# Applications

## exercices

# Retour sur les ensembles

## 101 Intersection et union indexées par $\mathbb{R}^{*+}$

Montrer que

$$\bigcap_{h\in\mathbb{R}_+^*} ]-h,h[ = \{0\} \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{h\in\mathbb{R}_+^*} ]-h,h[ = \mathbb{R}.$$

## 102 $\mathcal{P}$ calligraphique

Soit $E$ et $F$ deux ensembles.

1. Montrer que $\mathcal{P}(E\cap F) = \mathcal{P}(E)\cap\mathcal{P}(F)$.
2. Montrer que $\mathcal{P}(E\cup F) \supset \mathcal{P}(E)\cup\mathcal{P}(F)$.
3. Donner un exemple où $\mathcal{P}(E\cup F) \neq \mathcal{P}(E)\cup\mathcal{P}(F)$.
4. Prouver que : $(F\subset E \text{ ou } E\subset F) \iff \mathcal{P}(E\cup F) = \mathcal{P}(E)\cup\mathcal{P}(F)$.

## 103 Partition

Soit $f : E \to I$ une application surjective.
Pour tout $i \in I$, on pose $A_i = f^{(-1)}(\{i\})$.
Montrer que la famille $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de $E$.

# Des applications « concrètes »

## 104 Rapide !

Peut-on trouver $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall\,\theta\in\mathbb{R},\ \cos\theta = f(\sin\theta)$ ?

## 105 Quizz

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$\begin{array}{rccc} f_1 : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \exp(x) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} f_2 : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \exp(z) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} f_3 : & \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+y,x-y) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} f_4 : & \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+y,xy) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} f_5 : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+y,xy) \end{array}$$

## 106 Une application bijective sur $(\mathbb{R}^*)^2$

Soit $f : \mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*$ définie par $f(x,y) = (xy, xy^2)$.
Montrer que $f$ est bijective et déterminer $f^{-1}$.

## 107 Proposez un candidat !

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par

$$f : n \longmapsto \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

En une phrase, dire pourquoi $f$ est bien définie. Montrer que $f$ est bijective et donner $f^{-1}$.

## 108 C'est l'identité que dans un sens !

Considérons

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & n & \longmapsto & n+1 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \tau : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & n & \longmapsto & \begin{cases} n-1 & \text{si } n\geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

1. Déterminer les applications $\tau\circ\sigma$ et $\sigma\circ\tau$.
2. L'application $\sigma$ est-elle bijective ? Et l'application $\tau$ ?

## 109 Homographie du disque unité

On note $\mathbb{D}$ (respectivement $\mathbb{U}$) l'ensemble des complexes de module inférieur ou égal à 1 (resp. égal à 1) ; autrement dit

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

Soit $a \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{U}$. Considérons $f_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \longrightarrow & \mathbb{D} \\ z & \longmapsto & \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z} \end{array}$

1. Montrer que pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, on a
$$|1 - \overline{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$$
2. En déduire que $f_a$ est bien définie.
3. Montrer que $f_a$ est une application bijective et déterminer $f_a^{-1}$.
4. Existe-t-il $b \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{U}$ tel que $f_a^{-1} = f_b$ ?
5. Déterminer l'image réciproque de $\mathbb{U}$ par $f_a$, notée $f_a^{(-1)}(\mathbb{U})$.

## 110 Dans $\mathcal{P}(E)$ — seul

Soit $E$ un ensemble non vide contenant un certain $x_0$.
Considérons l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ A & \longmapsto & \begin{cases} A & \text{si } x_0 \in A \\ \overline{A} & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$

1. L'application $f$ est-elle surjective ?
2. L'application $f$ est-elle injective ?

# Des applications « abstraites »

## 111 Une inclusion toujours vraie — seul

Soit $A$ une partie de $E$ et $f \in F^E$.

1. Montrer l'inclusion $f(E) \setminus f(A) \subset f(\overline{A})$.
2. Donner un exemple où l'inclusion précédente est stricte.

## 112 Avec le complémentaire

Soit $f : E \to F$ et $A \subset E$.

1. Montrer l'implication $\quad f$ injective $\implies f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
2. Montrer l'implication $\quad f$ surjective $\implies \overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$.

## 113 Avec l'image réciproque

Soit $f : E \to F$.

1. Montrer que $\left(\forall A \in \mathcal{P}(E),\ f^{(-1)}\big(f(A)\big) = A\right) \iff f$ injective
2. Dans le même esprit, caractériser la surjectivité de $f$.

## 114 Injectivité et intersection

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$. Montrer que $f$ est injective si et seulement si

$$\forall\, (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2,\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

## 115 Composées

Soit $E$, $F$ et $G$ trois ensembles, ainsi que $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$.

1. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et $g$ injective, alors $f$ est surjective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est injective et $f$ surjective, alors $g$ est injective.

## 116 Composée 3 fois

Soit $f \in E^E$ telle que $f \circ f \circ f = f$.
Montrer que $f$ est injective si et seulement si $f$ est surjective.

# Autres

## 117 $\mathbb{N}^2$ est en bijection avec $\mathbb{N}$

Soit $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^*$, $(n,p) \mapsto 2^n(2p+1)$.
Démontrer que $f$ est une bijection.
En déduire une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.

## 118 Une application $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{Q}$

Soit $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$, $(p,q) \mapsto p + \frac{1}{q}$. L'application $f$ est-elle injective, surjective ?

## 119 Analyse-Synthèse

Trouver toutes les applications injectives $f$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que

$$(\star) \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \leqslant n$$

## 120 $[0,1]$ est en bijection avec $[0,1[$

1. Déterminer une bijection de $\{\frac{1}{n}, n \geqslant 1\}$ dans $\{\frac{1}{n}, n \geqslant 2\}$.
2. Déduire de la question précédente une bijection de $[0,1]$ dans $[0,1[$.

On pourra noter $A$ le complémentaire de $\{\frac{1}{n}, n \geqslant 1\}$ dans $[0,1]$.

## 121 Théorème de Cantor

1. Construire une injection de $E$ dans $\mathcal{P}(E)$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de bijection de $E$ sur $\mathcal{P}(E)$.
   Pour cela, raisonner par l'absurde en considérant une bijection $f : E \to \mathcal{P}(E)$ et considérer $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$.

## 122 Traces sur les parties de $E$

Soit $(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$. On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A\,,\, X \cap B). \end{array}$

1. Montrer que $f$ est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Montrer que $f$ est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
3. Dans le cas où $f$ est bijective, expliciter $f^{-1}$.

## 123 Produit cartésien d'applications

Soit $E, F, G$ trois ensembles quelconques et $f : E \to F$ et $g : E \to G$ deux applications.
On considère l'application $h : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \times G \\ t & \longmapsto & \big(f(t),\, g(t)\big) \end{array}$

1. Prenons un exemple avec $E = \mathbb{R}$, $F = G = \mathbb{R}^+$, $f : t \mapsto t^2$ et $g : t \mapsto (t+1)^2$.
   Ainsi $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ t & \longmapsto & \big(t^2,\, (t+1)^2\big) \end{array}$
   (a) Calculer $h(2)$.
   (b) Déterminer les antécédents de $(\frac{1}{4}, 1)$ par $h$.
   (c) L'application $h$ est-elle surjective ?
   (d) L'application $h$ est-elle injective ?

On revient au cas général.

2. (a) Montrer que si $f$ **ou** $g$ est injective, alors $h$ est injective.
   (b) La réciproque est-elle vraie ?
3. (a) Montrer que si $h$ est surjective, alors $f$ **et** $g$ sont surjectives.
   (b) La réciproque est-elle vraie ?

## 124 Point fixe

Soit $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ une application croissante pour l'inclusion.
Montrer que $f$ admet un point fixe.

Indication : considérer $\mathcal{W} = \left\{ A \in \mathcal{P}(E) \mid A \subset f(A) \right\}$ et montrer que $W$ est stable par $f$ et par réunion.

## 125

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement monotone.
Montrer que $f$ est injective.

## 126 Applications images

Soit $E$ et $F$ deux ensembles et $f : E \to F$. On considère les applications

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(F) \\ & X & \longmapsto & f[X] \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rccc} \psi : & \mathscr{P}(F) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ & Y & \longmapsto & f^{-1}[Y] \end{array}$$

1. Montrer les équivalences $f$ injective $\iff$ $\phi$ injective $\iff$ $\psi$ surjective.
2. Montrer les équivalences $f$ surjective $\iff$ $\phi$ surjective $\iff$ $\psi$ injective.

# Applications

corrigés

**101**

Montrons $\bigcap_{h\in\mathbb{R}_+^*} ]-h,h[ = \{0\}$.

Il s'agit d'une égalité entre deux ensembles.

On peut procéder par double inclusion (cela fonctionne très bien).

On peut également reformuler l'égalité avec une équivalence. Pour $x \in \mathbb{R}$, il s'agit de montrer que

$$x \in \bigcap_{h\in\mathbb{R}_+^*} ]-h,h[ \iff x = 0$$

Pour montrer cette équivalence on montre les deux implications suivantes :

$$x = 0 \implies \forall\, h \in \mathbb{R}_+^*,\ x \in ]-h,h[ \qquad \text{et} \qquad x \neq 0 \implies \exists\, h \in \mathbb{R}_+^*,\ x \notin ]-h,h[$$

Essayer de comprendre comment se traduisent ces deux implications sur l'égalité d'ensemble.

— Évidemment, on a $\forall\, h \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 \in ]-h,h[$.

— Soit $x \neq 0$. En posant $h = \dfrac{|x|}{2}$ qui est bien $> 0$ (car $x \neq 0$), on a $x \notin ]-h,h[$.

Montrons $\bigcup_{h\in\mathbb{R}_+^*} ]-h,h[ = \mathbb{R}$.

$\boxed{\subset}$ Il est évident que $\bigcup_{h\in\mathbb{R}_+^*} ]-h,h[ = \mathbb{R}$.

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in \mathbb{R}$, alors en posant $h_0 = |x| + 1$, on a $x \in ]-h_0,h_0[$, donc a fortiori, $x \in \bigcup_{h\in\mathbb{R}_+^*} ]-h,h[$.

## 102

1. Soit $A$ un ensemble. On a les équivalences :

$$A \in \mathcal{P}(E \cap F) \iff A \subset E \cap F \iff A \subset E \text{ et } A \subset F \iff A \in \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F).$$

2. Soit $A \in \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$. Montrons que $A \in \mathcal{P}(E \cup F)$ par disjonction de cas :
   - si $A \in \mathcal{P}(E)$, alors $A \subset E$, donc $A \subset E \cup F$ ;
   - si $A \in \mathcal{P}(F)$, alors $A \subset F$, donc $A \subset E \cup F$.
3. Si l'on prend $E = \mathbb{R}_-$ et $F = \mathbb{R}_+$, alors :

$$[-1, 1] \in \mathcal{P}(E \cup F) \qquad \text{mais} \qquad [-1, 1] \notin \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F).$$

4. — Supposons $F \subset E$ ou $E \subset F$.

   **Cas $F \subset E$.** On a d'une part $E = E \cup F$, donc $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(E \cup F)$. D'autre part, $\mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E)$ donc $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(E \cup F)$.

   **Cas $E \subset F$.** Alors $\mathcal{P}(E \cup F) = \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$.

   — Pour montrer l'autre implication, raisonnons par contraposition. Supposons $F \not\subset E$ et $E \not\subset F$. Il existe alors $e \in E \setminus F$ et $f \in F \setminus E$, et en posant $A = \{e, f\}$, on a :

$$A \in \mathcal{P}(E \cup F) \text{ et } A \notin \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F),$$

   ce qui montre que $\mathcal{P}(E \cup F) \neq \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$.

**104**

La réponse est non. Montrons-le par l'absurde. Si une telle fonction $f$ existait, alors :

— en remplaçant $\theta$ par 0, on devrait avoir $f(0) = 1$,

— en remplaçant $\theta$ par $\pi$, on devrait avoir $f(0) = -1$,

ce qui est contradictoire.

## 110

1. $f$ n'est pas surjective.
   La partie vide n'est pas dans l'image de $f$.
   Prouvons-le en utilisant un raisonnement par l'absurde.
   Supposons qu'il existe $A \in \mathcal{P}(E)$ tel que $f(A) = \emptyset$.
   Distinguons deux cas.
   Si $x_0 \in A$, alors $f(A) = A$. Or $f(A) = \emptyset$. D'où $A = \emptyset$. Ainsi, l'ensemble vide contient $x_0$. C'est absurde.
   Si $x_0 \notin A$, alors $x_0 \in \overline{A}$ et $f(A) = \overline{A}$. Or $f(A) = \emptyset$. D'où $\overline{A} = \emptyset$ et alors l'ensemble vide contient $x_0$. C'est absurde.
2. $f$ n'est pas injective.
   En effet, $f(\emptyset) = E$ et $f(E) = E$ et pourtant $E \neq \emptyset$ (d'après l'énoncé).

**111**

1. Soit $y \in f(E) \setminus f(A)$. Comme $y \in f(E)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
   Comme $y \notin f(A)$, on a $x \notin A$ (raisonner par l'absurde : si $x$ était dans $A$, alors…).
   On en déduit que $x \in \overline{A}$ puis $y \in f(\overline{A})$.
2. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ et $A = \mathbb{R}^+$.
   On a alors $f(A) = f(\mathbb{R})$ (car les deux parties sont égales à $\mathbb{R}^+$), donc $f(\mathbb{R}) \setminus f(A) = \emptyset$.
   Pourtant, on a $\overline{A} = \mathbb{R}^{-*}$, donc $f(\overline{A}) = \mathbb{R}^{+*} \neq \emptyset$.

## 113

**Rappel** :
Pour $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(F)$, on a toujours $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$ et $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$.

1. $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons ♠ $\forall\, A \in \mathcal{P}(E),\ f^{-1}\big(f(A)\big) = A$
Montrons que $f$ est injective.

   Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $f(x) \overset{\star}{=} f(x')$.
   On cherche à montrer que $x = x'$, ou encore que $\{x\} = \{x'\}$.
   L'hypothèse $f(x) = f(x')$ se réécrit :

$$\big\{f(x)\big\} \ = \ \big\{f(x')\big\}$$

   Ou encore :

$$f\big(\{x\}\big) \ = \ f\big(\{x'\}\big)$$

   D'où l'égalité des images réciproques suivantes :

$$f^{(-1)}\Big(f\big(\{x\}\big)\Big) \ = \ f^{(-1)}\Big(f\big(\{x'\}\big)\Big)$$

   On applique l'hypothèse ♠, à gauche avec $A = \{x\} \in \mathcal{P}(E)$ et à droite avec $A = \{x'\} \in \mathcal{P}(E)$, et on obtient

$$\{x\} \ = \ \{x'\}$$

   D'où $x = x'$.

   $\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $f$ injective.
   Montrons que $\forall\, A \in \mathcal{P}(E),\ f^{-1}\big(f(A)\big) = A$.

   Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
   On cherche à montrer que $f^{-1}\Big(f(A)\Big) \subset A$ l'autre inclusion est tjs vraie.
   Soit $x \in f^{-1}\Big(f(A)\Big)$. Montrons que $x \in A$
   Par définition de l'image réciproque, on a $f(x) \in f(A)$.
   Donc il existe $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$.
   Par injectivité de $f$, on obtient $x = a \in A$.
   Donc $x \in A$.

2. $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons ♡ $\Big(\forall\, B \in \mathcal{P}(F),\ f\big(f^{-1}(B)\big) = B\ \Big)$.
Montrons que $f$ est surjective.

   Soit $y \in F$.
   On pose $B = \{y\} \subset F$. Appliquons ♡ à cette partie $B$.
   On a alors $y \in f\Big(f^{-1}\big(\{y\}\big)\Big)$.
   En particulier, $f^{-1}\big(\{y\}\big) \neq \emptyset$ en effet, si cette partie était vide, son image directe par $f$ le serait aussi, et ne pourrait pas contenir l'élément $y$
   Puisque $f^{-1}\big(\{y\}\big) \neq \emptyset$, il existe $x \in f^{-1}\big(\{y\}\big)$.
   Ce $x$ est un élément de $E$ qui vérifie $f(x) \in \{y\}$ càd $f(x) = y$.

   $\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $f$ surjective.
   Montrons que $\forall\, B \in \mathcal{P}(F),\ f\big(f^{-1}(B)\big) = B$.

   Soit $B \in \mathcal{P}(F)$.
   On cherche à montrer que $B \subset f\Big(f^{-1}(B)\Big)$ l'autre inclusion est tjs vraie.

   Soit $y \in B$. Montrons que $y \in f\big(f^{-1}(B)\big)$
   Comme $f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
   Donc $x \in f^{-1}(B)$ car $f(x) = y \in B$.
   Comme $y$ s'écrit $f(x)$ avec $x \in f^{-1}(B)$, on a $y \in f\Big(f^{-1}(B)\Big)$.

— Supposons $f$ injective. Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. Montrons que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
  — L'inclusion $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ est vraie en toute généralité.
  Je vous laisse la remontrer.
  — Montrons l'autre inclusion. Soit $y \in f(A) \cap f(B)$. Montrons que $y \in f(A \cap B)$.
    — Comme $y \in f(A)$, on peut trouver $a \in A$ tel que $y = f(a)$.
    — Comme $y \in f(B)$, on peut trouver $b \in B$ tel que $y = f(b)$.
  On a donc $f(a) = f(b)$.
  L'injectivité de $u$ entraîne alors $a = b$. Ainsi, l'élément $a = b$ appartient à $A \cap B$.
  D'où $y \in f(A \cap B)$.
— Montrons l'implication réciproque. Supposons donc :

$$\forall\, (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2,\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

et montrons que $u$ est injective.
Soit $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$.
Posons $A = \{x\}$ et $B = \{x'\}$. D'après l'hypothèse, on a :

$$f\Big(\{x\} \cap \{x'\}\Big) = f(\{x\}) \cap f(\{x'\})$$

A droite, on obtient un ensemble *non vide* par hypothèse, à savoir $\{f(x)\}$, qui vaut aussi $\{f(x')\}$.
Donc à gauche, l'ensemble $\{x\} \cap \{x'\}$ est *non vide*. Donc $x = x'$.
D'où l'injectivité de $f$.

**115**

1. Supposons $g \circ f$ surjective et $g$ injective et prouvons la surjectivité de $f$.
   Soit $y \in F$. Comme $g(y) \in G$, par surjectivité de $g \circ f$, il existe $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = g(y)$.
   On a alors :
   $$g(y) = (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$
   Comme $g$ est injective, on en déduit que $y = f(x)$. Cela prouve que $f$ est surjective.
2. Supposons $g \circ f$ injective et $f$ surjective et prouvons l'injectivité de $g$.
   Soit $(y_1, y_2) \in F^2$ tels que $g(y_1) = g(y_2)$. Comme $f$ est surjective, on peut trouver $x_1 \in E$ et $x_2 \in E$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Comme $g(y_1) = g(y_2)$, on a $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$, ce qui, par injectivité de $g \circ f$, entraîne $x_1 = x_2$.
   Cela prouve que $g$ est injective.

**116**

Supposons $f$ injective.
Montrons que $f$ est surjective.
Soit $y \in E$.
On cherche $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
Comme $f \circ f \circ f = f$, on a $(f \circ f \circ f)(y) = f(y)$.
On écrit cette dernière égalité sous la forme $f\Big(f\big(f(y)\big)\Big) = f(y)$.
Par injectivité de $f$, on a $f\big(f(y)\big) = y$.
Posons $x = f(y)$.

- ⋆ On a $x \in E$
- ⋆ On a $f(x) = f\big(f(y)\big) = y$.

Donc $f$ est surjective.

Supposons $f$ surjective.
Montrons que $f$ est injective.
Soit $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$.
Par surjectivité de $f$, on peut trouver $t \in E$ tel que $x = f(t)$.
Par surjectivité de $f$, on peut trouver $t' \in E$ tel que $x' = f(t')$.
On a alors

$$f\big(f(t)\big) = f\big(f(t')\big)$$

Appliquons $f$, on a alors

$$f\Big(f\big(f(t)\big)\Big) = f\Big(f\big(f(t')\big)\Big)$$

Par hypothèse, on a $f \circ f \circ f = f$, d'où $f(f) = f(t')$.
D'où $x = x'$.

**117**

Tout d'abord, $f$ est bien à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
Montrons que $f$ est injective.
Soient $(n,p)$ et $(m,q)$ deux éléments de $\mathbb{N}^2$ tels que $f(n,p)=f(m,q)$.
Alors on a $2^n(2p+1)=2^m(2q+1)$.
Supposons par exemple $n \geqslant m$. Alors on obtient

$$2^{n-m}(2p+1)=2q+1.$$

Si $n \neq m$, le terme de gauche est pair et celui de droite est impair.
Donc $n=m$.
On obtient alors $2p+1=2q+1$, d'où $p=q$.
Bilan : $(n,p)=(m,q)$.

Montrons que $f$ est surjective.
Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Alors $N$ se décompose en produit de facteurs premiers

$$N=2^n p_2^{\alpha_2}\dots p_r^{\alpha_r},$$

avec $p_i$ des nombres premiers impairs.
Le produit de nombres impairs étant impair, l'entier $p_2^{\alpha_2}\dots p_r^{\alpha_r}$ est impair et s'écrit donc $2q+1$, avec $q \in \mathbb{N}$.
On a donc $N=2^n(2q+1)=f(n,q)$.

Pour trouver une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$, il suffit de composer avec une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$, par exemple l'application $n \mapsto n-1$.
Ainsi, l'application $g : (n,p) \mapsto 2^n(2p+1)-1$ est une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$.

**118**

• Montrons que $f$ est injective.
Soit $(p,q)$ et $(p',q')$ tels que $f(p,q)=f(p',q')$.
On a donc

$$p+\frac{1}{q}=p'+\frac{1}{q'} \text{ c'est-à-dire } p'-p=\frac{1}{q}-\frac{1}{q'}$$

Or $0<\frac{1}{q'}\leqslant 1$ et $-1\leqslant -\frac{1}{q}<0$. Donc, en sommant ces inégalités, on obtient :

$$-1<\frac{1}{q}-\frac{1}{q'}<1$$

On a donc $|p-p'|<1$. Or $p-p'$ est un entier, d'où $p-p'=0$, puis $p=p'$.
En utilisant $f(p,q)=f(p',q')$, on tire $q=q'$.

• Montrons que $f$ n'est pas surjective.
Le rationnel $\frac{2}{3}$ n'a pas d'antécédents.
Raisonnons par l'absurde.
Supposons que $\frac{2}{3}$ s'écrive $p+\frac{1}{q}$ avec $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$.
On a toujours $p<p+\frac{1}{q}\leqslant p+1$. Et comme $p+\frac{1}{q}=\frac{2}{3}$, on aurait nécessairement $p=0$.
D'où $\frac{2}{3}=\frac{1}{q}$ puis $q=\frac{3}{2}$. D'où la contradiction car $q\in\mathbb{N}^*$.

## 119

**Analyse.** Soit $f$ une application injective vérifiant $(\star)$.
Montrons que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.
Par récurrence forte, montrons que

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{H}_p : \text{« } f(p) = p \text{ »}$$

Initialisation. $\mathcal{H}_0$ est vraie. En effet, on a $f(0) \in \mathbb{N}$ et $f(0) \leqslant 0$, d'où $f(0) = 0$.

Hérédité. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_p$ sont vraies. Montrons $\mathcal{H}_{p+1}$.
D'après $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_p$, on a :

$$f(0) = 0, \qquad f(1) = 1, \qquad \ldots \qquad f(p) = p$$

et d'après $(\star)$ avec $n = p + 1$, on a $f(p+1) \in [\![0, p+1]\!]$.
Comme $f$ est injective, l'image de $f(p+1)$ est nécessairement égale à $p + 1$.
D'où $\mathcal{H}_{p+1}$.

Bilan de l'Analyse. Une application injective vérifiant $(\star)$ appartient à $\{\mathrm{id}_{\mathbb{N}}\}$.

**Synthèse.** La fonction identité est injective et vérifie $(\star)$.

**Bilan.** L'ensemble des fonctions vérifiant $(\star)$ est $\{\mathrm{id}_{\mathbb{N}}\}$.

### Autre façon de présenter la solution.

On va montrer que $\Big\{f \text{ injective vérifiant } (\star)\Big\} = \big\{\mathrm{id}_{\mathbb{N}}\big\}$.
Montrons cette égalité par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Soit $f$ une application injective vérifiant $(\star)$.
Montrons que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.
Par récurrence forte etc...

Ainsi, $f$ appartient à $\{\mathrm{id}_{\mathbb{N}}\}$.

$\boxed{\supset}$ La fonction identité est injective et vérifie $(\star)$.

**Bilan.** L'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ injectives vérifiant $(\star)$ est $\{\mathrm{id}_{\mathbb{N}}\}$.

**120**

1. Posons $g : \{\frac{1}{n}, n \geqslant 1\} \to \{\frac{1}{n}, n \geqslant 2\}$, définie par $g : \frac{1}{n} \mapsto \frac{1}{n+1}$.
   Cette application $g$ est bien définie.
   Elle est bijective de bijection réciproque $\frac{1}{n} \mapsto \frac{1}{n-1}$.
2. Notons $A$ le complémentaire de $\left\{\frac{1}{n},\ n \geqslant 1\right\}$ dans $[0,1]$ de sorte que

$$[0,1] = \left\{\frac{1}{n},\ n \geqslant 1\right\} \cup A$$

   Remarquons que $A$ vérifie également :

$$[0,1[ = \left\{\frac{1}{n},\ n \geqslant 2\right\} \cup A$$

   On définit $h : [0,1] \to [0,1[$ de la façon suivante :

$$h : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } x = \frac{1}{n} \\ x & \text{sinon} \end{cases}$$

   Alors $h$ est bien définie.
   Posons $\varphi :$

$$\begin{array}{ccc} [0,1[ & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{n-1} & \text{si } x = \frac{1}{n} \\ x & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

   Alors $\varphi$ est bien définie et on a $h \circ \varphi = \mathrm{id}_{[0,1[}$ et $\varphi \circ h = \mathrm{id}_{[0,1]}$.
   Cela montre que $h$ est bijective.

1. Montrons que $f$ est injective si, et seulement si, $A \cup B = E$.
   — Supposons $f$ injective.
   On a $f(A \cup B) = (A, B) = f(E)$. Par injectivité de $f$, on en déduit $A \cup B = E$.
   — Réciproquement, supposons $A \cup B = E$ et montrons que $f$ est injective.
   Soit $(X_1, X_2) \in \mathcal{P}(E)^2$ tel que $f(X_1) = f(X_2)$ *i.e.* :

$$X_1 \cap A = X_2 \cap A \quad \text{et} \quad X_1 \cap B = X_2 \cap B.$$

   On a alors $\begin{aligned} X_1 &= X_1 \cap E \\ &= X_1 \cap (A \cup B) \\ &= (X_1 \cap A) \cup (X_1 \cap B) \\ &= (X_2 \cap A) \cup (X_2 \cap B) \\ &= X_2 \cap (A \cup B) \\ &= X_2 \cap E \\ &= X_2. \end{aligned}$
   D'où $X_1 = X_2$.
   D'où l'injectivité de $f$.
2. Montrons que $f$ est surjective si, et seulement si, $A \cap B = \emptyset$.
   $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $f$ surjective.
   On peut donc trouver une partie $X \in \mathcal{P}(E)$ telle que $(\emptyset, A \cap B) = f(X)$. On a alors :

$$(\emptyset, A \cap B) = (X \cap A, X \cap B) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} \emptyset = X \cap A \\ A \cap B = X \cap B \end{cases}$$

   En intersectant la première ligne avec $B$ et la seconde avec $A$, on obtient :

$$\begin{cases} \emptyset \cap B &= (X \cap A) \cap B \\ (A \cap B) \cap A &= (X \cap B) \cap A \end{cases}$$

   D'où

$$\begin{cases} \emptyset &= X \cap A \cap B \\ A \cap B &= X \cap A \cap B \end{cases}$$

   D'où $A \cap B = \emptyset$.
   $\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $A \cap B = \emptyset$ et montrons que $f$ est surjective.
   Soit $(Y_1, Y_2) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.
   Posons $X = Y_1 \cup Y_2$.
   ⋆ On a $X \in \mathcal{P}(E)$.
   ⋆ Montrons que $f(X) = (Y_1, Y_2)$. On a

$$X \cap A = (Y_1 \cup Y_2) \cap A = (Y_1 \cap A) \cup (Y_2 \cap A).$$

   — Comme $Y_1 \subset A$, on a $Y_1 \cap A = Y_1$.
   — Comme $Y_2 \subset B$ et $A \cap B = \emptyset$, on a $Y_2 \cap A = \emptyset$.
   On en déduit $X \cap A = Y_1$.
   On prouve de même $X \cap B = Y_2$.
   On en déduit $(Y_1, Y_2) = f(X)$.
   D'où la surjectivité de $f$.
3. L'application $f$ est bijective si, et seulement si, elle est injective et surjective, c'est-à-dire si et seulement si $\begin{cases} A \cup B = E \\ A \cap B = \emptyset \end{cases}$
   Dans ce cas, en examinant la preuve de la surjectivité, on obtient que $f^{-1}$ est l'application :

$$\begin{array}{rccc} f^{-1} : & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ & (Y_1, Y_2) & \longmapsto & Y_1 \cup Y_2 \end{array}$$

**124**

Exercice de colle de François Sarcos (2022-2023, promo 2024)

— Montrons que $\mathcal{W}$ est stable par $f$, càd $\forall\, A \in \mathcal{W},\ A \subset f(A)$.
Soit $A \in \mathcal{W}$.
Puisque $A \in \mathcal{W}$, on a $A \subset f(A)$.
Par croissance de $f$, on a $f(A) \subset f\big(f(A)\big)$.
Donc $f(A) \in \mathcal{W}$.

— Montrons que $\mathcal{W}$ est stable par réunion.
Soit $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{W}^I$. Montrons que $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{W}$.
Par définition de $\mathcal{W}$, on a

$$\forall\, i \in I,\ A_i \subset f(A_i)$$

Par croissance de $f$, comme $A_i \subset \bigcup\limits_{j\in I} A_j$, on a

$$\forall\, i \in I,\ f(A_i) \subset f\Big(\bigcup_{j\in I} A_j\Big)$$

Par transitivité, on a

$$\forall\, i \in I,\ A_i \subset f\Big(\bigcup_{j\in I} A_j\Big)$$

Ainsi, $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \subset f\Big(\bigcup\limits_{j\in I} A_j\Big)$.

— Considérons $R = \bigcup\limits_{A\in\mathcal{W}} A$.

  — Comme $\mathcal{W}$ est stable par réunion, on a $R \in \mathcal{W}$. Ainsi, $R \subset f(R)$.

  — Le point précédent donne $R \in \mathcal{W}$. Comme $\mathcal{W}$ est stable par $f$, on a $f(R) \in \mathcal{W}$. Ainsi, $f(R)$ est une partie de $\mathcal{W}$, donc est dans $R$ (qui est la réunion des parties de $\mathcal{W}$). En maths : $f(R) \subset R$.

  Les deux points précédents fournissent $f(R) = R$.

**125**

Supposons $f$ strictement monotone. On va distinguer deux cas.

— Supposons $f$ strictement croissante. Montrons que $f$ est injective par contraposée, c'est-à-dire montrons

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y \implies f(x) \neq f(y).$$

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \neq y$. Distinguons deux cas.

1. Si $x < y$, la stricte croissance de $f$ entraîne $f(x) < f(y)$.
2. Si $x > y$, la stricte croissance de $f$ entraîne $f(x) > f(y)$.

Dans les deux cas, on a $f(x) \neq f(y)$.

Cela démontre l'injectivité de $f$.

— On peut démontrer exactement de la même façon que si $f$ est strictement décroissante, alors $f$ est injective. Ramenons-nous plutôt astucieusement au cas que nous venons de traiter.

Si $f$ est strictement décroissante, $-f$ est strictement croissante. D'après le cas déjà traité, $-f$ est alors injective.

On a alors $f = (-\mathrm{id}_{\mathbb{R}}) \circ (-f)$. Composée de deux fonctions injectives, $f$ est alors injective.

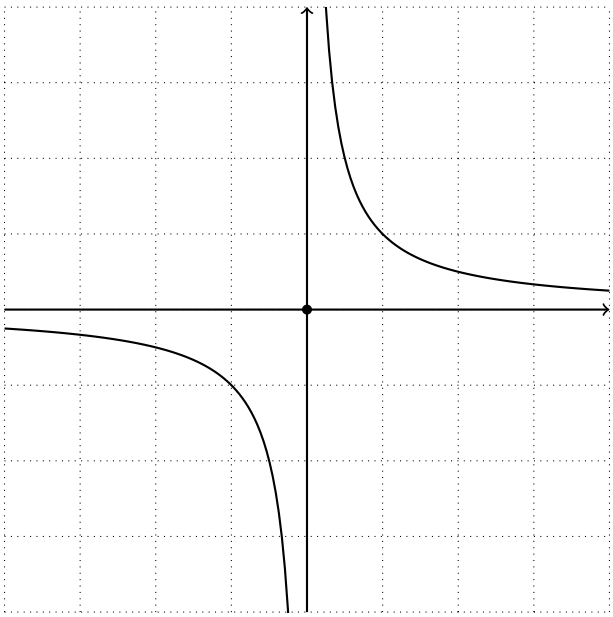
La réciproque de la question précédente est fausse : il existe des fonctions injectives non strictement monotones. C'est par exemple le cas de la fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

Cette fonction est injective (elle est même bijective, ce que l'on peut montrer facilement en vérifiant que $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$), mais elle n'est pas strictement monotone :

— on a $2 > 1$, et pourtant $f(2) \leqslant f(1)$, donc elle n'est pas strictement croissante.

— on a $1 > -1$, et pourtant $f(1) \geqslant f(-1)$, donc elle n'est pas strictement décroissante.



Voilà le plan de démonstration.

1. $f$ injective $\implies$ $\phi$ injective.
2. $\phi$ injective $\implies$ $f$ injective.
3. $f$ injective $\implies$ $\psi$ surjective.
4. $\psi$ surjective $\implies$ $f$ injective (par contraposée).

1. Supposons $f$ injective.
   Soit $X, X' \in \mathscr{P}(E)$ tels que $\phi(X) = \phi(X')$. On a donc $f[X] = f[X']$. Montrons $X = X'$.
   On procède par double inclusion.
   - Soit $x \in X$.
     Puisque $f[X] = f[X']$, l'élément $f(x)$, qui appartient clairement à $f[X]$, doit appartenir à $f[X']$. On peut donc trouver $x' \in X'$ tel que $f(x) = f(x')$.
     Comme $f$ est injective, cette dernière égalité entraîne que $x = x'$, et donc que $x \in X'$.
     On a donc montré l'inclusion $X \subset X'$.
   - On montre exactement de la même façon l'inclusion réciproque $X' \subset X$.

2. Supposons $\phi$ injective.
   Soit $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$.
   Posons[1] $X = \{x\}$ et $X' = \{x'\}$. Ce sont des éléments de $\mathscr{P}(E)$ pour lesquels on a
   $$\phi(X) = f[\{x\}] = \{f(x)\} \quad \text{et} \quad \phi(X') = f[\{x'\}] = \{f(x')\}.$$
   Ainsi, $\phi(X) = \phi(X')$, donc l'injectivité de $\phi$ entraîne que $X = X'$, c'est-à-dire $\{x\} = \{x'\}$.
   On en déduit que $x = x'$.
   On a donc montré l'injectivité de $f$.

3. Supposons $f$ injective.
   Soit $X \in \mathscr{P}(E)$. On a donc $X \subset E$.
   Soit $Y = f[X] = \Big\{ f(x) x \in X \Big\}$. Montrons que $\psi(Y) = X$.
   On procède par double inclusion.
   - Soit $x \in \psi[Y] = f^{-1}[Y]$.
     Par définition, cela signifie que $f(x) \in Y$, c'est-à-dire que $f(x) \in f[X]$.
     On peut donc trouver $x' \in X$ tel que $f(x) = f(x')$.
     Par injectivité de $f$, on en déduit $x = x'$, et donc $x \in X$.
     On a ainsi montré l'inclusion $\psi(Y) \subset X$.
   - Réciproquement, soit $x \in X$.
     On a $f(x) \in f[X] = Y$, donc $x \in f^{-1}[Y]$.
     On a ainsi montré l'inclusion $X \subset \psi(Y)$.

   On en déduit que $\psi(Y) = X$.
   On a donc bien montré la surjectivité de $\psi$.

4. Supposons que $f$ n'est pas injective. On peut donc trouver deux éléments $x \neq x'$ de $E$ tels que $f(x) = f(x')$. Notons $y = f(x) = f(x')$.
   Montrons que $\psi$ n'est pas surjective. Plus précisément, on va montrer que $\{x\}$ n'a pas d'antécédent, c'est-à-dire que $\forall Y \in \mathscr{P}(F), \psi(Y) \neq \{x\}$.
   Pour cela, soit $Y \in \mathscr{P}(F)$. Distinguons deux cas.
   - Si $y \in Y$, alors $x$ et $x'$ appartiennent à $f^{-1}[Y] = \psi(Y)$. Comme $x' \in \psi(Y)$, on a $\psi(Y) \neq \{x\}$.

1. L'hypothèse que nous avons sous la main (l'injectivité de $\phi$) est une assertion quantifiée commençant par un quantificateur existentiel ($\forall X, X' \in \mathscr{P}(E), \phi(X) = \phi(X')$). Comme toute hypothèse de ce type, c'est à nous de trouver des ensembles à qui l'appliquer pour en déduire quelque chose de pertinent. On a ici eu une idée, celle d'appliquer cette hypothèse à nos deux singletons. Cela peut paraître assez malin, mais on constate que c'est en fait presque forcé : dans un contexte aussi abstrait, à quels éléments de $\mathscr{P}(E)$, c'est-à-dire à quelles parties de $E$, pouvons-nous appliquer l'hypothèse ? Les premières parties que nous pouvons nommer sont $\varnothing$ et $X$ ; viennent ensuite les parties que nous pouvons définir à partir de $x$ et $x'$, c'est-à-dire $\{x\}$, $\{x'\}$, $\{x, x'\}$ et leurs complémentaires, puis enfin d'autres parties plus complexes construites à partir de $f$ comme $f^{-1}[f[\{x\}]]$, etc. Se demander naïvement à qui nous pouvons bien appliquer l'hypothèse nous conduit assez directement à la bonne solution.

— Si $y \notin Y$, alors ni $x$ ni $x'$ n'appartient à $f^{-1}[Y] = \psi(Y)$. Comme $x \notin \psi(Y)$, on a $\psi(Y) \neq \{x\}$.

Cela prouve donc que $\psi$ n'est pas surjective.

Voilà le plan de démonstration.

1. $f$ surjective $\implies$ $\phi$ surjective.
2. $\phi$ surjective $\implies$ $f$ surjective.
3. $f$ surjective $\implies$ $\psi$ injective.
4. $\psi$ injective $\implies$ $f$ surjective (par contraposée).

1. Supposons $f$ surjective et montrons que $\phi$ est surjective.
   Soit $Y \in \mathscr{P}(F)$.
   Posons $X = f^{-1}[Y]$ et montrons que $\phi(X) = Y$.
   On procède par double inclusion.

   — Soit $y \in \phi(X) = f[X]$.
   On peut donc trouver $x \in X$ tel que $y = f(x)$.
   Puisque $X = f^{-1}[Y]$, on en déduit que $x$ vérifie $f(x) \in Y$, donc que $y \in Y$.
   Cela montre l'inclusion $\phi(X) \subset Y$.

   — Réciproquement, soit $y \in Y$.
   Comme $f$ est surjective, on peut trouver $x \in X$ tel que $f(x) = y$.
   Comme $y \in Y$, on a $f(x) \in Y$, donc $x \in f^{-1}[Y] = X$.
   Cela montre que $y = f(x) \in f[X] = \phi(X)$.
   On a donc montré l'inclusion $Y \subset \phi(X)$.

   On a donc bien montré que $\phi(X) = Y$.
   Cela montre la surjectivité de $\phi$.
2. Supposons $\phi$ surjective. Montrons que $f$ est surjective.
   Soit $y \in Y$.
   Comme $\phi$ est surjective, on peut trouver un ensemble $X \in \mathscr{P}(E)$ tel que $\phi(X) = \{y\}$.
   L'ensemble $X$ est non vide. En effet, $\phi(\varnothing) = f[\varnothing] = \varnothing \neq \{y\}$.
   On peut donc trouver un élément $x \in X$. On a alors $f(x) \in f[X] = \{y\}$, d'où l'on déduit $y = f(x)$.
   Cela prouve la surjectivité de $f$.
3. Supposons $f$ surjective. Montrons $\psi$ injective.
   Soit $Y, Y' \in \mathscr{P}(F)$ tels que $\psi(Y) = \psi(Y')$, c'est-à-dire $f^{-1}[Y] = f^{-1}[Y']$. Montrons $Y = Y'$.
   On procède par double inclusion.

   — Soit $y \in Y$.
   Comme $f$ est surjective, on peut trouver $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
   Puisque $y \in Y$, on a $x \in f^{-1}[Y]$.
   D'après l'hypothèse, on en déduit que $x \in f^{-1}[Y']$, donc que $y = f(x) \in Y'$.
   Cela montre l'inclusion $Y \subset Y'$.

   — On montre exactement de la même façon l'inclusion réciproque $Y' \subset Y$.

   On a donc $Y = Y'$, ce qui prouve que $\psi$ est injective.
4. Supposons $f$ non surjective. On peut donc trouver $y \in F$ tel que $\forall x \in E, f(x) \neq y$.
   En particulier, on a alors

$$f^{-1}[\{y\}] = \Big\{x \in E f(x) = y\Big\} = \varnothing = f^{-1}[\varnothing],$$

   c'est-à-dire $\psi(\{y\}) = \psi(\varnothing)$. Comme $\{y\} \neq \varnothing$, cela montre que $\psi$ n'est pas injective.