Fonctions réelles

I Relation d'ordre sur ℝ, intervalle 2

II Généralités 3
- Domaine de définition
- Graphe d'une fonction de la variable réelle
- Parité, imparité, périodicité
- Autres propriétés
- Opérations sur les fonctions à valeurs réelles
- Monotonie
- Cas des fonctions strictement monotones
- Fonctions majorées, minorées, bornées

III Continuité 14
- Opérations
- Théorème des valeurs intermédiaires

IV Dérivation 16
- Nombre dérivé, fonction dérivée
- Interprétations de la dérivée
- Opérations
- Monotonie et dérivation
- Dérivées successives

V Étude de fonctions 21

I. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$, intervalle

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre, notée $\leqslant$, vérifiant notamment :

— une propriété dite de « stabilité par translation » :

$$(T) \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R},\ \forall\, h \in \mathbb{R}, \qquad a \leqslant b \quad \Longrightarrow \quad a + h \leqslant b + h$$

— une propriété dite de « stabilité par multiplication par un réel positif » :

$$(M) \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R},\ \forall \lambda \in \mathbb{R}^+, \qquad a \leqslant b \quad \Longrightarrow \quad \lambda a \leqslant \lambda b$$

En utilisant les propriétés (T) et (M), on peut prouver les implications suivantes :

$$(SI) \qquad \forall\, a, b, c, d \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} a \leqslant b \\ c \leqslant d \end{cases} \Longrightarrow\ a + c \leqslant b + d$$

$$(MIP) \qquad \forall\, a, b, c, d \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} 0 \leqslant a \leqslant b \\ 0 \leqslant c \leqslant d \end{cases} \Longrightarrow\ 0 \leqslant ac \leqslant bd$$

Attention. Il n'y a pas de différence d'inégalités.

L'assertion suivante est fausse $\xcancel{\forall\, a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} a \leqslant b \\ c \leqslant d \end{cases} \Longrightarrow\ a - c \leqslant b - d}$

1 **Définition.** On appelle *intervalle* toute partie I de $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant t \leqslant y \Longrightarrow t \in I.$$

2 **Question.** Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$. On note $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.
Montrer que $[a, b]$ est un intervalle.

3 **Remarque importante.**

- — Si $a = b$, on a $[a, b] = \{a\}$.
  — Si $a > b$, on a $[a, b] = \emptyset$.
  Ainsi, les singletons et l'ensemble vide sont des intervalles.
- On admet provisoirement que tout intervalle est de l'un des types suivants :
  — l'ensemble vide ;
  — un *singleton* $\{a\}$ pour $a \in \mathbb{R}$;
  — un *segment* $[a, b]$, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$;
  — un *intervalle ouvert* $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, pour $a < b$;
  — un *intervalle semi-ouvert* $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$, pour $a < b$;
  — un intervalle semi-ouvert $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$, pour $a < b$;
  — une *demi-droite fermée* $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\}$, pour $a \in \mathbb{R}$;
  — une demi-droite fermée $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\}$, pour $a \in \mathbb{R}$;
  — une *demi-droite ouverte* $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$, pour $a \in \mathbb{R}$;
  — une demi-droite ouverte $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$, pour $a \in \mathbb{R}$;
  — la *droite* $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

4 **Définition.** Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle *valeur absolue* de x et on note $|x|$ le réel positif défini par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

5 **Proposition.** Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On a

(i) $|x| \geqslant 0$

(ii) $|x| = \max(-x, x)$

(iii) $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

(iv) $|xy| = |x||y|$

(v) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ (inégalité triangulaire)

(vi) $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y|$

(vii) $|x| = \sqrt{x^2}$

- Soient $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^+$. On a

$$|x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a$$

et

$$|x| \geqslant a \iff (x \leqslant -a \text{ ou } x \geqslant a).$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. La valeur absolue de x représente la distance entre 0 et x sur la droite réelle.
- Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Alors $|x-y|$ représente la distance entre x et y sur la droite réelle.
- Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. On a

$$|x - \ell| \leqslant \varepsilon \iff \ell - \varepsilon \leqslant x \leqslant \ell + \varepsilon$$

II. Généralités

Une application $f : X \to \mathbb{R}$ où X est une partie de $\mathbb{R}$ est une *fonction réelle de la variable réelle*, ou encore *fonction numérique*.

Domaine de définition

Lorsque l'on définit une application, on doit préciser l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée.
Il arrive cependant que l'on cherche à définir une fonction à l'aide d'une expression $f(x)$ qui dépend de la variable réelle x. Il faut alors impérativement donner le *domaine de définition* de f, c'est-à-dire l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels $f(x)$ a une valeur.
Par ailleurs, bien qu'il s'agisse d'un abus, en disant « soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ », on sous entend que l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$ par défaut, alors qu'il faudrait dire, en toute rigueur, s'il s'agit de

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^{+*} \\ x & \longmapsto & e^{\frac{1}{x}} \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ x & \longmapsto & e^{\frac{1}{x}} \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & [-3, +\infty[\\ x & \longmapsto & e^{\frac{1}{x}} \end{array} \quad \text{ou} \ldots$$

6 **Question.**

— Rappeler l'ensemble de définition de la fonction tangente.

— Donner l'ensemble de définition de la fonction $\frac{1}{\tan}$.

— On considère la fonction cotangente, définie par $\text{cotan} = \frac{\cos}{\sin}$. Donner son ensemble de définition.

Graphe d'une fonction de la variable réelle

Le *graphe* d'une fonction $f : X \to \mathbb{R}$, où X est une partie de $\mathbb{R}$, est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$:

$$\Gamma_f = \Big\{\big(x, f(x)\big),\ x \in X\Big\}.$$

On peut représenter le graphe de f dans le plan.
La courbe ainsi obtenue est appelée *courbe représentative* de f, ou encore abusivement graphe de f.

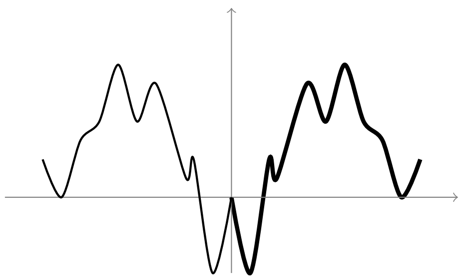
Parité, imparité, périodicité

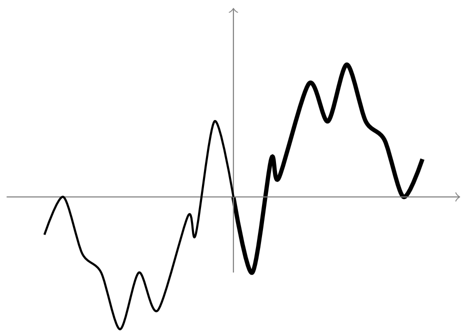
Désormais, X désigne une partie non vide de $\mathbb{R}$. Idem pour Y.
Le plan est muni d'un repère orthonormé $\big(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\big)$.

7 **Définition.** Soit $f : X \to \mathbb{R}$.

— La fonction f est *paire* lorsque $\begin{cases} X \text{ est symétrique par rapport à } 0 \\ \forall x \in X,\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

— La fonction f est *impaire* lorsque $\begin{cases} X \text{ est symétrique par rapport à } 0 \\ \forall x \in X,\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$





- Lorsque f est paire ou impaire, on peut restreindre l'étude de f à $X \cap \mathbb{R}_+$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\varphi_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$. Alors φ_n est $\begin{cases} \text{paire} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \text{impaire} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

8 **Question.** Soit $f : X \to Y$ une bijection *impaire*.
Montrer que sa bijection réciproque f^{-1} est impaire.

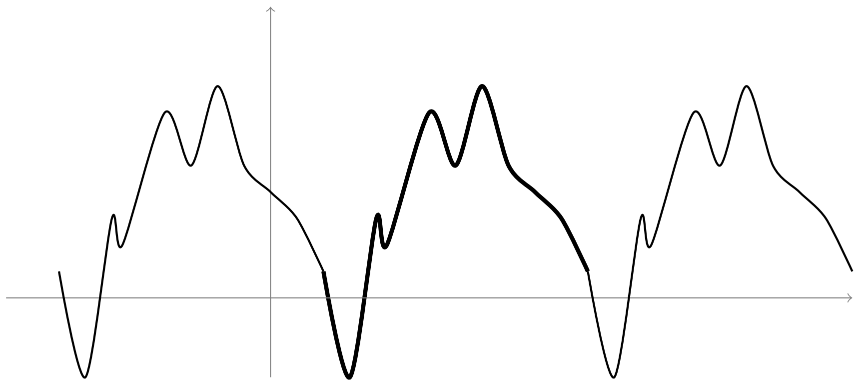
9 **Définition.** Soit $f : X \to \mathbb{R}$.

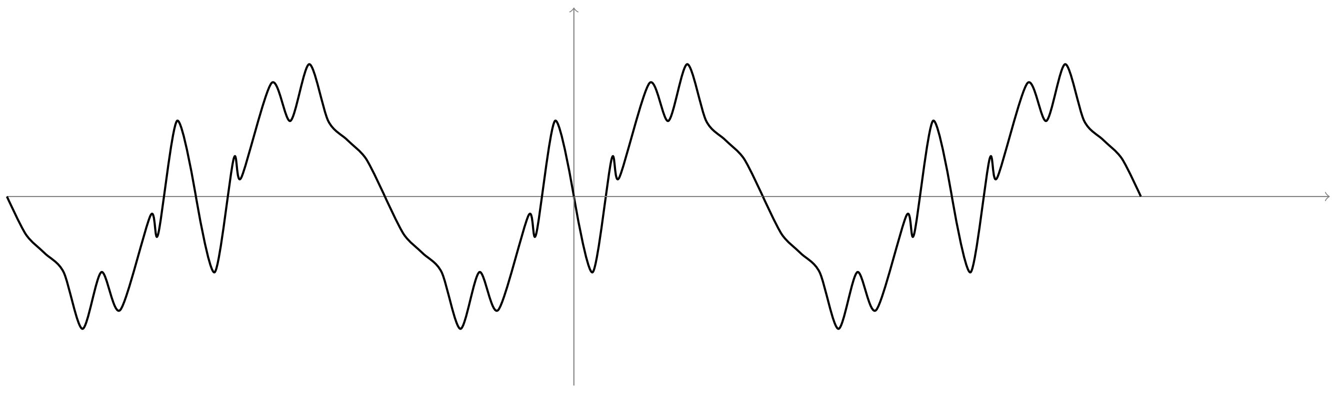
— Soit $T \in \mathbb{R}$. Le réel T est **une** *période* de f (ou encore f est T-*périodique*) lorsque :

$$\begin{array}{ll} \text{d'une part} & \forall\, x \in \mathbb{R},\ x + T \in X \iff x \in X \\ \text{d'autre part} & \forall\, x \in X,\ f(x+T) = f(x) \end{array}$$

— La fonction f est *périodique* lorsqu'il existe $T \in \mathbb{R}_+^*$ tel que f soit T-périodique.

- Plus simplement, lorsque $X = \mathbb{R}$, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est T-périodique lorsque $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$.
- Si T est une période de f, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le réel kT est une période de f.
- Lorsque f est T-périodique, on peut restreindre le domaine d'étude de f à $X \cap [a, a+T[$ avec n'importe quel $a \in \mathbb{R}$. On prend le plus souvent $a = 0$ ou mieux, si f a des propriétés de parité, $a = -T/2$ pour avoir un domaine centré en 0.





10 **Question.** On considère la fonction *partie fractionnaire* : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - \lfloor x \rfloor \end{array}$

Montrer que f est 1-périodique. Esquisser sa courbe représentative.

Rappel. Pour un réel $t \in \mathbb{R}$, la partie entière de t est l'unique entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que $m \leqslant t < m+1$.

Autres propriétés

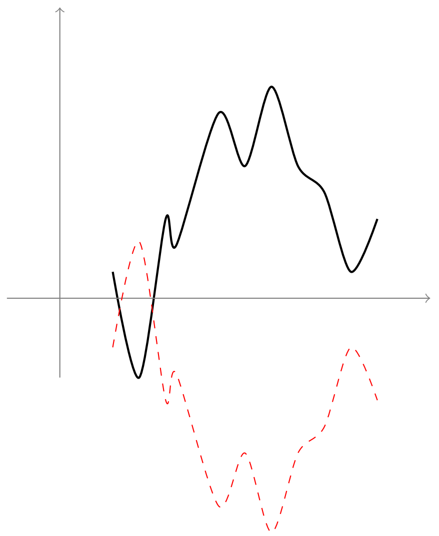
11

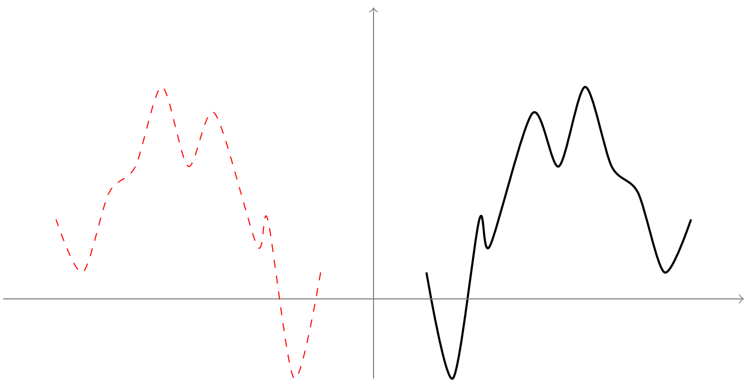
Proposition.
Soit $f : X \to Y$ une bijection.
Les graphes de f et f^{-1} sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la première bissectrice.

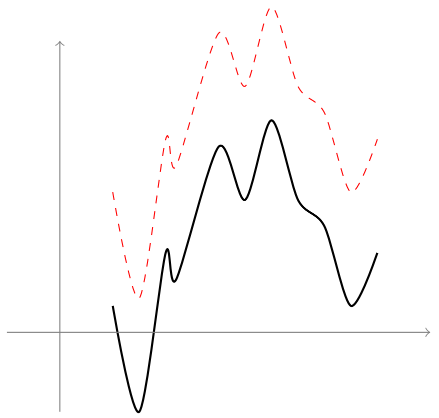
12

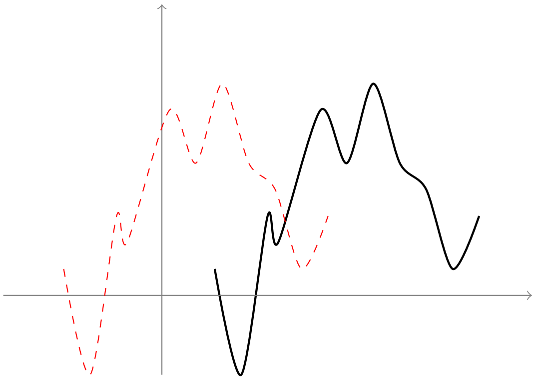
Proposition. Soit $f : X \to \mathbb{R}$.

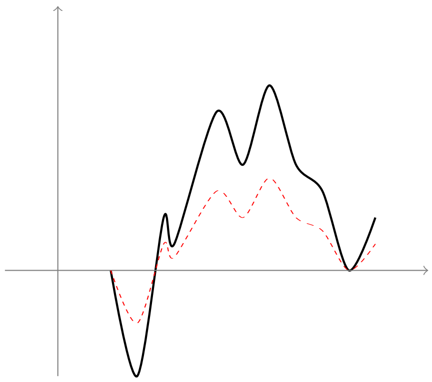
1. La fonction $x \mapsto -f(x)$ est définie sur …
   Son graphe est l'image du graphe de f par ....
2. La fonction $x \mapsto f(-x)$ est définie sur …
   Son graphe est l'image du graphe de f par ....
3. Soit $b \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto f(x) + b$ est définie sur …
   Son graphe est l'image du graphe de f par ....
4. Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto f(x + a)$ est définie sur …
   Son graphe est l'image du graphe de f par ....

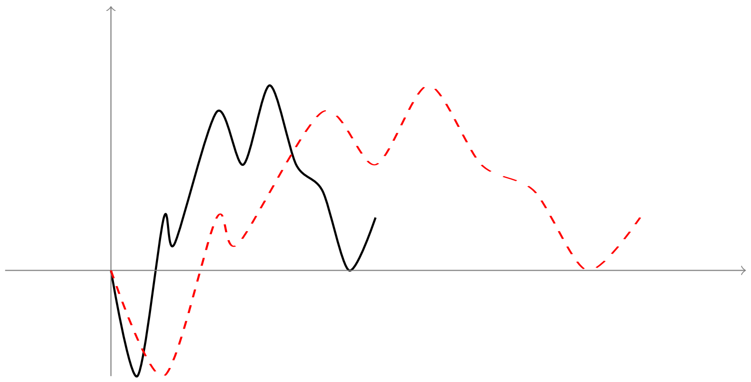












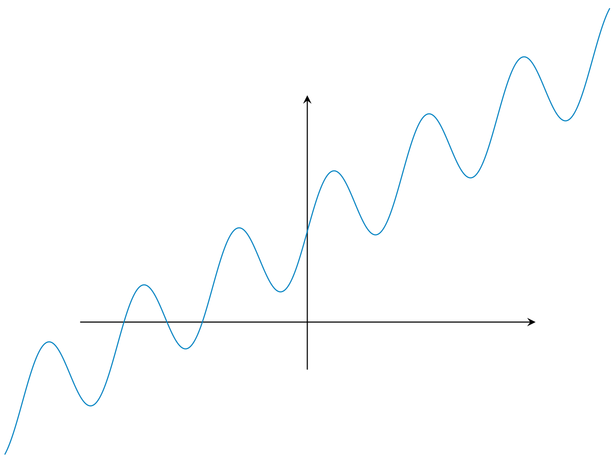
13 Question. Esquisser le graphe des fonctions $x \mapsto \sin(x) - 3 \qquad x \mapsto \sin(\pi x) \qquad x \mapsto \sqrt{x-1}$.

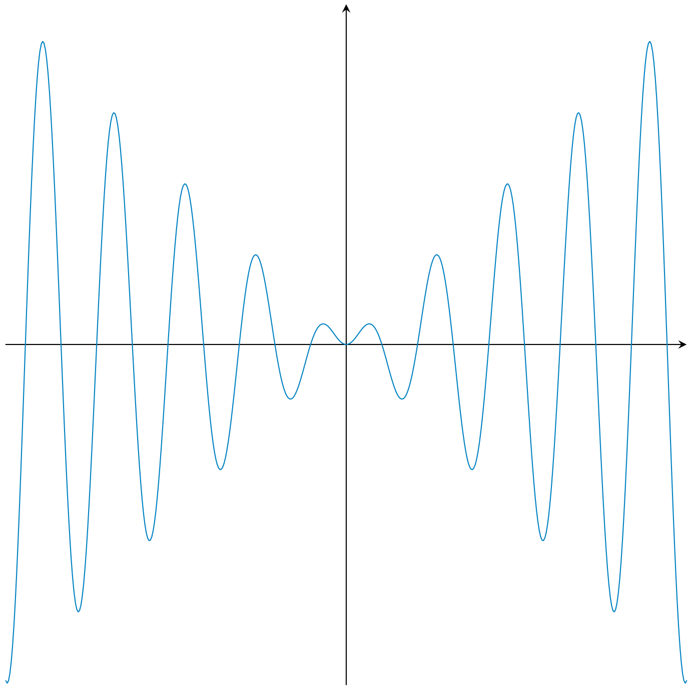
14 Question. Montrer que les courbes des fonctions tan et cotan sont symétriques par rapport à $x = \frac{\pi}{4}$.

15 Défis.

— Tracer l'allure de la courbe de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x - \lfloor x \rfloor)^2 + \lfloor x \rfloor \end{array}$

— Proposer des fonctions dont le graphe possède l'allure ci-dessous.





16 **Définitions.**

- On note $\mathscr{F}(X,\mathbb{R})$, ou encore $\mathbb{R}^X$, l'ensemble des fonctions de X dans $\mathbb{R}$.
- **Loi +** **Loi ·** **Loi ×**
  Soit $f \in \mathbb{R}^X$ et $g \in \mathbb{R}^X$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
  - On appelle *somme de f et g*, et on note $f+g$, la fonction définie par :

$$f+g : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array}$$

  - On appelle *multiplication de f par le scalaire λ*, et on note $\lambda \cdot f$ ou encore λf, la fonction définie par :

$$\lambda f : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda f(x) \end{array}$$

  - On appelle *produit de f et g*, et on note $f \times g$ ou encore fg, la fonction définie par :

$$fg : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)g(x) \end{array}$$

- On appelle *valeur absolue de f*, et on note $|f|$, la fonction définie par :

$$|f| : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |f(x)| \end{array}$$

- Si f ne s'annule pas sur X, on appelle *inverse f*, et on note $\frac{1}{f}$, la fonction définie par :

$$\frac{1}{f} : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{f(x)} \end{array}$$

- La relation d'ordre utilisée sur $\mathbb{R}$ s'étend naturellement à $\mathscr{F}(X,\mathbb{R})$.
  Pour $f, g \in \mathscr{F}(X,\mathbb{R})$, on définit la relation $f \preccurlyeq g$ (notée encore $f \leqslant g$) par :

$$\forall x \in X,\ f(x) \leqslant g(x).$$

- La relation d'ordre définie sur $\mathscr{F}(X,\mathbb{R})$ n'est pas totale : étant donné deux fonctions f et g de $\mathscr{F}(X,\mathbb{R})$, il se peut que ni $f \leqslant g$, ni $g \leqslant f$ ne soient vérifiées. Exemple ?
- Si $f \in \mathscr{F}(X,\mathbb{R})$, on n'*utilisera pas* la notation « $f > 0$ ». Celle-ci serait beaucoup trop ambiguë.
  - Elle pourrait signifier $f \geqslant 0$ et $f \neq 0$, ce qui est le cas de la fonction carrée $x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.
  - Elle pourrait également signifier que f est à valeurs strictement positives, ce qui n'est pas le cas de la fonction carrée.

17 **Question.** Soit f et g deux fonctions définies sur X.
sol → 23

- Si f et g sont paires, montrer que $f+g$ est paire. Et avec le produit ?
- Que dire de la parité de $f+g$ et fg lorsque f et g sont impaires ?
- Que dire de la parité de fg lorsque f est paire et g impaire ?

18 **Question.** Soit $T \in \mathbb{R}^{+*}$.

— Soit f et g deux fonctions T-périodiques définies sur X.
Montrer que $f+g$ et fg sont T-périodiques.

— Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et f une fonction T-périodique définie sur X. Alors $x \mapsto f(ax)$ est $\dfrac{T}{|a|}$-périodique.

— La fonction $x \mapsto \sin(2\pi x)$ est ...

— La somme de deux fonctions périodiques est-elle périodique ?

19 **Définition**. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, ainsi que $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions de X dans $\mathbb{R}$
Une combinaison linéaire des fonctions $f_1, \ldots, f_n$ est une fonction de la forme $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des réels.

- Une combinaison linéaire de fonctions $x \mapsto x^k$, avec $k \in \mathbb{N}$, est une *fonction polynomiale*.

20 **Définition (Composition des fonctions).**
Soit $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : Y \to \mathbb{R}$.
On suppose que f est à valeurs dans Y, c'est-à-dire que $f(X) \subset Y$.
On appelle *composée de f et g*, et on note $g \circ f$, la fonction définie par :

$$g \circ f : \begin{array}{rcl} X & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g\big(f(x)\big) \end{array}$$

- Lorsque $f \in F^E$ et $g \in G^F$ sont des applications, alors $g \circ f$ est *toujours* définie.
- Lorsque $f \in \mathbb{R}^X$ et $g \in \mathbb{R}^Y$, la composée $g \circ f$ n'est *pas* toujours définie.
Considérons $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1-x^2 \end{array}$ et $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \sqrt{t} \end{array}$
On ne peut pas parler de la fonction $g \circ f$, car $f(\mathbb{R}) =]-\infty, 1]$ n'est pas inclus dans $\mathbb{R}^+$, le domaine de définition de g.
En revanche, on peut dire que la fonction $x \mapsto g(f(x))$ est définie sur $[-1, 1]$.

21 **Définition.** Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est :

— *croissante* lorsque $\forall (x,y) \in X^2,\ x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y)$

— *strictement croissante* lorsque $\forall (x,y) \in X^2,\ x < y \implies f(x) < f(y)$

— *décroissante* lorsque $\forall (x,y) \in X^2,\ x \leqslant y \implies f(x) \geqslant f(y)$

— *strictement décroissante* lorsque $\forall (x,y) \in X^2,\ x < y \implies f(x) > f(y)$

- La fonction f est dite *monotone* si elle est croissante ou décroissante.
- La fonction f est décroissante si et seulement si la fonction $-f$ est croissante.
- Une fonction constante est croissante et décroissante.
- La fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$.
- La fonction $f^+ : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ est strictement décroissante.

  On montre également que $f^- : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{-*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ est strictement décroissante.

  En revanche, $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ n'est pas décroissante, car $f(-3) < f(3)$.

22 **Proposition (Monotonie et opérations)**
Soit f et g deux fonctions définies sur X et $\lambda \in \mathbb{R}$.

— Si f et g sont croissantes, alors $f+g$ est croissante.
De plus, si l'une d'elle est strictement croissante, alors la somme est strictement croissante.

— Si f et g sont *positives* et croissantes, alors la fonction fg est croissante.

— Si $\lambda \geqslant 0$ et f croissante, alors λf est croissante.

— Si $\lambda > 0$ et f strictement croissante, alors λf est strictement croissante.

— Si $\lambda \leqslant 0$ et f croissante, alors λf est décroissante.

— Si $\lambda < 0$ et f strictement croissante, alors λf est strictement décroissante.

- Énoncé analogue avec des fonctions décroissantes.
- Pour montrer que f n'est pas croissante, il suffit d'exhiber un élément $x \in X$ et un élément $y \in X$ tels que $x \leqslant y$ et $f(x) > f(y)$.
- Pour montrer que f n'est pas monotone, il suffit d'exhiber trois éléments $x \in X$, $y \in X$ et $z \in X$ tels que $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$ et tels que l'on ait

  ou bien $f(x) > f(y)$ et $f(z) > f(y)$;

  ou bien $f(x) < f(y)$ et $f(z) < f(y)$.

23 **Question.**
Considérons f définie sur $[-1,1]$ par $x \mapsto 2x^2 - 1$.
Montrer que f peut s'écrire comme le produit de deux fonctions croissantes.
Que peut-on dire de la monotonie de f ?

24 sol → 23 **Question.** Soit f et g sont deux fonctions croissantes et négatives définies sur X. Que peut-on dire de la monotonie de la fonction fg ?

25 **Proposition.**
La composée de deux fonctions monotones de même sens de variation est croissante.
La composée de deux fonctions monotones de sens de variation contraire est décroissante.

- **Preuve.**
Soit $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : Y \to \mathbb{R}$ telle que $f(X) \subset Y$.
Notons $\nearrow$ pour « croissante » et $\searrow$ pour « décroissante ».
Soit $x, y \in X$ tels que $x \leqslant y$. Le tableau suivant récapitule les 4 cas possibles :

	$f \nearrow$	$f \searrow$
	$f(x) \leqslant f(y)$	$f(x) \geqslant f(y)$
$g \nearrow$	$g\big(f(x)\big) \leqslant g\big(f(y)\big)$	$g\big(f(x)\big) \geqslant g\big(f(y)\big)$
$g \searrow$	$g\big(f(x)\big) \geqslant g\big(f(y)\big)$	$g\big(f(x)\big) \leqslant g\big(f(y)\big)$

On fait de même pour la stricte monotonie avec, partout, des inégalités strictes.

- **Variations de $\frac{1}{f}$**
Si $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction monotone à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, alors la fonction $\frac{1}{f}$ est également monotone, de monotonie opposée à celle de f.
Idem avec une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}_-^*$.
En revanche, lorsque f est monotone à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, on ne peut rien dire de la monotonie de $\frac{1}{f}$.

26 **Question.** Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $c \neq 0$.
Soit $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.

— Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}, \quad f(x) = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c^2}\,\frac{1}{x+\frac{d}{c}}$$

— En déduire la monotonie de f et le graphe de f.

— Vous observez une propriété de symétrie du graphe de f. Comment la prouver par un calcul ?

27 **Question à l'oral !** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \dfrac{\ln(\frac{2}{3})}{\exp(x^3+x^5)}$. Étudier la monotonie de f.

28 **Question.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) \overset{S}{=} f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f(xy) \overset{P}{=} f(x)f(y)$$
Montrer que f est croissante.

Cas des fonctions strictement monotones

29 preuve

Proposition. Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ strictement monotone est injective.

- Montrons que f est injective, càd montrons que

$$\forall\, x, x' \in X, \quad x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$$

Soit $x, x' \in X$ tel que $x \neq x'$.
On a alors

$$\frac{f(x)-f(x')}{x-x'} \text{ est } \begin{cases} >0 & \text{si } f \text{ est strictement croissante} \\ <0 & \text{si } f \text{ est strictement décroissante} \end{cases}$$

Dans les deux cas, on a $\dfrac{f(x)-f(x')}{x-x'} \neq 0$, donc $f(x) \neq f(x')$.

30

Proposition.
Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone.
Alors f induit une bijection de X sur $f(X)$, notée $\widehat{f}$.
De plus, la bijection réciproque $\widehat{f}^{-1} : f(X) \to X$ est strictement monotone, de même sens de variation que f.

31 **Question.**
Donner une fonction $f : [0,1] \to [0,1]$ bijective sans être monotone.
Donner une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijective sans être monotone.

32

Proposition.
Soit $f : X \to Y$ une bijection.
Si f est (strictement) monotone, alors f^{-1} est (strictement) monotone de même monotonie que f.

33 **Définition.** Soit $f : X \to \mathbb{R}$.

— f est *majorée* lorsque $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in X,\ f(x) \leqslant M,$

— f est *minorée* lorsque $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in X,\ f(x) \geqslant M,$

— f est *bornée* lorsque f est majorée et minorée.

- La fonction f est minorée si et seulement si $-f$ est majorée.
- La fonction f est majorée si et seulement si son graphe se trouve en dessous d'une droite horizontale. Plus précisément, la fonction f est majorée par M si et seulement si son graphe se trouve en dessous de la droite d'équation $y = M$.
- Un réel M tel que $f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in X$ est, s'il existe, un *majorant* de f. On définit de même un *minorant* de f.

34 **Proposition.** Soit $f : X \to \mathbb{R}$. Alors :

$$f \text{ est bornée} \iff \exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in X,\ \left|f(x)\right| \leqslant K$$

35 **Proposition.**
Soit $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions bornées.
Les fonctions $f + g$ et fg sont alors bornées.

La somme et le produit de deux fonctions bornées est une fonction bornée.

- On montre de même que la somme de deux fonctions majorées est majorée. Idem pour les fonctions minorées.

36 **Définition.** Soit f une fonction de X dans $\mathbb{R}$.

— f admet un *maximum* en $a \in X$ lorsque $\forall x \in X,\ f(x) \leqslant f(a).$

— f admet un *minimum* en $a \in X$ lorsque $\forall x \in X,\ f(x) \geqslant f(a).$

— f admet un *extremum* en a, lorsque f admet un maximum en a ou un minimum en a.

- Si f admet un *maximum* en $a \in X$, alors le réel $f(a)$ est unique et est appelé le maximum de f.
  Il est noté $\max\limits_X f$ ou $\max\limits_{x \in X} f(x)$.
  On définit de même le minimum d'une fonction.
- La fonction cos admet :
  — un maximum, 1, qui est atteint en tous les multiples de 2π ;
  — un minimum, -1, atteint en tous les points de la forme $\pi + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
- Une fonction majorée n'admet pas nécessairement de maximum.

37 **Question.** Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.
La fonction f est minorée par 0.
Montrer qu'elle n'admet pas de minimum.

III. Continuité

Dans toute cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.
Autrement dit, les extrémités de I sont distinctes : ainsi, I contient au moins deux points, en fait une infinité.
On dit aussi que I est un intervalle non trivial.

38 **Définition.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

— On dit que f est *continue en a* lorsque f admet une limite en a.
Dans ce cas, cette limite vaut nécessairement $f(a)$.
Autrement dit, f est continue en a lorsque $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$.

— On dit que f est *continue sur I* lorsque f est continue en tout point de I.

— On note $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I.

Opérations

39 **Proposition (Continuité et opérations).** Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

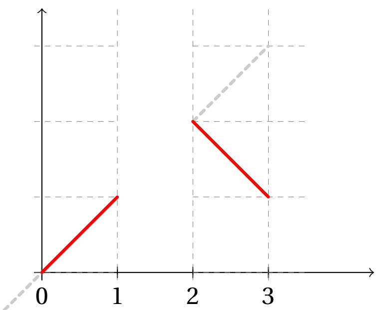
— Si f et g sont continues sur I, alors $f + g$, λf et fg sont continues sur I.

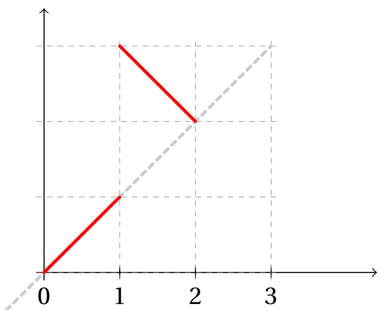
— Si de plus, f ne s'annule pas sur I alors $\frac{1}{f}$ est continue sur I.

40 **Proposition (Continuité et composée).**
La composée de deux fonctions continues est continue.

41 **Proposition (Continuité de la bijection réciproque).**
Soit $f : I \to J$ une bijection continue.
Alors la bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue.

- **En français.** *La réciproque d'une bijection continue sur un intervalle est continue.*
- La fonction f est une bijection continue définie sur $[0,1] \cup [2,3[$ ayant pour image $[0,2]$, définie par le graphe de gauche.
  Sa bijection réciproque est donnée par le graphe de droite, et on constate qu'elle n'est pas continue.
  Où est l'embrouille ?





- L'énoncé suivant est faux :
  ~~Soit $f : X \to Y$ une bijection continue. Alors $f^{-1} : Y \to X$ est continue.~~

42 preuve

Théorème des valeurs intermédiaires.

La version « basique »
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I.
Soit $a, b \in I$ tel que $a \leqslant b$.
Alors pour tout y_0 compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y_0$.

La version « sophistiquée »
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

- Ce théorème dit que tout y_0 compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est « l'image de quelqu'un ».
- On ne suppose rien sur la position de $f(a)$ vis-à-vis de $f(b)$.
- Une autre façon de retenir cet énoncé :

  Si f est continue sur un intervalle, alors toute valeur intermédiaire entre deux valeurs atteintes par f est une valeur atteinte par f.

- Il n'y a pas d'unicité dans ce théorème. Ce théorème est un THÉORÈME D'EXISTENCE.
- Une condition suffisante d'unicité : « la fonction f est strictement monotone ».

43 sol → 24 **Question.** Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = c$.

44 sol → 24 **Question.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue* telle que $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ \big(f(x)\big)^2 = 1$.
Que dire de f ?
Avez-vous utilisé l'hypothèse de continuité ? Si non, c'est mauvais signe !

IV. Dérivation

Dans toute cette partie, I désigne un intervalle non trivial (non vide, non réduit à un point).

Nombre dérivé, fonction dérivée

45 **Définition.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

— Le *taux d'accroissement* de f en a est la fonction τ_a définie sur $I \setminus \{a\}$ par :

$$\begin{array}{ccl} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tau_a(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}. \end{array}$$

— La fonction f est *dérivable en a* lorsque son taux d'accroissement en a, possède une limite finie en a.
Cette limite s'appelle alors *nombre dérivé* de f en a et se note $f'(a)$.

— On dit que f est *dérivable sur I* lorsque f est dérivable en tout point de I.
La fonction définie sur I par $a \mapsto f'(a)$ est appelée fonction dérivée de f, et est notée f'.

— On note $\mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$ est dérivable en tout $a \in \mathbb{R}$ avec $f'(a) = na^{n-1}$.
- La fonction $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ est dérivable en tout $a \in \mathbb{R}^*$ et $h'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$.
- Considérons la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$.

  — f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $f' : x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

  — f n'est pas dérivable en 0.
- La notation « $'$ » ne s'applique qu'aux fonctions. On peut écrire $f'(x)$, mais surtout pas $f(x)'$.
- La notation $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x)\big)$ peut être utilisée, notamment lorsque f est définie par une expression.

  On peut par exemple écrire $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2) = 2x$.

Interprétations de la dérivée

Tangente à une courbe

Étant donné une fonction f définie sur I, pour $x \in I \setminus \{a\}$, la droite joignant les points $A \left| \begin{smallmatrix} a \\ f(a) \end{smallmatrix} \right.$ et $M \left| \begin{smallmatrix} x \\ f(x) \end{smallmatrix} \right.$ (avec $a \neq x$) a pour pente :

$$\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

- Supposons f dérivable en a.
  - Alors la pente a pour limite $f'(a)$ quand $x \to a$.
  - Le vecteur de composantes $\big(1, \tau_a(x)\big)$ est un vecteur directeur de la corde (AM), et il « tend » vers $\big(1, f'(a)\big)$.
  - La droite passant par A et de pente $f'(a)$ est, par définition, la *tangente en A* à la courbe d'équation $y = f(x)$.
    C'est la « position limite » des cordes (AM) lorsque le point M tend vers A.
    Une équation de cette tangente est alors : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
  - La tangente en A est *horizontale* si et seulement si $f'(a) = 0$.
- Supposons f non dérivable en a.
  Si f est continue en a et possède un taux d'accroissement en a qui tend vers $\pm\infty$, alors les cordes possèdent « une position limite verticale » que l'on appelle encore tangente à la courbe en A.
  On parle alors de tangente *verticale*. Dans ces conditions, une équation de la tangente est $x = a$.

Vitesse instantanée

Lorsque $x(t)$ est l'abscisse à l'instant t d'un point en mouvement rectiligne, pour $t \neq a$ le taux d'accroissement $\tau_a(t) = \dfrac{x(t) - x(a)}{t - a}$ représente la *vitesse moyenne* entre les instants a et t, et sa limite $x'(a)$, que l'on note aussi $\dot{x}(a)$ en cinématique, représente la *vitesse instantanée* à l'instant a.

Approximation de la fonction

Par définition de $f'(a)$, le quotient $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ s'écrit $f'(a) + \varepsilon(x)$ où ε est une fonction qui tend vers 0 en a.
Dit autrement, on peut écrire :

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x - a) + (x - a)\,\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

On utilise souvent cela en Physique et en SI, en disant que $x \mapsto f(a) + f'(a)\,(x - a)$ est la « meilleure approximation linéaire » de f en a, ou une approximation au premier ordre de f au voisinage de a.

Opérations

Dérivabilité en un point

46 **Proposition.**
Soit f et g deux fonctions définies sur I.
Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

— Si f et g sont dérivables en a, alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et l'on a :

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$$

— Si f et g sont dérivables en a, alors la fonction fg est dérivable en a et :

$$(fg)'(a) = f'(a)\, g(a) + f(a)\, g'(a).$$

- Le premier point est appelé « linéarité de la dérivation ».
  Une combinaison linéaire de fonctions dérivables en a est dérivable en a (et la dérivée de la combinaison linéaire est la combinaison linéaire des dérivées).
- Le deuxième point peut se retenir de manière faible sous la forme :
  Un produit de fonctions dérivables en a est dérivable en a.

47 **Proposition.** Soit $f \in \mathbb{R}^I$ et $g \in \mathbb{R}^J$ avec $f(I) \subset J$.
Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et :

$$(g \circ f)'(a) \;=\; g'\big(f(a)\big)\, f'(a).$$

- Si on pose $b = f(a)$, alors la formule s'écrit joliment $(g \circ f)'(a) = g'(b)\, f'(a)$.
- On peut facilement intuiter le résultat précédent dans le cas particulier où l'on aurait $f(x) \neq f(a)$ pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, en observant :

$$\frac{\big(g \circ f\big)(x) - \big(g \circ f\big)(a)}{x - a} = \frac{\big(g \circ f\big)(x) - \big(g \circ f\big)(a)}{f(x) - f(a)}\, \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

48 **Proposition.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en a.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f^n est dérivable en a et :

$$(f^n)'(a) = n\, f'(a)\, f^{n-1}(a)$$

— Soit $n \in \mathbb{Z}^{-*}$. Si $f(a) \neq 0$, alors la fonction f^n est dérivable en a et :

$$(f^n)'(a) = n\, f'(a)\, f^{n-1}(a)$$

- Ne pas oublier la condition $f(a) \neq 0$.
- Le cas particulier $n = -1$ donne une formule pour la dérivée d'une fonction inverse.

  Soit $g : I \to \mathbb{R}$ dérivable en a et $g(a) \neq 0$.
  Alors $\dfrac{1}{g}$ est dérivable en a et :

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}.$$

- En combinant avec le résultat sur le produit, on trouve une formule donnant la dérivée d'un quotient.

Soit f et g dérivables en a. Si $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et on a :

$$(\star) \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a)}{g(a)^2}.$$

- Lorsque l'on veut dériver une fonction qui s'écrit comme le quotient de deux fonctions f et g, on peut :
  — soit appliquer la formule $(\star)$ de dérivation d'un quotient ;
  — soit dériver le produit $f \times \dfrac{1}{g}$.

Dérivabilité sur un intervalle

49 **Proposition (opérations sur I).** Soit $f, g \in \mathbb{R}^I$. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Si f et g sont dérivables sur I, alors :
— $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.
— fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.
— pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f^n est dérivable sur I et $(f^n)' = nf'f^{n-1}$.
— pour $n \in \mathbb{Z}^{-*}$, si f ne s'annule pas sur I, la fonction f^n est dérivable sur I et $(f^n)' = nf'f^{n-1}$.
— si g ne s'annule pas sur I, la fonction $\dfrac{1}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = \dfrac{-g'}{g^2}$.
— si g ne s'annule pas sur I, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

50 **Proposition (dérivée d'une composée sur I)**
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$.
Si $\begin{cases} f \text{ est dérivable sur } I \\ g \text{ est dérivable sur } J \end{cases}$ alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$

51 **Remarque importante.**
Avant de poser un calcul de dérivée, il faut justifier la dérivabilité de la fonction.
Le plus souvent, une justification est obtenue par l'utilisation de l'une ou plusieurs des propositions ci-dessus, ce que l'on résume par la belle locution « par opérations sur les fonctions dérivables ».

52 **Question.**
Soit a, b, c, d quatre réels, avec $c \neq 0$.
Considérons la fonction $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.
Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, -\frac{d}{c}[\cup]-\frac{d}{c}, +\infty[$ et déterminer f'.

53 **Question.**

— Soit f une fonction paire dérivable. Montrer que f' est une fonction impaire.
— Soit f une fonction impaire dérivable. Montrer que f' est une fonction paire.
— Soit f une fonction T-périodique dérivable. Montrer que f' est une fonction T-périodique.

54 **Proposition (Dérivabilité d'une bijection réciproque)**
Soient I et J deux intervalles et $f : I \to J$ une fonction bijective dérivable sur I.

- Soit $a \in I$.
  Alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$ et dans ce cas

$$\left(f^{-1}\right)'\left(f(a)\right) = \frac{1}{f'(a)}.$$

- Si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Monotonie et dérivation

55 **Proposition (monotonie sur un intervalle)**
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. On a :

$$f \text{ est croissante sur } I \iff f' \text{ est positive sur } I$$

$$f \text{ est décroissante sur } I \iff f' \text{ est négative sur } I$$

56 **Proposition (constance sur un intervalle)**

- Soit $h : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Alors :

$$h \text{ est constante sur } I \iff h' \text{ est nulle sur } I$$

- Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle.
  Si $f' = g'$, alors f et g diffèrent d'une constante.

57 **Proposition (condition suffisante de stricte monotonie)** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable.
Si f' est positive et ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante.

- Attention, dans tous ces énoncés, l'hypothèse « intervalle » est indispensable.
- On ne donne qu'une condition suffisante de stricte monotonie.
  Il existe une caractérisation (cf. plus tard!)

58 **Question.** Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

59 **Définition.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
On définit par récurrence les *dérivées successives de f* sous réserve d'existence en posant :

- $f^{(0)} = f$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $f^{(n)}$ est dérivable, $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f^{(n)}$, si elle existe, est appelée *dérivée n-ième de f* ou *dérivée de f d'ordre n*.

- Par convention, toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est 0 fois dérivable et $f^{(0)} = f$.

60 **Définition (classe $\mathscr{C}^k$)**
Soit $k \in \mathbb{N}$.
Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est de *classe $\mathscr{C}^k$* sur I lorsqu'elle est k fois dérivable sur I et sa fonction dérivée $k^{\text{ème}}$ est continue sur I.
On note $\mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.

61 **Proposition.**

— Soit $h : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Alors :

$$h \text{ est affine} \iff h'' \text{ est nulle}$$

— Soit f et g des fonctions deux dérivables sur un intervalle.
Si $f'' = g''$, alors f et g diffèrent d'une fonction affine.

⋆ Soit $h : I \to \mathbb{R}$ trois fois dérivable. Alors :

$$h \text{ est polynomiale de degré 2} \iff h''' \text{ est nulle}$$

⋆ Soit f et g des fonctions trois dérivables sur un intervalle.
Si $f''' = g'''$, alors f et g diffèrent d'une fonction polynomiale de degré 2.

V. Étude de fonctions

On peut être amené à faire l'étude d'une fonction pour :

— tracer son graphe ;
— déterminer si une équation admet une/des solutions et éventuellement les encadrer ;
— établir des inégalités ;
— déterminer l'image d'une fonction etc.

Voici le plan d'étude général :

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction.
2. Étudier l'éventuelle parité/périodicité afin de réduire le domaine d'étude.
3. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction. Calculer sa dérivée ; en donner une expression factorisée puis étudier son signe.
4. Dresser le tableau de variations.
5. Déterminer les éventuelles limites et les extrema locaux.
6. Tracer la courbe en commençant par placer les éléments remarquables (extrema, tangentes horizontales, asymptotes, etc.)

Fonctions réelles

preuve et éléments de correction

17

1. — Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(f+g)(-x) = f(-x)+g(-x) = -f(x)-g(x) = -(f+g)(x).$$

La fonction $f+g$ est donc impaire.

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = (-f(x))(-g(x)) = (fg)(x).$$

La fonction fg est donc paire.

2. — Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)(-g(x)) = -(fg)(x).$$

La fonction fg est donc impaire.

— On ne peut rien dire en générale de la somme. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(f+g)(-x) = f(-x)+g(-x) = f(x)-g(x)$$

— La fonction $(f+g)$ sera donc paire si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x)-g(x) = f(x)+g(x),$$

si et seulement si g est la fonction nulle.

— De même $(f+g)$ sera donc impaire si et seulement si $f=0$.

24

Le plus simple est de se ramener à des fonctions positives.
Puisque les fonctions f et g sont croissantes et négatives, les fonctions $-f$ et $-g$ sont décroissantes et positives. Par suite, la fonction $(-f)(-g)$ est décroissantes.
Puisque $fg = (-f)(-g)$, la fonction fg est décroissante (et positive).

29

Soit $x \in X$ et $y \in Y$, tels que $x \neq y$. Quitte à échanger x et y, on peut supposer $x < y$. Puisque la fonction f est strictement monotone, on a soit $f(x) < f(y)$ (cas croissant), soit $f(x) < f(y)$ (cas décroissant). Dans tous les cas $f(x) \neq f(y)$.
Par définition, cela implique que f est injective.

42

$\Longrightarrow$ Supposons la version « basique ».

Montrons la version « sophistiquée ». Pour cela, donnons-nous une fonction continue et I un intervalle et montrons que $f(I)$ est un intervalle.

Posons $J = f(I)$ pour alléger les notations. Montrons que J est un intervalle.
Soit $y, y' \in J$. Prenons un élément y_0 compris entre y et y' et montrons que $y_0 \in J$.
Comme y est dans $f(I)$, il s'écrit $y = f(x)$ avec $x \in I$. Idem pour y' qui s'écrit $f(x')$ avec $x' \in I$.
Par construction, ce réel y_0 est compris entre $f(x)$ et $f(x')$, donc par le TVI basique, il existe x_0 compris entre x et x' tel que $y_0 = f(x_0)$.
On vérifie que x_0 est dans I :
on a $x, x' \in I$ et x_0 compris entre x et x'. Comme I est un intervalle, on en déduit $x_0 \in I$.
Par conséquent, y_0, qui s'écrit $f(x_0)$, est dans $f(I)$, donc est dans J.

$\Longleftarrow$ Supposons la version « sophistiquée ».

Montrons la version « basique » : montrons que tout y_0 compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est l'image d'un élément de $[a,b]$.

Soit y_0 compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Il s'agit de montrer que $y_0 \in J \overset{\text{def}}{=} f\big([a,b]\big)$.
D'après la version « sophistiquée », J est un intervalle (car $[a,b]$ est un intervalle et f est continue) et qui contient bien sûr $f(a)$ et $f(b)$.
Le fait que « J est un intervalle » fournit le fait que $y_0 \in J$.
Par définition de J, le réel y_0 s'écrit $f(c)$ avec $c \in [a,b]$.

43

On considère une fonction auxiliaire, à savoir $g : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - x \end{array}$

Avec cette nouvelle fonction, la question se reformule en « montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $g(c) = 0$ ».

- La fonction g est continue ; en effet, g est la somme de f et $x \mapsto -x$ qui sont continues.
- 0 est une valeur intermédiaire entre $g(0)$ et $g(1)$; en effet, comme f est à valeurs dans $[0,1]$, on a en particulier $f(0) \in [0,1]$ et $f(1) \in [0,1]$, d'où

  $$0 \leqslant f(0) \qquad \text{et} \qquad f(1) \leqslant 1$$

  D'où

  $$0 \leqslant \underbrace{f(0) - 0}_{g(0)} \qquad \text{et} \qquad \underbrace{f(1) - 1}_{g(1)} \leqslant 0$$

  Donc 0 est une valeur intermédiaire entre $g(1)$ et $g(0)$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à g, il existe $c \in [0,1]$ tel que $g(c) = 0$, donc tel que $f(c) = c$.

44

On a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \pm 1$$

On a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \Big(f(x) = 1 \quad \text{ou} \quad f(x) = -1\Big)$$

On va montrer que (qu'est-ce qu'il y a de différent avec ce qui est écrit ci-dessus ?)

$$\Big(\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1\Big) \quad \text{ou} \quad \Big(\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = -1\Big)$$

ce qui s'énonce encore

$$f \text{ est constante égale à } 1 \qquad \text{ou} \qquad f \text{ est constante égale à } -1$$

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = 1$ et qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f(b) = -1$ (ainsi f n'est ni constante égale à 1 ou constante égale à -1).
Ainsi 1 et -1 sont des valeurs atteintes par f (par a et b respectivement).
Or 0 est une valeur intermédiaire entre -1 et 1.
Comme f est continue, le TVI assure qu'il existe c compris entre a et b tel que $f(c) = 0$.
Cela contredit la toute première phrase de la démonstration !