Calculs

exercices

Somme

101 **Somme des nombres impairs**

Donner une formule (et la démontrer) pour la somme $1+3+5+\cdots+(2n-1)$ des premiers nombres impairs.

102 **Télescopie**

En utilisant une somme télescopique, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kk!$.

103 **Somme alternée**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une forme simplifiée de $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k$.

Il y aura peut-être une disjonction de cas en fonction de la parité de n.
On peut aussi donner une formule close avec la partie entière.

104 **Récurrence forte !**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite à termes **strictement positifs** vérifiant :

$$(\star) \qquad \forall\, p \geqslant 1, \quad \sum_{i=1}^{p} u_i^3 \;=\; \Big(\sum_{i=1}^{p} u_i\Big)^2$$

Montrer par récurrence forte $\;\forall\, n \geqslant 1,\; u_n = n$.

Exprimer u_{n+1}^3 en fonction de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i^3$.

105 **Une inégalité**

Montrer $\quad \forall n \geqslant 2,\; n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

106 **Somme des distances à 1**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} |\omega - 1|$.

Coefficient binomial

107

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

108 **Minoration du coefficient binomial central**

Montrer $\qquad \forall\, n \geqslant 1, \quad \dfrac{4^n}{2\sqrt{n}} \;\leqslant\; \dbinom{2n}{n}$

Récurrence !

109 **Somme tronquée alternée des coeffs binomiaux**

Soit $m, n \in \mathbb{N}$. On considère

$$S_{m,n} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{k}$$

Calculer $S_{m,n}$.

Pour quelles valeurs de m et n savez-vous calculer cette somme ? Dans ce cas, quelle(s) preuve(s) connaissez-vous ?
Sauriez-vous proposer une preuve par télescopie ?
Maintenant, adaptez la preuve par télescopie pour calculer S dans le cas général. Est-ce que votre formule est valable pour $n = 0$?

Avec les complexes

110 **Somme de puissance de racines $n^{\text{ème}}$**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}$ les racines n-ièmes de l'unité.

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k^p$.
2. Soit $n \geqslant 3$. Montrer que $\displaystyle\sum_{\substack{0 \leqslant k, \ell \leqslant n-1 \\ k \neq \ell}} \xi_k \xi_\ell = 0$.

111 **CST**

Soit $n \in \mathbb{N}$

1. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Calculer la somme
$$C = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(x + ky)$$
2. Soit $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.
Calculer
$$S = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{(\cos x)^k} \qquad \text{et} \qquad T = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(kx)}{(\cos x)^k}$$

Sommes doubles

112 **Écart à la moyenne**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer l'équivalence :
$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|\right)^2 \iff \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leqslant \sum_{i \neq j} |a_i a_j|$$
   (b) Montrer que
$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 0 \implies \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|\right)^2$$
2. Soit $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ et $m = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - m)^2 \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - m|\right)^2$$

113 **Une somme double**

Simplifier :
$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} i(n - j)$$

On doit trouver $\dfrac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{24}$

114 **Trois sommes doubles**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer
$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j} \qquad \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \min(i, j) \qquad \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} |i - j|$$

Miscellaneous

115 **Transformation d'Abel**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes.
On définit deux suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad \text{et} \quad b_n = B_{n+1} - B_n$$

1. Démontrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k k = 2^{n+1}(n-1) + 2$.

116 **Dérangement**

Soit d la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

1. Soit u la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = (n+1)u_n + (-1)^{n+1} \end{cases}$$
Montrer que les deux suites u et d sont égales.
2. A l'aide de la question précédente, montrer que
$$\forall n \geqslant 2, \quad d_n = (n-1)\big(d_{n-1} + d_{n-2}\big)$$
3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $f_n = n!$.
Montrer que
$$\forall n \geqslant 2, \quad f_n = (n-1)\big(f_{n-1} + f_{n-2}\big)$$
4. Les suites d et f sont-elles égales ?

117 **Équation de Pell-Fermat**

Le but de l'exercice est de démontrer que l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ admet une infinité de solutions.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un couple $(x_n, y_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $(3 + 2\sqrt{2})^n = x_n + \sqrt{2} y_n$.
2. Montrer l'unicité d'un tel couple.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.
4. Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont strictement croissantes.
5. Conclure.

Autres

118

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij$.

1. Calculer T_1, T_2, T_3.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer T_n en fonction de n.

119

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $R_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k}(-1)^k$ et $I_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k$. On pose $z = R_n + \mathrm{i}I_n$.

1. Calculer z. On remarquera que $(-1)^k = \mathrm{i}^{2k}$.
2. En déduire $R_n^2 + I_n^2$.

120 **Somme trigonométrique sans annulation**

Soit $n \geqslant 1$ et $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{i\theta_k}}{2^k} \neq 0$.

Raisonner par l'absurde et utiliser l'inégalité triangulaire.

Calculs
corrigés

101

Calculons $S_n = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)$.

On a

$$S_n \;=\; 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 \;=\; 2\frac{n(n+1)}{2} - n \;=\; n^2$$

On peut aussi utiliser *directement* la formule donnant la somme des termes d'une suite arithmétique :

$$\sum_{k=p}^{q}(ak+b) \;=\; (q-p+1)\frac{(ap+b)+(aq+b)}{2}$$

D'où

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) \;=\; n \times \frac{1 \;+\; (2n-1)}{2} \;=\; n^2$$

102

On écrit $k = (k+1) - 1$.
On a alors

$$\sum_{k=0}^{n} kk! \ = \ \sum_{k=0}^{n} \big((k+1)k! - k!\big) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \big((k+1)! - k!\big) \ = \ (n+1)! - 0! \ = \ (n+1)!$$

Distinguons deux cas.

Cas n pair, $n=2p$.

On a

$$A_{2p}=\sum_{k=1}^{2p}(-1)^k k \;=\; \sum_{\ell=1}^{p}\Big(-(2\ell-1)+2\ell\Big) \;=\; p$$

Cas n impair, $n=2p+1$.

Par sommation par paquets et en utilisant le cas précédent, on a

$$\begin{aligned} A_{2p+1}=\sum_{k=1}^{2p+1}(-1)^k k \;&=\; \left(\sum_{k=1}^{2p}(-1)^k k\right) \;+\; (-1)^{2p+1}(2p+1) \\ &=\; p-(2p+1) \\ &=\; -(p+1) \end{aligned}$$

Bilan :

$$A_n \;=\; \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Bonus. Il y a une formule close, sans disjonction de cas :

$$A_n \;=\; (-1)^n\left\lfloor \frac{n+1}{2}\right\rfloor$$

En effet,

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2}\right\rfloor \;=\; \begin{cases} \left\lfloor \frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right\rfloor \overset{\text{WHY}}{=} \frac{n}{2}+\left\lfloor\frac{1}{2}\right\rfloor \;=\; \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Autre bonus. Il y a une autre formule close, sans disjonction de cas, et sans partie entière. Deux formules très pratiques :

$$(-1)^n \;=\; \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases} \qquad\qquad \frac{1-(-1)^n}{2} \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme

$$A_n \;=\; \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n}{2}-\frac{1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

on a

$$A_n \;=\; (-1)^n\frac{n}{2} \;-\; \frac{1-(-1)^n}{2}\,\frac{1}{2} \;=\; \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$$

Pour tout $n \geqslant 1$, on note $\mathcal{P}_n$ la propriété

$$\mathcal{P}_n : \qquad \text{« } u_n = n \text{ »}$$

Montrons, par récurrence forte, que $\quad \forall\, n \geqslant 1,\ \mathcal{P}_n$.

Initialisation. Je vous laisse montrer que $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité.
Soit $n \geqslant 1$.
Supposons que $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n$ sont vraies.
Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$.
On a :

$$\begin{array}{rcll}
\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} u_i^3 & = & \displaystyle\Big(\sum_{i=1}^{n+1} u_i\Big)^2 & \text{hypothèse } (\star) \text{ avec } p = n+1 \\
\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i^3 \ + \ u_{n+1}^3 & = & \displaystyle\Big(\sum_{i=1}^{n} u_i \ + \ u_{n+1}\Big)^2 & \text{paquets (à gauche et à droite)} \\
\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i^3 \ + \ u_{n+1}^3 & = & \displaystyle\Big(\sum_{i=1}^{n} u_i\Big)^2 \ + \ 2\Big(\sum_{i=1}^{n} u_i\Big)u_{n+1} \ + \ u_{n+1}^2 & \text{identité remarquable} \\
u_{n+1}^3 & = & \displaystyle 2\Big(\sum_{i=1}^{n} u_i\Big)u_{n+1} \ + \ u_{n+1}^2 & \text{simplification grâce à } (\star) \text{ avec } p = n \\
u_{n+1}^2 & = & \displaystyle 2\sum_{i=1}^{n} u_i \ + \ u_{n+1} & \text{car } u_{n+1} \neq 0 \\
u_{n+1}^2 & = & \displaystyle 2\sum_{i=1}^{n} i \ + \ u_{n+1} & \text{d'après } \mathcal{P}_1,\ \mathcal{P}_2,\ \ldots,\ \mathcal{P}_n. \\
u_{n+1}^2 - u_{n+1} - n(n+1) & = & 0 & \text{calculs}
\end{array}$$

On obtient que u_{n+1} est solution de l'équation $x^2 - x - n(n+1) = 0$, équation qui a pour solutions $n+1$ et $-n$.
Donc

$$u_{n+1} = n+1 \qquad \text{ou} \qquad u_{n+1} = -n$$

Or u est à termes strictement positifs, donc $u_{n+1} = n+1$.
Et on a démontré $\mathcal{P}_{n+1}$.

106

En factorisant par l'angle moitié, on obtient que la somme vaut $2\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
La somme est alors calculable et vaut $2\,\text{cotan}\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.

107

On peut faire une récurrence sur n.
Pour l'hérédité, utiliser Pascal, puis la formule d'absorption, puis la somme alternée des coefficients binomiaux.

Minoration du coefficient binomial central : preuve par récurrence

Pour tout $n \geqslant 1$, on note

$$\mathcal{P}_n : \qquad « \quad \frac{4^n}{2\sqrt{n}} \leqslant \binom{2n}{n} \quad »$$

▷ **Initialisation.** Montrons que $\mathcal{P}_1$ est vraie.
D'un côté, $\dfrac{4^1}{2\sqrt{1}} = 2$
De l'autre $\dbinom{2 \times 1}{1} = 2$
Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

▷ **Hérédité.**
Soit $n \geqslant 1$.
Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie, càd $\dfrac{4^n}{2\sqrt{n}} \leqslant \dbinom{2n}{n}$.
Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, càd $\dfrac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \dbinom{2n+2}{n+1}$.

Avant de commencer un quelconque raisonnement, remarquons que l'on a

$$(\heartsuit) \qquad \binom{2n+2}{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Reformulons $\mathcal{P}_{n+1}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{n+1} \quad &\overset{\heartsuit}{\iff} \quad \frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n} \\ &\overset{\text{calcul}}{\iff} \quad \frac{4^n\sqrt{n+1}}{2n+1} \leqslant \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

Démarrons notre raisonnement en partant de $\mathcal{P}_n$ qui dit $\dfrac{4^n}{2\sqrt{n}} \leqslant \dbinom{2n}{n}$.
A l'aide des équivalences ci-dessus, pour montrer $\mathcal{P}_{n+1}$, on voit qu'il suffit de montrer que

$$\frac{4^n\sqrt{n+1}}{2n+1} \leqslant \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{\sqrt{n+1}}{2n+1} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

c'est-à-dire à

$$2\sqrt{n}\sqrt{n+1} \leqslant 2n+1$$

ce qui est vrai (de manière générale, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$, on a $2\sqrt{xy} \leqslant x+y$, c'est l'exo 7)

▷ **Bilan.** D'après le principe de récurrence, on en déduit que :

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \mathcal{P}_n \text{ est vraie}$$

▷ **Hérédité, deuxième rédaction**
Soit $n \geqslant 1$.
Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie, càd $\dfrac{4^n}{2\sqrt{n}} \leqslant \dbinom{2n}{n}$.
Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, càd $\dfrac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \dbinom{2n+2}{n+1}$.

Avant de commencer un quelconque raisonnement, remarquons que l'on a

$$(\heartsuit) \qquad \binom{2n+2}{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Partons de $\mathcal{P}_n$. On a :

$$\frac{4^n}{2\sqrt{n}} \leqslant \binom{2n}{n}$$

On essaie de faire apparaître le coefficient binomial central $\dbinom{2n+2}{n+1}$, à l'aide de $(\heartsuit)$.
Pour cela, on multiplie par $\dfrac{2(2n+1)}{n+1}$. On a donc :

$$\frac{2(2n+1)}{n+1}\frac{4^n}{2\sqrt{n}} \leqslant \binom{2n+2}{n+1}$$

Pour montrer $\mathcal{P}_{n+1}$, il suffit de montrer que :

$$\frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{2(2n+1)}{n+1}\frac{4^n}{2\sqrt{n}}$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{2n+1}{n+1}\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

c'est-à-dire à :

$$2\sqrt{n}\sqrt{n+1} \leqslant 2n+1$$

▷ **Hérédité, troisième rédaction**
Soit $n \geqslant 1$.
Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie, càd $\dfrac{4^n}{2\sqrt{n}} \leqslant \dbinom{2n}{n}$.
Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, càd $\dfrac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \dbinom{2n+2}{n+1}$.

Avant de commencer un quelconque raisonnement, remarquons que l'on a

$$(\heartsuit) \qquad \binom{2n+2}{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Partons de $\mathcal{P}_n$. On a :

$$\frac{4^n}{2\sqrt{n}} \leqslant \binom{2n}{n}$$

On essaie de faire apparaître le membre gauche de l'inégalité de $\mathcal{P}_{n+1}$, à savoir $\dfrac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}}$
Pour cela, on multiplie par $\dfrac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$. On a donc :

$$\frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\binom{2n}{n}$$

Pour montrer $\mathcal{P}_{n+1}$, il suffit de montrer que :

$$\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\binom{2n}{n} \leqslant \binom{2n+2}{n+1}$$

ce qui est équivalent, à l'aide de (♡), à

$$\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \ \leqslant\ \frac{2(2n+1)}{n+1}$$

c'est-à-dire à :

$$2\sqrt{n}\sqrt{n+1} \ \leqslant\ 2n+1$$

1. Les racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité sont les complexes $\xi_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$, pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$.
   On a donc

$$S_p = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\frac{2ikp\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{\frac{2ip\pi}{n}}\right)^k = \begin{cases} \dfrac{1-(\mathrm{e}^{\frac{2ip\pi}{n}})^n}{1-\mathrm{e}^{\frac{2ip\pi}{n}}} & \text{si } \mathrm{e}^{\frac{2ip\pi}{n}} \neq 1 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 1^k & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } p \not\equiv 0 \ [n] \\ n & \text{sinon} \end{cases}$$

2. On note $S' = \sum\limits_{\substack{0\leqslant k,\ell\leqslant n-1 \\ k\neq \ell}} \xi_k \xi_\ell$. On a (WHY ?)

$$S_1^2 = S_2 + S'$$

   Si $n \geqslant 3$, alors les entiers $p \in \{1,2\}$ sont tels que $p \not\equiv 0[n]$. Donc $S_1 = S_2 = 0$, d'où l'on déduit $S' = 0$.

1. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(x+ky) &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ix}e^{iky}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(e^{ix}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{iy}\right)^{k}1^{n-k}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(e^{ix}(1+e^{iy})^{n}\right) && \text{Newton}\\
&= \mathrm{Re}\left(e^{ix}e^{iny/2}(e^{-iy/2}+e^{iy/2})^{n}\right) && \text{angle moitié}\\
&= \mathrm{Re}\left(e^{i(x+ny/2)}(2\cos(y/2))^{n}\right) && \text{Euler}\\
&= 2^{n}\cos(x+ny/2)\cos^{n}(y/2).
\end{aligned}$$

2. On a :

$$S+\mathrm{i}T \;=\; \sum_{k=0}^{n}\frac{e^{ikx}}{(\cos x)^{k}} \;=\; \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{\cos x}\right)^{k}.$$

On a l'équivalence

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{\cos x}=1 \iff \cos x+\mathrm{i}\sin x=\cos x \iff \sin x=0 \iff x\equiv 0\ [\pi]$$

— Si $x\equiv 0\ [\pi]$, alors $S+\mathrm{i}T=n+1$, donc $S=n+1$ et $T=0$.

— Sinon :

$$\begin{aligned}
S+\mathrm{i}T &= \frac{1-\left(\frac{e^{iz}}{\cos x}\right)^{n+1}}{1-\frac{e^{ix}}{\cos x}}\\
&= \frac{1}{\cos^{n}x}\times\frac{\cos^{n+1}x-e^{ix(n+1)}}{\cos x-e^{ix}}\\
&= \frac{1}{\cos^{n}x}\times\frac{\cos^{n+1}x-\cos((n+1)x)-i\sin((n+1)x)}{-i\sin x}\\
&= \frac{\sin((n+1)x)}{\cos^{n}x\times\sin x}+\mathrm{i}\frac{\cos^{n+1}(x)-\cos((n+1)x)}{\cos^{n}x\times\sin x}.
\end{aligned}$$

D'où

$$S=\frac{\sin((n+1)x)}{\cos^{n}x\times\sin x} \qquad \text{et} \qquad T=\frac{\cos^{n+1}(x)-\cos((n+1)x)}{\cos^{n}x\times\sin x}$$

BILAN :

$$S=\begin{cases} n+1 & \text{si } x\equiv 0\ [\pi]\\ \dfrac{\sin((n+1)x)}{\cos^{n}x\times\sin x} & \text{sinon}\end{cases} \qquad \text{et} \qquad T=\begin{cases} 0 & \text{si } x\equiv 0\ [\pi]\\ \dfrac{\cos^{n+1}(x)-\cos((n+1)x)}{\cos^{n}x\times\sin x} & \text{sinon}\end{cases}$$

$$\boxed{S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} i(n-j)}$$

On a $S = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i(n-j)$

Exprimons cette somme double comme deux sommes simples en commençant par la variable j

$$S = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} i(n-j)$$

WHY.

$$= \sum_{j=1}^{n} (n-j) \sum_{i=1}^{j} i$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (n-j) \frac{j(j+1)}{2}.$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(n-j)(j^2+j)}_{-j^3 + (n-1)j^2 + nj}$$

$$= \frac{1}{2} \left(- \sum_{j=1}^{n} j^3 + (n-1) \sum_{j=1}^{n} j^2 + n \sum_{j=1}^{n} j \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(- \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n-1)\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n\,\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

= factorisation et mise au m̄ déno
par $n(n+1)$ (à savoir 12)

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{-3n(n+1) + 2(n-1)(2n+1) + 6n}{12}\right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{24}\left(n^2 + n - 2\right)$$

WHY

$$= \frac{n(n+1)(n-1)(n-2)}{24}$$

• La première somme

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{j}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j} i\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{j+1}{2}\\
&= \frac{n(n+3)}{4}
\end{aligned}$$

• La troisième somme
Par sommation par paquets, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} |i-j| &= \sum_{i<j}|i-j| + \sum_{i=j}|i-j| + \sum_{j<i}|i-j|\\
&= 2\sum_{i<j}|i-j|\\
&= 2\sum_{i<j}(j-i)\\
&= 2\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i+1}^{n}(j-i)\right)\\
&= 2\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n-i}k\right) && [k=j-i]\\
&= 2\sum_{i=1}^{n}\frac{(n-i)(n-i+1)}{2}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(i^2-(2n+1)i+n(n+1)\right)\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - (2n+1)\frac{n(n+1)}{2} + n(n+1)n\\
&= \frac{n(n+1)(n-1)}{3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j)}$$

On a toujours :

$$\sum_{i,j} \cdots = \sum_{i<j} \cdots + \sum_{i=j} \cdots + \sum_{i>j} \cdots$$

De plus, qd $i<j$, $\min(i,j) = i$

qd $i=j$, $\min(i,j) = i = j$

qd $i>j$, $\min(i,j) = j$

Ainsi :

$$\sum_{i,j} \min(i,j) = \underbrace{\sum_{i<j} i} + \sum_{i=j} i + \underbrace{\sum_{i>j} j}$$

- Ces deux sommes sont égales à $\sum_{k<l} k$ (WHY ?)

- la somme $\sum_{i=j} i$ est une somme simple et vaut $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

On a donc le résultat partiel :

$$\sum_{i,j} \min(i,j) = 2\sum_{k<l} k + \frac{n(n+1)}{2}$$

Calculons à présent $\sum_{k<l} k$.

Cette somme double vaut $\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=k+1}^{n} k$

ou encore $\sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{l-1} k$. Quelle expression "choisir" ?
(il y en a peut-être une meilleure que l'autre !)

Ici, on peut se dire que la 1ère expression est mieux mais je vous invite à regarder la 2ème aussi !

$$\sum_{k<l} k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\underline{l}=k+1}^{n} \underbrace{k}_{\text{indépendant de } l}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(k \sum_{l=k+1}^{n} 1 \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{k \left[n - (k+1) + 1 \right]}_{-k^2 + nk}$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} k^2 + n \sum_{k=1}^{n} k$$

$$\sum_{k<\ell} k = -\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n \times \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{6}\Big(-(2n+1) + 3n \Big)$$

$$= \frac{n(n+1)(n-1)}{6}$$

Reprenons :

$$\sum_{i,j} \min(i,j) = 2\,\frac{n(n+1)(n-1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{6}\Big[2(n-1) + 3 \Big]$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Rmq Il est absolument dingue que l'on retrouve la somme des carrés. On vient de montrer, sans le savoir, que $\sum_{i,j} \min(i,j) = \sum_{k=1}^{n} k^2$

1. On pose $A_{-1} = 0$ de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = A_n - A_{n-1}$.
   On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_k B_k &= \sum_{k=0}^{n} \left(A_k - A_{k-1}\right) B_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} A_k B_k - \sum_{k=0}^{n} A_{k-1} B_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} A_k B_k - \sum_{j=-1}^{n-1} A_j B_{j+1} && [j = k-1] \\
&= \sum_{k=0}^{n} A_k B_k - \sum_{j=0}^{n-1} A_j B_{j+1} && \text{terme pour } j = -1 \text{ est nul} \\
&= A_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k \left(B_k - B_{k+1}\right) && \text{paquets dans la } 1^{\text{ère}} \text{ somme puis linéarité} \\
&= A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k && \text{définition de } b_k
\end{aligned}$$

   Résumons : pour faire ce calcul, il faut essayer de ne pas faire apparaître de somme double, autrement dit il faut transformer a_k en $A_k - A_{k-1}$.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $a_k = 2^k$ et $B_k = k$.
   Alors $A_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$ et $b_n = B_{n+1} - B_n = (n+1) - n = 1$.
   D'après la question 1, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k 2^k &= \left(2^{n+1} - 1\right) n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(2^{k+1} - 1\right) \\
&= \left(2^{n+1} - 1\right) n - 2\left(2^n - 1\right) + n \\
&= 2^{n+1}(n-1) + 2
\end{aligned}$$

118

1. $T_1 = 0$ (la somme porte sur l'ensemble vide)
   $T_2 = 1 \times 2 = 2$
   $T_3 = 1 \times 2 + 1 \times 3 + 2 \times 3 = 11$
2. $T_n = \sum_{j=1}^{n} j\Big(\sum_{i=1}^{j-1} i\Big) \;=\; \sum_{j=1}^{n} j \times \frac{j(j-1)}{2} \;=\; \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j^3 - j^2) \;=\; \ldots \;=\; \frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{24}$

119

1. On a :

$$
\begin{aligned}
z &\overset{\text{déf}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} (-1)^k \;+\; \mathrm{i} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k \\
&\overset{\text{rmq}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} \mathrm{i}^{2k} \;+\; \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} \mathrm{i}^{2k+1} \\
&= \sum_{\substack{p \in [\![0,\, 2n+1]\!] \\ p \text{ pair}}} \binom{2n+1}{p} \mathrm{i}^p \;+\; \sum_{\substack{q \in [\![0,\, 2n+1]\!] \\ q \text{ impair}}} \binom{2n+1}{q} \mathrm{i}^q \\
&= \sum_{\substack{r \in [\![0,\, 2n+1]\!] \\ r \text{ pair ou } r \text{ impair}}} \binom{2n+1}{r} \mathrm{i}^r \\
&= \sum_{r=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{r} \mathrm{i}^r \\
&\overset{\text{Newton}}{=} (1+\mathrm{i})^{2n+1}
\end{aligned}
$$

2. On a $R_n^2 + I_n^2 = |z|^2 = \left|(1+\mathrm{i})^{2n+1}\right|^2 = \left(|1+\mathrm{i}|^2\right)^{2n+1} = 2^{2n+1}$.

Supposons par l'absurde que $\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{i\theta_k}}{2^k} = 0$.

On peut écrire l'égalité sous la forme $\frac{e^{i\theta_1}}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{e^{i\theta_k}}{2^k} = 0$, donc

$$(\star) \qquad -\frac{e^{i\theta_1}}{2} = \sum_{k=2}^{n} \frac{e^{i\theta_k}}{2^k}.$$

Or,

— d'un côté, $\left|-\frac{e^{i\theta_1}}{2}\right| = \frac{1}{2}$;

— de l'autre,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=2}^{n} \frac{e^{i\theta_k}}{2^k}\right| &\leqslant \sum_{k=2}^{n} \left|\frac{e^{i\theta_k}}{2^k}\right| && \text{(inégalité triangulaire)} \\
&\leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^k} \\
&\leqslant \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \\
&\leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} \\
&< \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

ainsi, on obtient une contradiction en appliquant le module de part et d'autre de l'égalité $(\star)$, ce qui conclut la preuve.