide de deux $\sum$:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\right) \qquad \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right)$$

- La somme double $\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} a_{i,j}$ notée encore $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}$, peut s'écrire à l'aide de deux $\sum$:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right) \qquad \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right)$$

18 **Question.**
Soit $n\in\mathbb{N}$. Déterminer $S_n = \displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2} \min(i,j)$.

Un cas particulièrement favorable est celui où la famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est telle qu'il existe deux familles $(b_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(c_j)_{j\in[\![1,p]\!]}$ vérifiant :

$$\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!],\quad a_{i,j}=b_i\,c_j.$$

La somme double se ramène alors à un produit de deux sommes simples, comme l'énonce la proposition suivante :

19 **Proposition.**
Soit $(b_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(c_j)_{j\in[\![1,p]\!]}$ deux familles de réels. On a :

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} b_i\,c_j = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)\left(\sum_{j=1}^{p} c_j\right).$$

20 **Exemple.** Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On souhaite calculer $S=\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} i\,2^j$.
On est dans les conditions de la proposition précédente, d'où :

$$S=\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} 2^j\right)=\frac{n\,(n+1)}{2}\,(2^{n+1}-2)=n(n+1)(2^n-1).$$

21 **Proposition (Le carré d'une somme simple est une somme double).**
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $x_1,\dots,x_n$ des réels. On a

- $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i x_j$
- $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2=\sum_{\ell=1}^{n} x_\ell^2+\sum_{i\neq j} x_i x_j$
- $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2=\sum_{\ell=1}^{n} x_\ell^2+2\sum_{i<j} x_i x_j$

Généralisation : somme rectangulaire quelconque

Plus généralement, on parle de *somme double rectangulaire* lorsque l'ensemble d'indexation est un produit cartésien : $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j}$.
Ce qui a été énoncé dans le cas $[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$ se généralise :

— une somme double rectangulaire se ramène à deux sommes simples imbriquées :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j}=\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_{i,j}\right)=\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} a_{i,j}\right);$$

— le cas où la famille est de la forme $(b_i\,c_j)_{(i,j)\in I\times J}$ mène à un produit de deux sommes simples :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} b_i\,c_j=\left(\sum_{i\in I} b_i\right)\left(\sum_{j\in J} c_j\right).$$

Sommes triangulaires

Considérons ce tableau

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$a_{1,4}$
	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	$a_{2,4}$
		$a_{3,3}$	$a_{3,4}$
			$a_{4,4}$

La somme des éléments de ce tableau est notée

$$\sum a_{i,j}$$

On peut évaluer cette somme de plusieurs façons :

— on peut sommer d'abord les termes de chaque ligne du tableau, puis additionner les quatre sommes ainsi obtenues :

$$S = \sum_{i=1}^{4}\left(\sum_{j=i}^{4} a_{i,j}\right)$$

— on peut sommer d'abord les termes de chaque colonne du tableau, puis additionner les quatre sommes ainsi obtenues :

$$S = \sum_{j=1}^{4}\left(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}\right)$$

22 **A retenir.** Le calcul d'une somme double sur un *triangle* se ramène au calcul de deux sommes simples imbriquées *dont le deuxième indice dépend du premier.*
On a :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\leqslant j\leqslant n}} a_{i,j} = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ 1\leqslant i\leqslant j}} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}$$

23 **Question.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $S = \sum_{i=1}^{n} i\,2^i$. Montrer que $S = (n-1)2^{n+1} + 2$.
sol → 21

24 **Question.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme double $S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{1}{j}$.
sol → 22

IV. Coefficients binomiaux

Définition et propriétés

Soit $n \in \mathbb{N}$. On rappelle que *factorielle n* est le nombre entier $n! = \prod_{k=1}^{n} k$. On a en particulier $0! = 1$.

25 **Définition.** Soit $n, p \in \mathbb{N}$.

Le *coefficient binomial « p parmi n »* noté $\binom{n}{p}$ est le nombre (rationnel, a priori) défini par :

$$\binom{n}{p} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}^{p \text{ termes}}}{p!} = \frac{1}{p!}\prod_{k=0}^{p-1}(n-k).$$

- On étend la définition à $p \in \mathbb{Z}$. On convient que $\binom{n}{p} = 0$ pour tout $p < 0$.
- Pour $p \in [\![0, n]\!]$, on a :
$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$
- Pour $p > n$, on a $\binom{n}{p} = 0$. En effet, l'un des termes du numérateur est nul.
- Pour $n, p \in \mathbb{N}$, le coefficient binomial $\binom{n}{p}$ peut s'interpréter comme le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments. De manière informelle, cela signifie qu'il y a $\binom{n}{p}$ manières de choisir p objets parmi n. Confer le chapitre « Dénombrement ».

26 **Proposition.**

1. **Petites valeurs de k.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$
2. **Symétrie**
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, k \in \mathbb{Z},\quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
3. **Formule d'absorption, dite aussi « formule du capitaine »**
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, k \in \mathbb{Z}^*,\quad \binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$
4. **Formule du triangle de Pascal**
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad \forall\, k \in \mathbb{Z},\quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$
5. **C'est un entier !**
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, k \in \mathbb{Z},\quad \binom{n}{k} \in \mathbb{N}$$

- La formule du capitaine peut aussi s'écrire sous cette belle forme :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \boxed{\forall\, k \in \mathbb{Z}},\quad k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

qui peut être retenue sous la forme « pour tout n pour lequel cela a du sens, et pour tout k du monde entier, on a ... »

- Il faut savoir « translater » de tête les indices, et passer d'un membre à un autre.
Par exemple, la formule du triangle de Pascal s'écrit :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad \forall\, k \in \mathbb{Z},\quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad \forall\, k \in \mathbb{Z},\quad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Par exemple, la formule du capitaine de l'énoncé peut aussi s'écrire :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, k \in \mathbb{Z},\quad \binom{n}{k} = \frac{k+1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$$

27 **Question.** Montrer :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, k \in \mathbb{Z}^*,\quad \binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}.$$

Formule du binôme de Newton

28 **Proposition (Formule du binôme de Newton).** On a :

$$\forall\, a,b \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

- **Autre expression.** Écrivons avec des points de suspension la formule du binôme :

$$(a+b)^n = \underbrace{\binom{n}{0} a^0 b^n}_{b^n} + \underbrace{\binom{n}{1} a^1 b^{n-1}}_{nab^{n-1}} + \cdots + \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + \cdots \underbrace{\binom{n}{n-1} a^{n-1} b^1}_{na^{n-1}b} + \underbrace{\binom{n}{n} a^n b^0}_{a^n}$$

On a aussi, par symétrie du coefficient binomial :

$$(a+b)^n = \underbrace{\binom{n}{0} a^n b^0}_{a^n} + \underbrace{\binom{n}{1} a^{n-1} b^1}_{na^{n-1}b} + \cdots + \binom{n}{j} a^{n-j} b^{j} + \cdots \underbrace{\binom{n}{n-1} a^{1} b^{n-1}}_{nab^{n-1}} + \underbrace{\binom{n}{n} a^0 b^n}_{b^n}$$

Bref, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^{j}$$

- **Remarque super importante pour la suite de l'année!**
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(x+1)^n = x^n + nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} + \cdots + \binom{n}{k} x^k + \cdots + nx + 1$$

Dit autrement, le coefficient en x^k de $(1+x)^n$ vaut $\binom{n}{k}$.

- **Preuve.** Fixons $a, b \in \mathbb{R}$. Montrons, par récurrence, que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \underbrace{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}_{\mathcal{H}_n}$$

Initialisation. On a $\mathcal{H}_0$ (WHY?)
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}_n$. On a :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \left(a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} + b^{n+1} \right) \\
&= \ldots \quad + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} a^i b^{n-i+1} + \ldots \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right]}_{\binom{n+1}{k}} a^k b^{n-k+1} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

V. Des résultats classiques en guise d'exercices

Sommes de coefficients binomiaux

29

Exercice.

1. **Somme sur une même ligne**

   On a
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$
   La somme des coefficients de la ligne n du triangle de Pascal vaut 2^n.

2. **Somme alternée sur une même ligne**

   On a
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$$
   La somme alternée des coefficients binomiaux sur une même ligne est nulle, sauf pour la ligne n° 0

3. **Somme des indices pairs (et impairs)**

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose
   $$S_n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{2p} \qquad \text{et} \qquad T_n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{2p+1}$$
   On a
   $$S_n = 2^{n-1} \qquad \text{et} \qquad T_n = 2^{n-1}$$

4. **Formule de Pascal généralisée**

   On a
   $$\forall\, m \in \mathbb{N},\ \forall\, c \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=c}^{m} \binom{i}{c} = \binom{m+1}{c+1}$$

5. **Autres sommes**

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1} \qquad \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$$

6. **Formule de Vandermonde**

   $$\forall\, n, m, p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}$$

Autres résultats

30

La formule du capitaine.
Soit $c, j, n \in \mathbb{N}$ avec $c \leqslant j \leqslant n$. On a la formule suivante :

$$\binom{n}{j}\binom{j}{c} = \binom{n}{c}\binom{n-c}{j-c}$$

Plus tard dans l'année, on prouvera cette égalité en récitant le petit texte suivant
« Pour constituer une équipe de j joueurs ayant c capitaines (avec n joueurs à disposition), on peut procéder de deux façons :

— commencer par choisir les j joueurs (parmi les n à disposition), puis parmi ces j joueurs, choisir les c capitaines

— ou bien, commencer par choisir les c capitaines (parmi les n joueurs à disposition), puis choisir $j-c$ joueurs parmi les $n-c$ joueurs restants. »

31

La formule d'inversion de Pascal.
Soit (a_n) et (b_n) deux suites vérifiant la relation

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

Il existe une formule permettant d'« inverser » la formule précédente et ainsi exprimer a_n en fonction des b_k :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} b_k$$

Une remarque anecdotique. La formule s'écrit aussi :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (-1)^n a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k b_k$$

Pour le fun, si on veut retenir cette formule, on peut se dire que c'est la même que l'égalité initiale, mais avec des suites "signées", c'est-à-dire $a'_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b'_k$ avec $u'_i = (-1)^i u_i$.

32

L'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des réels.
On a :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

Pour $n = 1$, cela dit $(a_1 b_1)^2 \leqslant a_1^2 b_1^2$, ce qui est évident.

Pour $n = 2$, cela dit $(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$, ce qui n'est **pas** évident.

Calculs algébriques

preuve et éléments de correction

1

1. Le produit des entiers pairs compris entre 1 et $2n$ s'écrit $A_n = \prod_{k=1}^{n}(2k)$.

   Les règles de calculs du symbole $\prod$ nous donnent alors :

$$A_n = 2^n \prod_{k=1}^{n} k = 2^n\, n!\,.$$

2. On a $B_n = \dfrac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1) \times (2n+1)}{1}$.

   En multipliant le numérateur et le dénominateur par A_n, on voit apparaître :

   — au numérateur, le produit de tous les entiers compris entre 1 et $2n+1$, c'est-à-dire $(2n+1)!$

   — au dénominateur A_n, c'est-à-dire $2^n\, n!$

   On en déduit :

$$B_n = \frac{(2n+1)!}{2^n\, n!}.$$

4

On a

$$\forall\, k \in [\![1,n]\!], \qquad \frac{2}{k(k+2)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}$$

Par somme, on obtient $S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2}$.
Effectuons le changement d'indice $[j = k+2]$ dans la deuxième somme :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} = \sum_{j=3}^{n+2} \frac{1}{j} = \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k},$$

la dernière égalité étant justifiée par le caractère muet de la variable de sommation.
On obtient :

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \\
&= \left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k}\right) - \left(\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) && \text{(car } n \geqslant 2\text{)} \\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}.
\end{aligned}$$

À l'avant-dernière égalité du calcul précédent, on notera la justification « $n \geqslant 2$ ». En effet, pour pouvoir sortir deux termes des sommes $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $\sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k}$, celles-ci doivent en comporter au moins deux.

Pour $n = 1$, on a $S = \frac{2}{3}$. Et la formule donne $\frac{2}{3}$. La formule est donc encore valable pour $n = 1$, chose que l'on justifie a posteriori !

7

Remarquons que l'on a :

$$S = -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - \cdots - (2n-1) + 2n.$$

En regroupant les termes deux à deux, il vient :

$$\begin{aligned} S &= (-1+2)+(-3+4)+(-5+6)+\cdots+\big(-(2n-1)+2n\big) \\ &= \underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n \text{ termes}} \\ &= n. \end{aligned}$$

Le plus souvent, pour mettre en évidence un regroupement de termes pertinent, il est plus facile d'utiliser l'écriture avec des points de suspension. Effectuer une sommation par paquets revient alors à placer judicieusement les parenthèses.

8

On a

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \Big(\ln(k+1)-\ln k\Big) \\ &= \ln(n+1)-\ln 1 \qquad \text{par télescopie} \\ &= \ln(n+1) \end{aligned}$$

9

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En réduisant au même dénominateur, on a :

$$\frac{a}{k+1}+\frac{b}{k}=\frac{ka+(k+1)b}{k(k+1)}=\frac{k(a+b)+b}{k(k+1)}.$$

On constate alors que le couple $(a,b)=(-1,1)$ convient, c'est-à-dire que l'on a :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^* \; \frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \\ &\overset{\text{WHY}}{=} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\ &= \frac{1}{1}-\frac{1}{n+1} \qquad \text{par télescopie} \\ &= 1-\frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

12

Une preuve par récurrence est envisageable, mais nécessite de connaître à l'avance le résultat. Nous optons pour une autre démonstration, qui consiste à calculer de deux manières la somme télescopique $\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right)$.
La formule est évidemment vraie pour $n=0$, puisqu'une somme vide est nulle.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
On a

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right)=\sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k+1).$$

— À gauche, on reconnaît une somme télescopique : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right)=(n+1)^3-1$.

— À droite, on a :

$$\sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k+1)=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\frac{n(n+1)}{2}+n.$$

En identifiant les deux membres, on obtient $(n+1)^3-1=3\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2+3\frac{n(n+1)}{2}+n$.

Isolons $3\sum_{k=1}^{n}k^2$ puis simplifions :

$$\begin{aligned}3\sum_{k=1}^{n}k^2=(n+1)^3-1-3\frac{n(n+1)}{2}-n&=(n+1)^3-3\frac{n(n+1)}{2}-(n+1)\\&=(n+1)\left((n+1)^2-\frac{3n}{2}-1\right)\\&=(n+1)\left(n^2+\frac{n}{2}\right)=(n+1)\frac{n(2n+1)}{2},\end{aligned}$$

ce qui donne la formule souhaitée $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

16

On a, en partant du membre de droite de l'égalité souhaitée :

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^k\,b^{n-1-k}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(a^{k+1}\,b^{n-1-k}-a^k\,b^{n-k}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(a^{k+1}\,b^{n-(k+1)}-a^k\,b^{n-k}\right).$$

On reconnaît alors une somme télescopique qui vaut $a^n b^0-a^0 b^n$, *i.e.* a^n-b^n.

23

À i fixé, on a $\sum_{j=1}^{i}2^i=i\,2^i$, ce qui explique que $S=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}2^i$.
Intervertissons les deux symboles $\sum$:

$$S=\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant i}}2^i=\sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}2^i=\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\j\leqslant i\leqslant n}}2^i=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}2^i.$$

La somme interne est le somme des termes d'une suite géométrique, que l'on sait donc calculer : $\sum_{i=j}^{n}2^i=2^{n+1}-2^j$.
On obtient :

$$S=\sum_{j=1}^{n}(2^{n+1}-2^j)=\sum_{j=1}^{n}2^{n+1}-\sum_{j=1}^{n}2^j$$

et donc, à nouveau en reconnaissant une somme géométrique (la seconde somme ci-dessus) :

$$S=n2^{n+1}-(2^{n+1}-2)=(n-1)2^{n+1}+2.$$

24

Sous cette forme le calcul est difficile car à i fixé, nous ne connaissons pas d'expression simple pour la somme $\displaystyle\sum_{j=i}^{n} \frac{1}{j}$. Intervertissons les deux symboles $\sum$:

$$S = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \leqslant j \leqslant n}} \frac{1}{j} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{1}{j} = \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant i \leqslant j}} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{j}.$$

Le calcul est alors immédiat, car pour $j \in [\![1, n]\!]$ fixé, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{j} \frac{1}{j} = 1$. On obtient :

$$S = \sum_{j=1}^{n} 1 = n.$$