Applications

I. Généralités

Dans toute cette section, E, F, G et H désignent des ensembles.

- Une *application* f de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F.

  On note $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$

  — E est appelé l'*ensemble de départ* de f, et F son *ensemble d'arrivée*;

  — pour $x \in E$, l'unique élément $y \in F$ associé à x par f est appelé *image de x* par f et se note $f(x)$; on dit alors que x est *un antécédent* de y par f ;

  — l'ensemble $\Gamma = \{(x, f(x)),\ x \in E\}$ est appelé le *graphe* de f ;

  — l'ensemble $\{y \in F \mid \exists x \in E,\ y = f(x)\} = \{f(x),\ x \in E\}$ est un sous-ensemble de F, appelé l'*image* de f ;

- L'ensemble des applications de E dans F se note F^E ou encore $\mathscr{F}(E, F)$.
- Pour montrer l'égalité de deux applications $f : E \to F$ et $g : E' \to F'$, il faut :

  — prouver l'égalité des ensembles de départ, c'est-à-dire $E = E'$,

  — prouver l'égalité des ensembles d'arrivée, c'est-à-dire $F = F'$,

  — prouver que $\forall x \in E,\ f(x) = g(x)$.

1 Exemples.

Soit E un ensemble.

- L'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ est appelée *identité de* E, et notée id_E.
- Pour $A \in \mathscr{P}(E)$, on peut définir l'application $\begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ X & \longmapsto & X \cap A \end{array}$
- L'application

  $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

  est correctement définie, et peut se réécrire :

  $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & t \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } x = t^2 \end{array}$$

  En revanche :

  — écrire

  $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & t \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } x = t^2 \end{array}$$

  ne définit pas une application car, par exemple, l'image de -1 n'est pas définie ;

  — écrire

  $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & t \in \mathbb{R} \text{ tel que } x = t^2 \end{array}$$

  ne définit pas non plus une application ; en effet, l'image, par exemple, de 4, n'est pas correctement définie car il existe deux valeurs de t telles que $t^2 = 4$.

- L'ensemble $\Gamma = \{(t^2, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ ne peut pas être le graphe d'une application car l'image de 1, par exemple, ne serait pas correctement définie.

Restriction et prolongement

2 **Définition.** Soit f une application de E vers F.

— Soit A une partie de E. La *restriction* de f à A, notée $f_{|A}$, est l'application de A dans F définie par :
$$\forall x \in A,\ f_{|A}(x) = f(x).$$

— Soit E' un ensemble contenant E. **Un** *prolongement* de f est **une** application g définie sur E' vérifiant :
$$\forall x \in E,\ g(x) = f(x).$$

— Soit B une partie de F. Si l'image de f est incluse dans B, on peut définir la *co-restriction* de f à B, notée $f^{|B}$, qui est l'application de E dans B définie par :
$$\forall x \in E,\ f^{|B}(x) = f(x).$$

Composition d'applications

3 **Définition.** Soit $f \in F^E$ et $g \in G^F$.
L'application $\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & g\big(f(x)\big) \end{array}$ est appelée *composée des applications* g et f ; on la note $g \circ f$.

- Pour tout $f \in F^E$, on a $f \circ \mathrm{Id}_E = f$ et $\mathrm{Id}_F \circ f = f$.
- Si $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ et $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array}$ alors on a :
$$g \circ f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2+1 \end{array} \qquad \text{et} \qquad f \circ g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x+1)^2 \end{array}$$
Ainsi, $g \circ f \neq f \circ g$, car ...
- **Abus de langage.** En pratique, on peut utiliser la composition des applications dans un cadre plus large que celui de la définition.
Si f et g sont deux applications définies respectivement sur E et F, alors il est possible de parler de $g \circ f$ dès que l'image de f est incluse dans l'ensemble de départ de g c'est-à-dire dès que $\forall x \in E,\ f(x) \in F$.
Par exemple, soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$ et $g : \begin{array}{rcl} [-2,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{2+x} \end{array}$
Alors, on peut très bien considérer la « composée naturelle » :
$$g \circ f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{2+\sin x} \end{array}$$

4 **Attention.** En général, même lorsque les composées $g \circ f$ et $f \circ g$ existent, il n'y a aucune raison que $g \circ f = f \circ g$.
sol → 13
Soit E un ensemble contenant au moins deux éléments distincts a et b.
Construire deux applications $f \in E^E$ et $g \in E^E$ telles que $f \circ g \neq g \circ f$.

5 **Proposition.** Soit $f \in F^E$, $g \in G^F$ et $h \in H^G$. Alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

- Dans la pratique, on invoque cette propriété en disant « par associativité de la composition ».

6 **Exercice.** Soit E un ensemble non vide contenant un certain x_0.

On définit l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ A & \longmapsto & \begin{cases} A & \text{si } x_0 \in A \\ \overline{A} & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$

Calculer $f \circ f$.

Décrire l'image de f.

II. Image directe, image réciproque

7 **Définition.** Soit $f \in F^E$ et A une partie de E.

On appelle *image directe* de A par f, et l'on note $f(A)$, la partie de F définie par :

$$f(A) = \left\{f(x),\ x \in A\right\}.$$

- Pour tout $x \in E$, on a $f\big(\{x\}\big) = \big\{f(x)\big\}$.
- Si A et B sont deux parties de E telles que $A \subset B$, alors $f(A) \subset f(B)$.
- Une partie A de E est dite *stable par* f si $f(A) \subset A$.

8 **Exemple.**

Si f est la fonction carrée, alors

$$f\big([-2,2]\big) = \{x^2,\ x \in [-2,2]\} = [0,4] \qquad \text{et} \qquad f\big([-1,2]\big) = \{x^2,\ x \in [-1,2]\} = [0,4].$$

De manière générale, $f(A) = f(B)$ n'implique pas $A = B$.

De même, $f(A) \subset f(B)$ n'implique pas $A \not\subset B$.

9 **Question.**

Soit A et B deux parties de E et $f \in F^E$. Montrer que :

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \qquad \text{et} \qquad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

En considérant la fonction carrée, donner un exemple où l'inclusion $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ est stricte.

10 **Définition.** Soit $f \in F^E$ et B une partie de F.

On appelle *image réciproque* de B par f, et l'on note $f^{-1}(B)$, la partie de E définie par :

$$f^{(-1)}(B) = \Big\{x \in E,\ f(x) \in B\Big\}.$$

- Soit $B \subset F$ et $x \in E$. On a $x \in f^{(-1)}(B) \iff f(x) \in B$.
- On a $f^{(-1)}(\emptyset) = \emptyset$ et $f^{(-1)}(F) = E$.
- Soit $y \in F$. L'ensemble $f^{(-1)}\big(\{y\}\big)$, l'image réciproque du singleton $\{y\}$ par f, est l'ensemble des antécédents de y. Il peut être vide (si y n'a pas d'antécédent par f), ou bien contenir un ou plusieurs éléments.
- Si A et B sont deux parties de F telles que $A \subset B$, alors $f^{(-1)}(A) \subset f^{(-1)}(B)$.

11 **Exemple.** Soit f la fonction carrée.

$$\begin{aligned} f^{(-1)}\big(\{4\}\big) &= \{-2,2\} \\ f^{(-1)}\big([0,4]\big) &= \big\{x\in\mathbb{R},\ x^2\in[0,4]\big\} = [-2,2] \\ f^{(-1)}\big([-2,4]\big) &= \big\{x\in\mathbb{R},\ x^2\in[-2,4]\big\} = [-2,2] \\ f^{(-1)}\big([-2,-1]\big) &= \big\{x\in\mathbb{R},\ x^2\in[-2,-1]\big\} = \varnothing. \end{aligned}$$

Montrer que $f^{(-1)}(A) = f^{(-1)}(B)$ n'implique pas $A = B$.
De même, montrer que $f^{(-1)}(A) \subset f^{(-1)}(B)$ n'implique pas $A \subset B$.

12 **Question.** Soit $f \in F^E$ ainsi que A et B deux parties de F. Montrer que

$$f^{(-1)}(A\cup B) = f^{(-1)}(A)\cup f^{(-1)}(B) \qquad f^{(-1)}(A\cap B) = f^{(-1)}(A)\cap f^{(-1)}(B) \qquad f^{(-1)}(\overline{A}) = \overline{f^{(-1)}(A)}.$$

13 **Vrai/Faux.**

Si $x \in A$, alors $f(x) \in f(A)$ ....

Si $f(x) \in f(A)$, alors $x \in A$ ....

Si $x \in f^{(-1)}(B)$, alors $f(x) \in B$ ....

Si $f(x) \in B$, alors $x \in f^{(-1)}(B)$ ....

14 **Question.** Soit $f \in F^E$, $A \subset E$ et $B \subset F$. Montrer que

$$A \subset f^{(-1)}\big(f(A)\big) \qquad\qquad f\big(f^{(-1)}(B)\big) \subset B$$

III. Injectivité, surjectivité, bijectivité

Injectivité

15 **Définition.** Soit $f \in F^E$. On dit que f est *une application injective*, ou que f est une *injection*, lorsque

— tout élément de F possède *au plus* un antécédent par f

ou encore

— pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ possède *au plus* une solution

ou encore

— $\forall\, x, x' \in E,\ f(x) = f(x') \implies x = x'$

- L'application Id_E est évidemment injective.
- Si D est une partie quelconque de $\mathbb{R}$ et si $f \in \mathbb{R}^D$ est strictement monotone, alors elle est injective.
- La fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas injective car ...
- Une application $f \in F^E$ n'est pas injective si et seulement si

$$\exists\,(x,x')\in E^2, \quad x \neq x' \ \text{ et } \ f(x) = f(x')$$

16 **Question** Soit $A \in \mathscr{P}(E)$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ X & \longmapsto & X\cap A \end{array}$
sol → 13
Montrer que l'application f est injective si et seulement si $A = E$.
Montrer que l'application f est surjective si et seulement si $A = E$.

Surjectivité

17 **Définition.** Soit $f \in F^E$. On dit que f est *une application surjective*, ou que f est une *surjection*, lorsque

— tout élément de F possède *au moins* un antécédent par f

ou encore

— pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ possède *au moins* une solution

ou encore

— $\forall\, y \in F,\ \exists\, x \in E,\ y = f(x)$

- La fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas surjective car...
- L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ t & \longmapsto & t^2 \end{array}$

  — est surjective car tout élément de $\mathbb{R}_+$ possède au moins un antécédent,

  — n'est pas injective car -1 et 1 ont même image.

18 sol → 13 **Question.** Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y,\ xy) \end{array}$ L'application f est-elle injective ? surjective ?

Bijectivité

19 **Définition.** Soit $f \in F^E$. On dit que f est *une application bijective*, ou que f est une *bijection*, lorsque

— tout élément de F possède *exactement* un antécédent par f

ou encore

— pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ possède *exactement* une solution

ou encore

— $\forall\, y \in F,\ \exists!\, x \in E,\ y = f(x)$

- L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ t & \longmapsto & t^2 \end{array}$ est bijective car tout élément de $\mathbb{R}_+$ possède un unique antécédent (sa racine carrée).
- Aucune des trois applications :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$$

  n'est bijective, mais l'application $\begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$ l'est.

20 **Question.** Soit a, b, c, d quatre réels tels que $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$.

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{\frac{-d}{c}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{ax + b}{cx + d} \end{array}$

Vérifier que f est bien définie. Puis montrer que f est bijective.

IV. Propriétés

Propriétés liées à la composition

21 **Proposition.**
Soit $f \in F^E$ et $g \in G^F$.

1. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
3. Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

- Le point 1 se retient en disant

  La composée de deux injections est une injection.
- On pourrait retenir le point 2 sous la forme

  La composée de deux surjections est une surjection.

  C'est dangereux à cause de l'exemple suivant.
  Les applications

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array} \qquad \text{et} \qquad g: \begin{array}{ccc} [-2,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{2+x} \end{array} \qquad \text{sont surjectives.}$$

  Mais leur « composée naturelle »

$$g \circ f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{2+\sin x} \end{array} \qquad \text{n'est pas surjective.}$$

  Bref, si l'on veut résumer le point 2 en français, il faut dire :

  La composée de deux surjections, dont l'ensemble d'arrivée de la première est l'ensemble de départ de la seconde, est une surjection.
- Idem pour le point 3.

  La composée de deux bijections, dont l'ensemble d'arrivée de la première est l'ensemble de départ de la seconde, est une bijection.

  Méditer l'exemple suivant. Les applications

$$f: \begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array} \qquad \text{et} \qquad g: \begin{array}{ccc} [-2,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{2+x} \end{array} \qquad \text{sont bijectives.}$$

  Mais leur « composée naturelle »

$$g \circ f: \begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{2+\sin x} \end{array} \qquad \text{n'est pas bijective.}$$

22 **Exercice.**
Soit $f \in F^E$ et $g \in G^F$.

1. Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
2. Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
3. Si $g \circ f$ est bijective, alors f est injective et g est surjective.

23 **Attention.**

1) Si $g \circ f$ est injective, alors g n'est pas forcément injective.
Par exemple, $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ldots\ldots \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ldots\ldots \end{array}$

2) Si $g \circ f$ est surjective, alors f n'est pas forcément surjective.
Par exemple, $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^x - 1 \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$

24 **Question.** Prenons $f \in F^E$ et $g \in E^F$.
On suppose que $g \circ f = \mathrm{id}_E$. Que peut-on dire d'intelligent sur f et g en termes de (inj/surj/bij)-ectivité ?

Retour sur la bijectivité

25 **Définition.** Soit f une application bijective de E dans F.
L'application de F dans E qui, à tout $y \in F$, associe l'unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$, s'appelle *l'application réciproque* de f et se note f^{-1}.

- Si on prouve la bijectivité de f en montrant que pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ possède une unique solution x exprimée en fonction de y, alors on a déterminé f^{-1}.
- Dit autrement, lorsque f est bijective, l'application réciproque f^{-1} est donc définie par :

$$f^{-1} : \begin{array}{ccl} F & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & \text{l'unique } t \in E \text{ tel que } f(t) = y \end{array}$$

- Il faut s'empêcher de parler de f^{-1} tant que l'on n'a pas justifié la bijectivité de f.
Dans une copie, on écrira souvent :

Comme f est bijective, on peut considérer f^{-1}.

26 **Exemples.**

- L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ t & \longmapsto & t^2 \end{array}$ est bijective. Son application réciproque est $f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$
- L'application $f : \begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$ est bijective. Son application réciproque est notée arcsin.
- L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^- & \longrightarrow & [1, +\infty[\\ t & \longmapsto & t^2 + 1 \end{array}$ est bijective. Son application réciproque est ...

27 **Proposition.** Soit $f \in F^E$ bijective.
Alors

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$$

28 **Proposition.** Soit $f \in F^E$ et $g \in E^F$ deux applications telles que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$.
Alors les applications f et g sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.

- **Pour la preuve.** Constatons que f et g jouent des rôles symétriques. Il suffit donc de montrer que f est bijective et que son application réciproque f^{-1} vaut g.

- **Si l'on a une des deux égalités.**
On peut très bien avoir l'une des égalités $f \circ g = \mathrm{id}_F$ ou $g \circ f = \mathrm{id}_E$ sans que f et g soient bijectives.
Prenons l'exemple où $f = \exp$ est la fonction exponentielle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} \end{array}$$

est telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ car : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ g(f(x)) = g(\exp x) = \ln(\exp x) = x$.
Néanmoins, la fonction f n'est pas bijective puisque son image, $\mathbb{R}_+^*$, n'est pas égale à $\mathbb{R}$. Cela n'a rien de contradictoire avec la proposition précédente qui réclame les deux hypothèses $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

- **Méthode pour montrer que f est bijective et donner f^{-1}**
Soit $f \in F^E$.
  — Si l'on exhibe une application $g \in E^F$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, alors on peut affirmer que f est bijective et que $f^{-1} = g$.
  — Souvent, la démonstration de la surjectivité de f mène à expliciter une solution de l'équation $f(x) = y$, de la forme $x = g(y)$. On a alors $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et il reste à montrer que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

29 **Proposition.**
1. Si $f \in F^E$ est bijective, alors f^{-1} est bijective et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.
2. **Chaussettes et chaussures.** Si $f \in F^E$ et $g \in G^F$ sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Soit $\varphi : E \to F$ et $\psi : F \to E$ deux applications telles que $\varphi \circ \psi \circ \varphi$ est bijective.
Montrer, sans se fatiguer, uniquement à l'aide des propositions précédentes, que φ et ψ sont bijectives.

Involution

30 **Définition.** Soit f une application de E dans E.
On dit que f est une application *involutive*, ou que f est une *involution* lorsque $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.

- L'application $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ est involutive, donc bijective.
- L'application $\begin{array}{rcl} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ A & \longmapsto & \overline{A} \end{array}$ est involutive, donc bijective.

Application réciproque versus image réciproque

31 **Proposition.** Soit $f \in F^E$ bijective et $B \in \mathscr{P}(F)$.
L'image directe de B par l'application f^{-1} et l'image réciproque de B par f sont égales.
Autrement dit,

$$f^{-1}(B) = f^{(-1)}(B)$$

V. Autres notions

Indicatrice

32 **Proposition.** Soit $A \subset E$.
La *fonction indicatrice* de A est la fonction notée $\mathbb{1}_A$ définie par : $\mathbb{1}_A : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{array}$

- Si A et B sont deux parties de E, alors on a :
  — $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$,
  — pour la réunion $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$,
  — pour le complémentaire $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.
- Pour montrer l'égalité de deux ensembles, on peut montrer l'égalité de leurs fonctions indicatrices.

33 **Question.** Montrer que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \{0,1\}^E \\ A & \longmapsto & \mathbb{1}_A \end{array}$ est bijective.

Famille

34 **Définition.** Si I est un ensemble quelconque, une application de I dans E est appelée *famille d'éléments* de E indexée par I.

- Une famille d'éléments de E indexée par I est donc un élément de E^I, mais l'utilisation du terme *famille* sous-entend que l'on utilise la notation *indexée* $(x_i)_{i\in I}$ au lieu de la notation *fonctionnelle* $\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ i & \longmapsto & x_i \end{array}$
- Une famille d'éléments de E *indexée par* $\mathbb{N}$ est appelée *suite* d'éléments de E.
- Une famille est dite *finie* lorsque l'ensemble I est fini.
  — Lorsque I est de cardinal $p \in \mathbb{N}^*$, on prend le plus souvent $I = [\![1,p]\!]$ et une telle famille est aussi appelée p*-liste* ou p*-uplet*.
  — La famille $(x_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ se note alors couramment $(x_1,\dots,x_p)$; on a une identification naturelle entre E^I, l'ensemble des p-listes d'éléments de E, et le produit cartésien E^p.
- **Vocabulaire.** Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille indexée par un ensemble I, et soit J une partie de I :
  — la famille $(x_i)_{i\in J}$ est appelée *sous-famille* de $(x_i)_{i\in I}$;
  — la famille $(x_i)_{i\in I}$ est appelée *sur-famille* de $(x_i)_{i\in J}$.
- Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on peut définir $f_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x-a| \end{array}$

  La famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est une famille de fonctions (d'éléments de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$) indexée par $\mathbb{R}$.
  La famille $(f_a)_{a\in\mathbb{Z}}$ en est une sous-famille.

Recouvrements, recouvrements disjoints, partitions

35 **Définition.** Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E.

— On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un *recouvrement* de E si $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = E$.

— On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un *recouvrement disjoint* de E si $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de E constitué d'ensembles deux à deux disjoints, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall (i,j)\in I^2, \quad i\neq j \implies A_i\cap A_j=\emptyset.$$

— On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est une *partition* de E si c'est un recouvrement disjoint de E constitué d'ensembles non vides.

36 **Question.** Soit $f : E\to I$ une application surjective.
Pour tout $i\in I$, on pose $A_i = f^{(-1)}(\{i\})$.
Montrer que la famille $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de E.

4

Soit a, b deux éléments distincts de E. Considérons les applications f et g de E vers E, définies par :

$$\forall\, x \in E,\ f(x) = a \text{ et } \forall\, x \in E,\ g(x) = b.$$

On a $(g \circ f)(a) = b$ et $(f \circ g)(a) = a$, ce qui prouve $g \circ f \neq f \circ g$.

16

- Supposons $A = E$, alors f est l'identité de $\mathscr{P}(E)$; elle est donc injective.
- Supposons f injective. On a $f(A) = f(E)$ (car $f(A) = A \cap A = A$ et $f(E) = E \cap A = A$). Par injectivité de f, on a $A = E$.
- Supposons $A = E$, alors f est l'identité de $\mathscr{P}(E)$; elle est donc surjective.
- Supposons f surjective. Montrons que $A = E$. Montrons surtout $E \subset A$! Par injectivité de f, il existe $X_0 \in \mathscr{P}(E)$ tel que $f(X_0) = E$, c'est-à-dire $X_0 \cap A = E$, d'où $E \subset A$.

18

- L'application f n'est pas injective car $f(1,2) = f(2,1)$ alors que $(1,2) \neq (2,1)$.
- L'application f n'est pas surjective car le couple $(0,1)$ n'a pas d'antécédent. En effet, si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifie $(x + y, xy) = (0,1)$, alors on a $y = -x$, donc $xy = -x^2$, puis $x^2 = -1$, ce qui n'est pas possible.