Fonctions réelles

exercices

Fonctions réelles

Égalités et inégalités chez les nombres réels

101 Max et Min

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer les formules suivantes :

$$\max(a,b) = \frac{(a+b)+|a-b|}{2} \qquad \text{et} \qquad \min(a,b) = \frac{(a+b)-|a-b|}{2}$$

Puis, en supposant $a \leqslant b$, faire un dessin du segment $[a,b]$ en indiquant $\dfrac{a+b}{2}$ et $\dfrac{|a-b|}{2}$.

102 Segment

Soit $a \leqslant b$ deux réels. Montrer que $[a,b] = \Big\{x \in \mathbb{R},\ |x-a|+|x-b| = |a-b|\Big\}$.

103 Inégalités

Montrer les inégalités suivantes :

(i) $\forall\, a,b \in \mathbb{R}^+,\ \sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$

(ii) $\forall\, a,b,c \in \mathbb{R},\ ab+ac+bc \leqslant a^2+b^2+c^2$

(iii) $\forall\, a,b \in \mathbb{R}^+,\ |\sqrt{a}-\sqrt{b}| \leqslant \sqrt{|a-b|}$

(iv) $\forall\, a,b \in \mathbb{R},\ (a+b)^4 \leqslant 8(a^4+b^4)$

104 Inéquations

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

(i) $|x|-3 \leqslant 9$
(ii) $|x-3| \leqslant 9$
(iii) $|x-3| \leqslant -9$
(iv) $|x^2-3| = 1$
(v) $|x^2-8x+11| = 4$
(vi) $|x^2-8x+11| < 4$
(vii) $|x+1| = |2x-3|$
(viii) $|1-2x| = x+1$
(ix) $|x^2-3x-3| = x+2$
(x) $|x^2+5x+3| < x+2$
(xi) $2-x < |x+1|$
(xii) $|x|+|x+1| = 2$
(xiii) $|x-7|+|x-2| \leqslant 3$

105 Inverser une formule

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\Big(x+\dfrac{1}{x}\Big) \end{array}$

Montrer que f réalise une bijection g de $[1,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$. Préciser la bijection réciproque g^{-1}.

Généralités

106 4 dessins

Pour une fonction $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on pose $f^+ = \dfrac{|f|+f}{2}$ et $f^- = \dfrac{|f|-f}{2}$.

Pour la fonction f définie par $f(x) = x^2-2x$, représenter f, $|f|$, f^+ et f^- avec 4 couleurs différentes.

107 Recollement de la monotonie

Soient $a,b,c \in \mathbb{R}$ tels que $a < b < c$ et $f : [a,c] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
Montrer que f est croissante sur $[a,c]$ si et seulement si elle est croissante sur $[a,b]$ et $[b,c]$.

108 Composée dans tous les sens et monotonie

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante.
Montrer que f est strictement décroissante.

109 **« s'annule » VS « est nulle »**

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction décroissante telle que la fonction $g : x \mapsto xf(x)$ est croissante.
Montrer que si f s'annule, alors f est la fonction nulle.

110 **Périodicité**

Soit $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ deux fonctions T-périodiques (où $T \in \mathbb{R}_+^*$).
Montrer que $\varphi : x \mapsto f(\frac{x}{2}) + g(\frac{x}{3})$ est périodique.

111 **Existence**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(a) - 2f(c) + f(b) = 0$.

112 **La fonction nulle**

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dérivable, positive, telle que $f(0) = 0$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}^+,\ f'(x) \leqslant f(x)$.
Montrer que f est la fonction nulle. On pourra considérer la fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} f(x)$.

Étude de fonctions

113 **Ensemble de définition**

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\ln x}} \qquad x \mapsto \frac{\ln(x^2 - 4)}{\sqrt{4x^2 - 2x + 1}} \qquad x \mapsto \ln\left(\tan\frac{x\pi}{2}\right)$$

114 **Une fonction bijective**

Soit $f : x \mapsto x^2 + \ln x$ définie sur $I =]0, +\infty[$.

1. Donner (sans faire de calcul) les variations de f.
2. Montrer que f induit une bijection de I sur un ensemble J à préciser.
3. Montrer que $f^{-1} : J \to I$ est dérivable. Peut-on obtenir une expression simple de $(f^{-1})'$?

115 **Un centre de symétrie**

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$. Montrer que le graphe de f admet le point $(1, 2)$ pour centre de symétrie.

116 **Dérivez deux fois !**

Montrer que la fonction $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = (x - 2)\mathrm{e}^x + (x + 2)$ est positive.

117 **Une équation différentielle**

Soit $f : x \mapsto \sqrt{\sqrt{x^2 + 1} - x}$.
Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f. Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathcal{D}$ puis que :

$$\forall\, x \in \mathcal{D},\ 4(x^2 + 1)f''(x) + 4xf'(x) - f(x) = 0$$

118 **Une fonction stylée**

Soit f la fonction définie par $f(x) = \exp\left(\dfrac{\ln\left(\sqrt{1 - \sin 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x}\right)}{\ln|2\cos x|}\right)$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudier la parité et la périodicité de f. Que peut-on en déduire sur l'ensemble d'étude de f ?
3. Montrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \sqrt{1 - \sin 2x} = |\sin x - \cos x| \quad \text{et} \quad \sqrt{1 + \sin 2x} = |\sin x + \cos x|$$

4. En déduire une expression plus simple de f sur $\mathcal{D} \cap [0, \frac{\pi}{2}]$ (on distinguera deux cas).

119 Une mini-pâle

Les deux questions sont indépendantes.

1. Étudier le signe, sur $[-1, +\infty[$, de la fonction f définie par :

$$\forall\, x \geqslant -1, \quad f(x) = \sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}.$$

2. (a) Pour $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, donner une expression de $\tan^{(n)}$ en fonction de tan.

   (b) Montrer que la fonction tan est *absolument monotone* sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, c'est-à-dire :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \tan^{(n)}(x) \geqslant 0.$$

On pourra montrer que $\tan^{(n)}$ s'exprime sous la forme $P(\tan)$, où P est un polynôme à coefficients positifs.

Fonctions réelles

corrigés

101

On a le système somme-différence suivant :

$$\begin{cases} \max(a,b) + \min(a,b) = a + b \\ \max(a,b) - \min(a,b) = |a-b| \end{cases}$$

Par somme et différence, on trouve

$$\max(a,b) = \frac{(a+b)+|a-b|}{2} \qquad \text{et} \qquad \min(a,b) = \frac{(a+b)-|a-b|}{2}$$

102

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in [a,b]$.
Alors $a \leqslant x \leqslant b$, donc $x-a \geqslant 0$ et $x-b \leqslant 0$. On a donc :

$$\begin{aligned}|x-a|+|x-b| &= (x-a)+(b-x)\\ &= b-a\\ &= |a-b|\end{aligned}$$

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x-a|+|x-b| = |a-b|$.
Cette égalité se réécrit

$$|x-a|+|b-x| = |(x-a)+(b-x)|$$

Il s'agit donc du cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire.
Il y a deux cas

- $b-x=0$, auquel cas $x=b$ et alors $x \in [a,b]$
- $b-x \neq 0$ et alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $x-a = \lambda(b-x)$.
  On a alors $x = \dfrac{a+\lambda b}{1+\lambda}$.
  Il s'agit de montrer que $x \in [a,b]$.
  On peut démontrer à la main les deux inégalités suivantes :

$$a \leqslant \frac{a+\lambda b}{1+\lambda} \qquad \text{et} \qquad \frac{a+\lambda b}{1+\lambda} \leqslant b$$

  ou encore remarquer que

$$x = \frac{(1+\lambda)a+\lambda(b-a)}{1+\lambda} = a + \frac{\lambda}{1+\lambda}(b-a)$$

  avec $\dfrac{\lambda}{1+\lambda} \in [0,1]$ car $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Ainsi $x \in [a,b]$ (voyez-vous pourquoi ?).

Mq $[a,b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x-a| + |x-b| = |a-b| \}$

[C] Soit $x \in [a,b]$

Alors $a \leq x \leq b$, donc $x-a \geq 0$

$x-b \leq 0$

On a

$|x-a| + |x-b| = (x-a) + (b-x)$

$= b-a$

$= |a-b|$ car $a \leq b$.

[⊃] Soit $x \in \mathbb{R}$ tq $|x-a| + |x-b| = |a-b|$

On a $\underbrace{|x-a|}_{\geq 0} + \underbrace{|x-b|}_{\geq 0} = \underbrace{b-a}_{\geq 0}$ car $a \leq b$

• Donc :

$|x-b| \leq b-a$

d'où $a-b \leq x-b \leq b-a$

d'où $a \leq x \leq 2b-a$

a fortiori $a \leq x$

• On a aussi :

$|x-a| \leq b-a$

d'où $a-b \leq x-a \leq b-a$

d'où $x \leq b$

• Ainsi $a \leq x \leq b$ donc $x \in [a,b]$.

d'après Jean-Baptiste Fournier

2022-2023

(i) Soit $a, b \in \mathbb{R}^+$.
On a les équivalences

$$\begin{aligned}\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} &\iff 2\sqrt{ab} \leqslant a+b \\ &\iff 0 \leqslant \sqrt{a}^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{b}^2 \\ &\iff 0 \leqslant (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\end{aligned}$$

L'assertion finale est vraie donc l'assertion initiale aussi.

(ii) Soit $b, c \in \mathbb{R}$.
Montrons que pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $0 \leqslant a^2+b^2+c^2-(ab+ac+bc)$.
Posons $f : x \mapsto x^2 - (b+c)x + (b^2 - bc + c^2)$.
Le discriminant de cette fonction polynomiale du second degré vaut

$$(b+c)^2 - 4(b^2-bc+c^2) \;=\; -3b^2+6bc-3c^2 \;=\; -3(b-c)^2$$

qui est négatif, donc f est de signe constant, du signe de son coefficient dominant.
Donc f est positive.

(iii) Soit $a, b \in \mathbb{R}^+$. On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}|\sqrt{a}-\sqrt{b}| \leqslant \sqrt{|a-b|} &\iff (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \leqslant |a-b| \\ &\iff a - 2\sqrt{ab} + b \leqslant |a-b| \\ &\iff \frac{(a+b)-|a-b|}{2} \leqslant \sqrt{ab} \\ &\iff \min(a,b) \leqslant \sqrt{ab} \\ &\iff \min(a,b)^2 \leqslant ab \qquad \text{car } a, b \in \mathbb{R}^+\end{aligned}$$

Rompons les équivalences.
On a

$$\begin{cases} 0 \leqslant \min(a,b) \leqslant a \\ 0 \leqslant \min(a,b) \leqslant b \end{cases}$$

Par produit d'inégalités positives, on en déduit

$$\min(a,b)^2 \leqslant ab$$

L'assertion finale des équivalences est donc vraie. Donc l'assertion initiale est également vraie.
Bilan général :

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}^+, \quad |\sqrt{a}-\sqrt{b}| \leqslant \sqrt{|a-b|}$$

(iv) Un élève (Émil année 2022-2023, promo 2024) me propose une preuve astucieuse.
Après l'avoir décortiquée, on obtient une preuve très élégante.
On cherche à montrer que $8(a^4+b^4) - (a+b)^4 \geqslant 0$.
On a l'égalité remarquable suivante :

$$(a+b)^4 + (a-b)^4 \;=\; 2\Big[a^4 + 6a^2b^2 + b^4\Big]$$

Ainsi, la différence $8(a^4+b^4) - (a+b)^4$ vaut

$$\begin{aligned}8(a^4+b^4) - (a+b)^4 &= 8(a^4+b^4) - 2\Big[a^4+6a^2b^2+b^4\Big] + (a-b)^4 \\ &= 6(a^4 - 2a^2b^2 + b^4) + (a-b)^4 \\ &= 6(a^2-b^2)^2 + (a-b)^4\end{aligned}$$

Et cette dernière expression est bien entendu positive.

Preuve standard (faisable et trouvable par tous). Soit $a, b \in \mathbb{R}^+$.

— Cas $b = 0$. L'inégalité à montrer est triviale.

— Cas $b \neq 0$. L'inégalité à montrer est alors équivalente à

$$\frac{1}{b^4}(a+b)^4 \leqslant \frac{1}{b^4}8(a^4+b^4)$$

c'est-à-dire

$$\Big(\frac{a}{b}+1\Big)^4 \ \leqslant\ 8\Big(\frac{a^4}{b^4}+1\Big)$$

Montrons que $f : x \mapsto 8(x^4+1)-(x+1)^4$ est positive sur $\mathbb{R}$.
En développant, on trouve $f : x \mapsto 7x^4-4x^3-6x^2-x+7$.
Cette fonction f est 3 fois dérivable et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 28x^3-12x^2-12x-4 \\ f''(x) &= 84x^2-24x-12 \\ f'''(x) &= 12(14x-2) \end{aligned}$$

x	$-\infty$		7		$+\infty$
Signe de $f'''(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f''		↘	>0	↗	
signe de $f''(x)$		$+$		$+$	

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Variations de f'	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		↘	0	↗	

On en déduit que f est positive.
Ainsi,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (x+1)^4 \leqslant 8(x^4+1)$$

En particulier, pour $x = \dfrac{b}{a}$, on a

$$\Big(\frac{a}{b}+1\Big)^4 \ \leqslant\ 8\Big(\frac{a^4}{b^4}+1\Big)$$

D'où $(a+b)^4 \leqslant 8(a^4+b^4)$.

Une remarque. Un élève (Baptiste) me fait astucieusement remarquer que si on garde l'expression initiale de f (sans développer), on trouve une expression très agréable de f' que l'on peut factoriser à l'aide de Bernoulli :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8(4x^3)-4(x+1)^3 \\ &= 4\Big((2x)^3-(x+1)^3\Big) \\ &= 4\Big(2x-(x+1)\Big)\Big((2x)^2+(2x)(x+1)+(x+1)^2\Big) \\ &= 4(x-1)(7x^2+4x+1) \end{aligned}$$

Comme le discriminant du polynôme de degré 2 est négatif, on obtient directement :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		↘	0	↗	

105

Montrons que pour tout $y \in [1,+\infty[$, il existe un unique $x \in [1,+\infty[$ tel que $y = f(x)$.

Soit $y \in [1,+\infty[$.

Analyse. Supposons qu'il existe $x \in [1,+\infty[$ tel que $y = f(x)$.

On a alors

$$\frac{1}{2}\Big(x + \frac{1}{x}\Big) = y$$

d'où en multipliant par 2, puis par x

$$x^2 + 1 = 2yx$$

d'où

$$x^2 - 2yx + 1 = 0$$

d'où

$$x = y + \sqrt{y^2-1} \text{ ou } x = y - \sqrt{y^2-1}$$

Comme $y \in [1,+\infty[$, on a $y + \sqrt{y^2-1} \geqslant 1$ et $y + \sqrt{y^2-1} \leqslant 1$; de plus, ces deux réels sont égaux (ils valent 1) lorsque $y = 1$.

Comme $x \in [1,+\infty[$, on a nécessairement $x = y + \sqrt{y^2-1}$.

Bilan de l'analyse. Si x existe, alors il n'y a pas le choix, $x = y + \sqrt{y^2-1}$.

Synthèse. Posons $x = y + \sqrt{y^2-1}$. Vérifions que $x \in [1,+\infty[$ et $f(x) = y$.

- ⋆ On a $y \geqslant 1$ et $\sqrt{y^2-1} \geqslant 0$. Par somme $x \geqslant 1$.
- ⋆ On peut calculer par la brute force $f(x)$ et tomber sur y. Mais on peut aussi remonter les calculs de l'analyse : notre x est solution de $x^2 - 2yx + 1 = 0$, d'où $x^2 + 1 = 2yx$, d'où en multipliant par $\frac{1}{x}$, on obtient $x + \dfrac{1}{x} = 2y$, puis $f(x) = y$.

Bilan. On a montré qu'il existe un unique $x \in [1,+\infty[$ tel que $y = f(x)$, à savoir $x = y + \sqrt{y^2-1}$.

Bilan général. Pour tout $y \in [1,+\infty[$, il existe un unique $x \in [1,+\infty[$ tel que $y = f(x)$, à savoir $x = y + \sqrt{y^2-1}$.

Autrement dit, l'application $g : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & [1,+\infty[\\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ est bijective et

$$g^{-1} : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & [1,+\infty[\\ y & \longmapsto & y + \sqrt{y^2-1} \end{array}$$

Une autre solution

On étudie les variations de la fonction f sur $[1,+\infty[$.

La fonction f est dérivable sur $[1,+\infty[$ et on a

$$\forall\, x \in [1,+\infty[, \quad f'(x) = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{x^2}\Big) = \frac{1}{2}\frac{x^2-1}{x^2}$$

On a le tableau suivant :

x	1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	0	$+$	
Variations de f	1	↗	$+\infty$

A la lecture de ce tableau, on constate que f induit une bijection g de $[1,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$:

$$g : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & [1,+\infty[\\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Mais ce tableau ne donne pas l'expression de la fonction réciproque de g.

Allons-y pour la recherche de g^{-1}.

Soit $y \in [1,+\infty[$.

D'après l'étude précédente (le tableau de variations), on sait qu'il existe $x \in [1, +\infty[$ tel que $y = f(x)$.
On a alors

$$\frac{1}{2}\Big(x + \frac{1}{x}\Big) = y$$

d'où en multipliant par 2, puis par x

$$x^2 + 1 = 2yx$$

d'où

$$x^2 - 2yx + 1 = 0$$

d'où

$$x = y + \sqrt{y^2 - 1} \text{ ou } x = y - \sqrt{y^2 - 1}$$

Comme $y \in [1, +\infty[$, on a $y + \sqrt{y^2 - 1} \geqslant 1$ et $y + \sqrt{y^2 - 1} \leqslant 1$; de plus, ces deux réels sont égaux (ils valent 1) lorsque $y = 1$.
Comme $x \in [1, +\infty[$, on a nécessairement $x = y + \sqrt{y^2 - 1}$.
Ainsi, $x = y + \sqrt{y^2 - 1}$ est l'unique antécédent de y par la fonction g.
Bilan :

$$\begin{array}{rccc} g^{-1} : & [1, +\infty[& \longrightarrow & [1, +\infty[\\ & y & \longmapsto & y + \sqrt{y^2 - 1} \end{array}$$

108

Montrons que f est strictement décroissante.
Soit $x < y$. Montrons que $f(x) > f(y)$.
Raisonnons par l'absurde et supposons que $f(x) \leqslant f(y)$.
Comme $f(x) \leqslant f(y)$, on a, par croissance de $f \circ f$:

$$f \circ f\big(f(x)\big) \leqslant f \circ f\big(f(y)\big)$$

Comme $x < y$, on a, par stricte décroissance de $f \circ f \circ f$:

$$f \circ f \circ f(x) > f \circ f \circ f(y)$$

Ces deux dernières inégalités centrées sont contradictoires.

109

Voici une solution élégante.
Supposons que f s'annule.
Il existe donc $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(a) = 0$. On a aussi $g(a) = 0$.

- ⋆ La décroissance de f implique que la fonction taux d'accroissement de f en a est négative :

$$\forall\, x \neq a, \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant 0$$

En effet, si $x \leqslant a$, alors $f(x) \geqslant f(a)$ et si $x \geqslant a$, alors $f(x) \leqslant f(a)$.

En utilisant le fait que $f(a) = 0$ et en multipliant par $x > 0$, on obtient

$$\forall\, x \neq a, \quad \frac{xf(x)}{x - a} \leqslant 0$$

- ⋆ La coissance de g implique que la fonction taux d'accroissement de g en a est positive :

$$\forall\, x \neq a, \quad \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \geqslant 0$$

En utilisant le fait que $g(a) = 0$ et la définition de g, on obtient :

$$\forall\, x \neq a, \quad \frac{xf(x)}{x - a} \geqslant 0$$

On obtient donc

$$\forall\, x \neq a, \quad \frac{xf(x)}{x - a} = 0$$

D'où

$$\forall\, x \neq a, \quad xf(x) = 0$$

Comme x est non nul, on obtient

$$\forall\, x \neq a, \quad f(x) = 0$$

De plus, $f(a) = 0$.
On obtient donc $\quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = 0.$
Donc f est nulle.

On montre que φ est $6T$-périodique. Je vous laisse faire la vérification.

113

On doit trouver

$]1, +\infty[$ $]\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k,\ 2k+1[$