Fonctions usuelles

I Logarithme népérien et exponentielle 2
La fonction logarithme népérien
La fonction exponentielle
Limites de taux d'accroissement
Logarithme et exponentielle en base quelconque

II Fonctions puissances 5
Puissance entière et puissance rationnelle
Puissance réelle quelconque
Mélange fonction puissance et fonction exponentielle

III Croissances comparées. 8

IV Fonctions circulaires et leurs réciproques 9
La fonction Arc tangente
La fonction Arc sinus
La fonction Arc cosinus
Dérivabilité des fonctions Arc sinus et Arc cosinus

V Fonctions hyperboliques 14
Fonctions sinus et cosinus hyperboliques
Formulaire de trigonométrie hyperbolique

VI Fonctions à valeurs complexes 15
Généralités
Dérivée d'une fonction complexe
Opérations sur les fonctions dérivables
Dérivée de $\exp(f)$
Caractérisation des fonctions constantes
Dérivées successives

I. Logarithme népérien et exponentielle

On va d'abord construire la fonction logarithme népérien puis en déduire la construction de l'exponentielle.

La fonction logarithme népérien

Théorème. Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive.
Autrement dit, étant donné $f : I \to \mathbb{R}$ continue, il existe une fonction dérivable $F : I \to \mathbb{R}$ telle que $F' = f$.
Deux primitives de f diffèrent d'une fonction constante.

Théorème de la limite monotone pour les fonctions. Toute fonction monotone sur un intervalle admet une limite (finie ou infinie) aux extrémités de cet intervalle.

1

Définition.
La fonction *logarithme népérien*, notée ln, est définie sur $]0,+\infty[$ comme étant l'unique primitive qui s'annule en 1 de la fonction inverse.
Autrement dit :

$$\forall\, x \in\,]0,+\infty[, \quad \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

2

Proposition. La fonction logarithme vérifie :

(i) $\forall\, a, b \in\,]0,+\infty[, \quad \ln(ab) = \ln a + \ln b$

(ii) $\forall\, x, y \in\,]0,+\infty[, \quad \ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

(iii) $\forall\, x \in\,]0,+\infty[,\ \forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad \ln(x^n) = n \ln x.$

3

Proposition. La fonction logarithme népérien est une bijection strictement croissante de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

x	0		1		$+\infty$
$\ln'(x)$			$+$		
$\ln$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4

Proposition. On a

$$\forall\, x \in\,]-1,+\infty[, \quad \ln(1+x) \leqslant x$$

avec égalité si et seulement si $x = 0$.

La fonction exponentielle

5 **Définition.**
La fonction *exponentielle*, notée exp, est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

6 **Proposition.**

i) La fonction exponentielle est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0,+\infty[$, vérifiant $\exp 0 = 1$.

ii) On a :
$$\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \exp x = +\infty.$$

iii) La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a $\exp' = \exp$.

7 **Proposition.** La fonction exponentielle vérifie :

(i) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \exp(x+y) = \exp x \exp y$

(ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \exp(x-y) = \dfrac{\exp x}{\exp y}$

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \exp(x)^n = \exp(nx)$.

8 **Proposition.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(x) \geqslant x+1$ avec égalité si et seulement si $x = 0$

Remarque à lire.
Soit $a \in \mathbb{R}$. On verra plus tard que le réel $\exp(a)$ peut être vu comme une somme *infinie* de nombres réels :
$$\mathrm{e}^a = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} = 1 + a + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{4!}a^4 + \cdots + \frac{1}{n!}a^n + \cdots +$$
En particulier, le réel $\mathrm{e} = \exp(1) \approx 2{,}718281$ (irrationnel !) est une somme *infinie* de nombres *rationnels* :
$$\mathrm{e} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots$$
$$\mathrm{e} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \cdots$$
Amusant : wikipédia me signale que les 6 premières décimales de e vérifient $718 + 281 = 999$.
Il me signale aussi que $\mathrm{e} \approx 2{,}7\,1828\,1828$. Et que $\left(\pi^4+\pi^5\right)^{\frac{1}{6}} \approx 2{,}7182818086\ldots$ Et que $\dfrac{878}{323} \approx 2{,}718$.

Limites de taux d'accroissement

9 **Proposition.** On a
$$\lim_{t\to1} \frac{\ln t}{t-1} = 1 \qquad \lim_{x\to0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to0} \frac{\mathrm{e}^x-1}{x} = 1$$

Logarithme et exponentielle en base quelconque

10 **Définition.** Soit $a \in]0, +\infty[$ différent de 1.

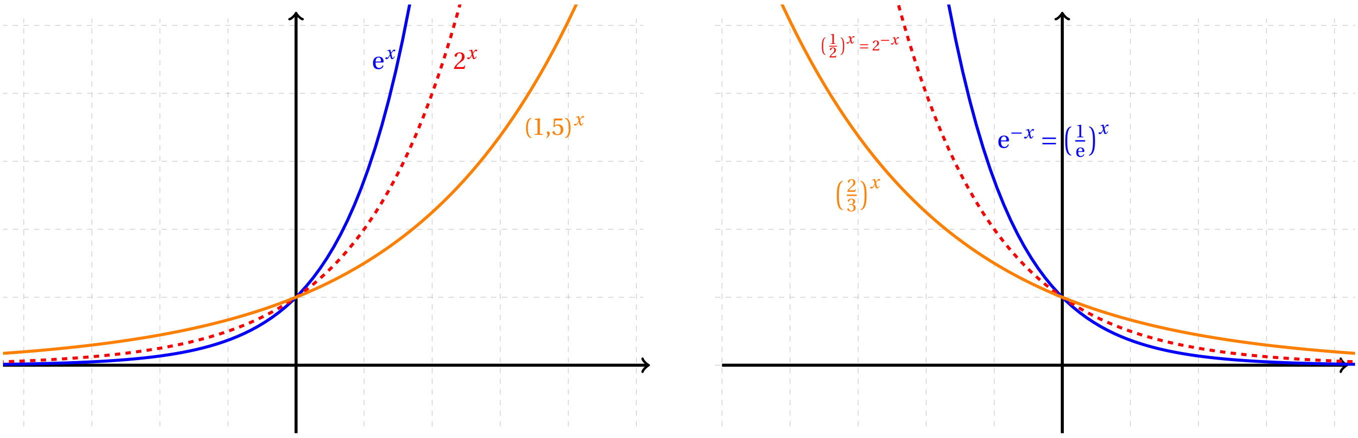
— On appelle logarithme de base a la fonction, notée $\log_a$, définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\log_a(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\ln x}{\ln a}$$

— On appelle exponentielle de base a la fonction, notée $\exp_a$ ou bien $a^{\bullet}$, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\exp_a(x) = a^x \stackrel{\text{def}}{=} \exp(x \ln a)$$

Voici la fonction exponentielle en base a.
À gauche, des $a > 1$ (avec $a = \frac{3}{2}$; 2 ; e) et à droite des $a < 1$ (avec $a = \frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{e}$)



II. Fonctions puissances

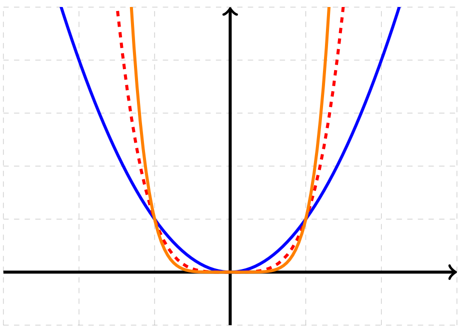
Puissance entière et puissance rationnelle

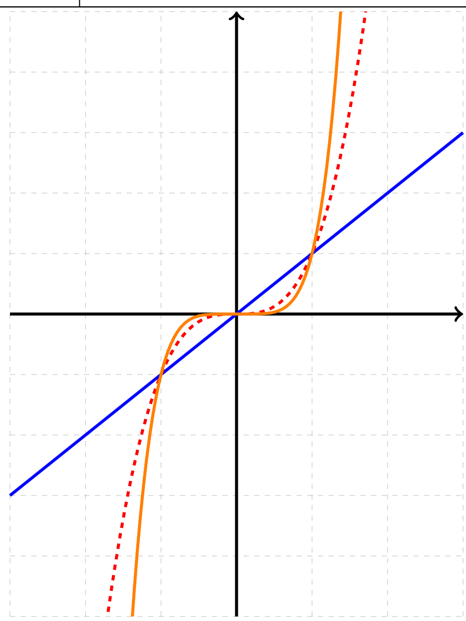
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction « puissance n » est définie par $\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}} \end{array}$

En fonction de la parité de n, les variations sont :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^n n pair	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
x^n n impair	$-\infty$ ↗	$+\infty$





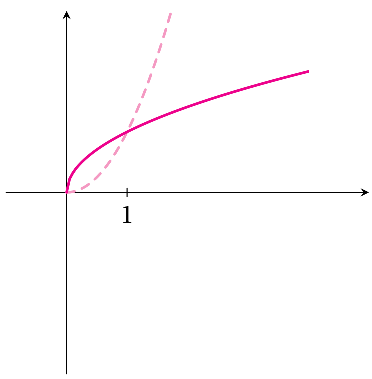
Constat. Posons $I = \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \text{si } n \text{ est pair} \\ \mathbb{R} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

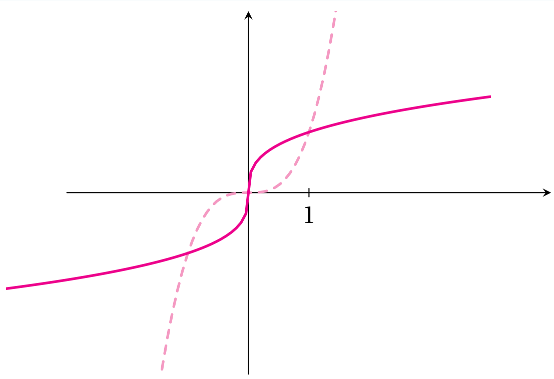
La restriction de la fonction « puissance n » à I induit une bijection de I sur $J = \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \text{si } n \text{ est pair} \\ \mathbb{R} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

La fonction « racine n-ème » est la réciproque de cette bijection.

11 **Définition.** On garde les notations précédentes.
La fonction racine n-ème est définie par :

$$\begin{array}{ccl} J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sqrt[n]{t} = \text{l'unique } x \in I \text{ tel que } x^n = t \end{array}$$





12 **Question.** En considérant la fonction racine carrée comme la bijection réciproque de ..., retrouver le fait que la fonction racine carrée est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Puissance réelle quelconque

Soit $x \in]0, +\infty[$.
Par définition de la fonction exponentielle, on a $x = \exp(\ln x)$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$x^n = \Big(\exp(\ln x)\Big)^n = \exp(n \ln x).$$

On vient d'obtenir une expression de « x puissance n » avec $n \in \mathbb{Z}$ à l'aide de exp.

13 **Définition.**

- Soit $x \in]0, +\infty[$.
  Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit le réel « x puissance α », noté x^α, par :

$$x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$$

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction « puissance α » est définie par

$$\begin{array}{rccl} \varphi_\alpha : &]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^\alpha = \exp(\alpha \ln x) \end{array}$$

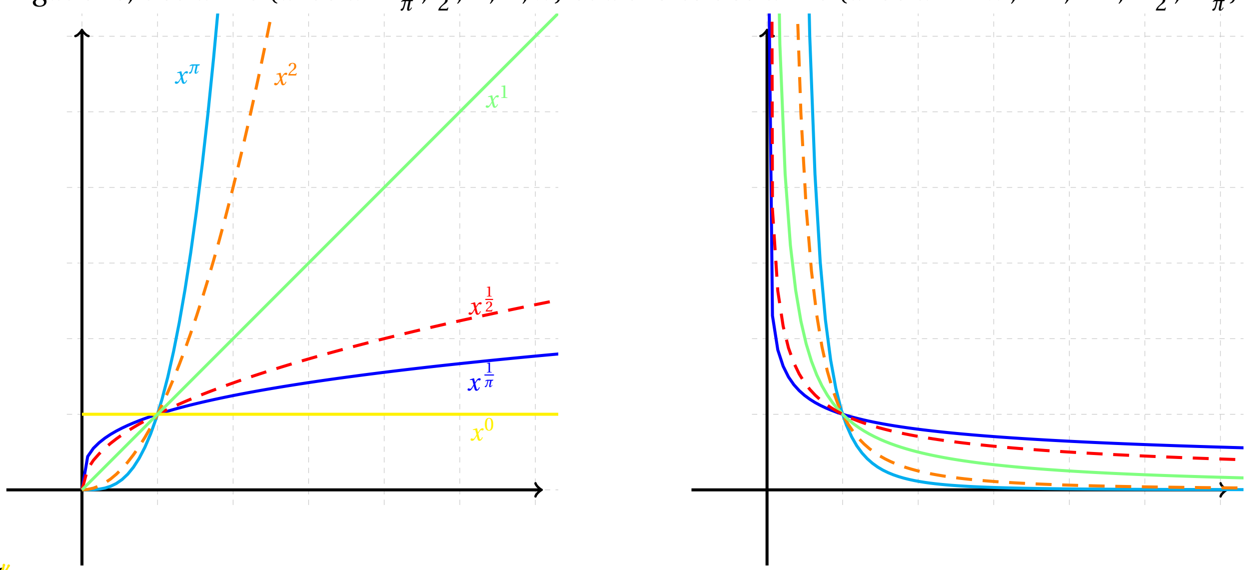
- Soit $n \in \mathbb{N}$.
  La fonction φ_n est la restriction à $]0, +\infty[$ de la bonne vieille fonction « puissance n » définie sur $\mathbb{R}$.
- Soit $m \in \mathbb{Z}^-$.
  La fonction φ_m est la restriction à $]0, +\infty[$ de la bonne vieille fonction « puissance m » définie sur $\mathbb{R}^*$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  La fonction $\varphi_{\frac{1}{n}}$ est la restriction à $]0, +\infty[$ de la bonne vieille fonction « racine n-ème » définie sur J.
  Autrement dit, $\forall\, x \in]0, +\infty[, \quad x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$
- En fonction du signe de α, les variations sont :

x	0	$+\infty$
x^α $\alpha > 0$	0 ↗	$+\infty$

x	0	$+\infty$
x^α $\alpha < 0$	$+\infty$ ↘	0

Des dessins

À gauche, des $\alpha > 0$ (avec $\alpha = \frac{1}{\pi}\,;\, \frac{1}{2}\,;\, 1\,;\, 2\,;\, \pi$) et à droite des $\alpha < 0$ (avec $\alpha = -\pi\,;\, -2\,;\, -1\,;\, -\frac{1}{2}\,;\, -\frac{1}{\pi}$)



14 **Proposition.**
Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Soit $x, y \in]0,+\infty[$.

$$x^a y^a = (xy)^a \qquad x^a x^b = x^{a+b} \qquad \ln(x^a) = a\ln x \qquad (x^a)^b = x^{ab} \qquad 1^a = 1 \qquad x^0 = 1$$

Les résultats ci-dessus confortent le bien fondé de la notation puissance, puisqu'ils généralisent les règles de calcul que l'on connaît déjà sur les puissances *entières*.

15 **Proposition.**
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction φ_α est dérivable sur $]0,+\infty[$ et :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \varphi'_\alpha(x) = \alpha\, x^{\alpha-1}.$$

Mélange fonction puissance et fonction exponentielle

16 **Définition de PistonIII.**
Une fonction « avec des x en bas et en haut » est une fonction du type $f : x \mapsto u(x)^{v(x)}$ où u et v sont deux fonctions avec u strictement positive.
Pour traiter ce genre de fonction, il est quasiment obligatoire de revenir à l'écriture

$$\exp\Big(v(x)\ln\big(u(x)\big)\Big)$$

17 **Question.** Étudier la fonction $f : x \mapsto x^{\ln x}$.

18 **Question.** Étudier la fonction $f : x \mapsto x^x$.

19 **Question.** Soit I un intervalle. Soit $u \in \mathbb{R}^I$ et $v \in \mathbb{R}^I$ dérivables avec u strictement positive.
Montrer que $f : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & u(x)^{v(x)} \end{array}$ est dérivable et calculer sa dérivée.

III. Croissances comparées

20 **Proposition.**

— On a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} x\ln x=0$$

— Soit $a,\ b>0$. On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^b}{x^a}=0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} x^a|\ln x|^b=0.$$

- La valeur absolue est indispensable dans la seconde relation car la fonction logarithme est négative sur l'intervalle $]0,1]$.
- Le résultat précédent ne traite que les cas $a>0$ et $b>0$. Dans les autres cas :
  — si $a<0$ et $b<0$, on s'y ramène facilement par passage à l'inverse,
  — sinon, les opérations sur les limites permettent de conclure directement.

21 **Proposition.**

— On a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^x=0$$

— Soit $a,\ b>0$. On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{ax}}{x^b}=+\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} |x|^b e^{ax}=0.$$

22 **Question.**

1. Étudier les variations de $g:\ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\ln x}{x} \end{array}$.
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, montrer $n\leqslant 2^n$.
3. En considérant $g(4^n)$, retrouver le théorème de croissance comparée : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

IV. Fonctions circulaires et leurs réciproques

La fonction Arc tangente

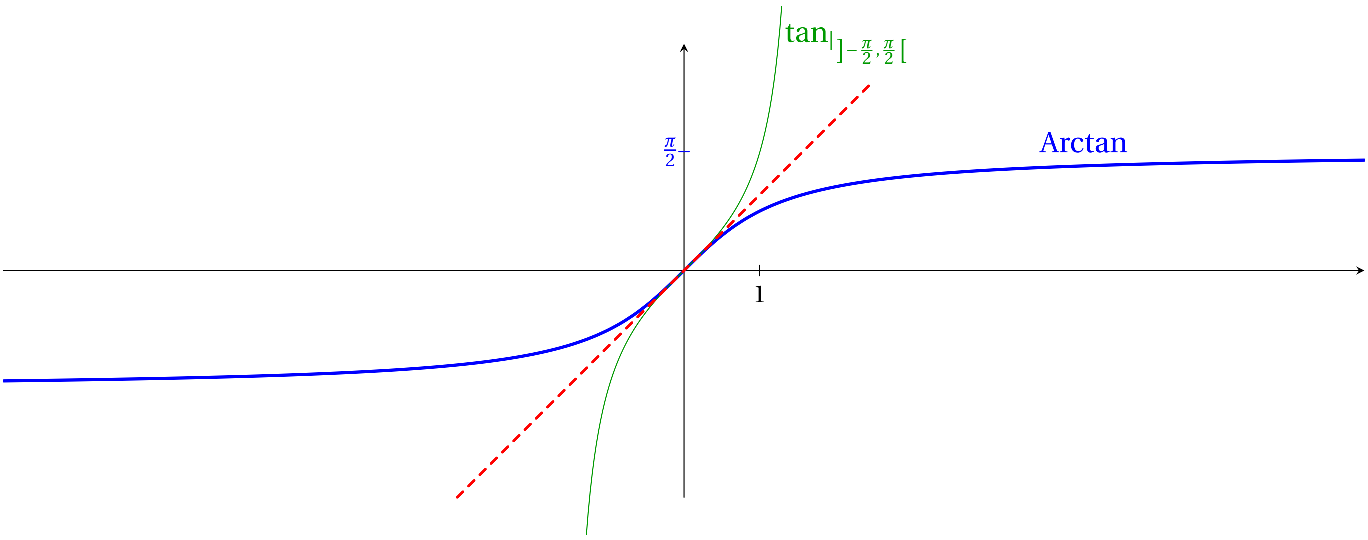
La restriction de la fonction tangente à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $]-\infty, +\infty[$.
En effet, la fonction $f = \tan_{|\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[}$

— est injective, par stricte monotonie de f

— a pour image $]-\infty, +\infty[$. Par continuité de f et le TVI, l'ensemble $f\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$ est un intervalle. Et les extrémités de cet intervalle sont $-\infty$ et $+\infty$.

23 **Définition.**
La fonction Arc tangente est la bijection réciproque de la fonction tangente restreinte à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Autrement dit :

$$\operatorname{Arctan} : \begin{array}{rcl}]-\infty, +\infty[& \longrightarrow & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x & \longmapsto & \text{l'unique } \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ tel que } \tan\theta = x \end{array}$$



- La fonction Arc tangente est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$. De plus, elle est impaire.
- Que vaut $\operatorname{Arctan}\big(\tan(3\pi)\big)$?
- On a

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$\operatorname{Arctan} x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

- On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan_{|\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[}\left(\operatorname{Arctan} x\right) = x \qquad \text{et} \qquad \forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \operatorname{Arctan}\left(\tan_{|\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[} \theta\right) = \theta$$

- On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan\left(\operatorname{Arctan} x\right) = x \qquad \text{et} \qquad \cancel{\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Arctan}\left(\tan\theta\right) = \theta}$$

- Pour montrer l'égalité $\operatorname{Arctan} x = \theta$, il équivalent de montrer $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\tan\theta = x$.

24 **Question.** Montrer que $\quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

25 **Proposition.**

— La fonction Arc tangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

— On a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Arctan} x}{x} = 1$$

La courbe de la fonction Arc tangente admet une tangente au point $(0,0)$: c'est la droite ayant pour équation $y = x$.

— Soit $u : I \to \mathbb{R}$ dérivable.
La fonction $\operatorname{Arctan}\circ u$ est dérivable sur I et on a

$$(\operatorname{Arctan}\circ u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

26 **Question.** La fonction $f : x \longmapsto \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}\frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par opérations.
Sa dérivée vaut ...
Qu'en déduire ?

La fonction Arc sinus

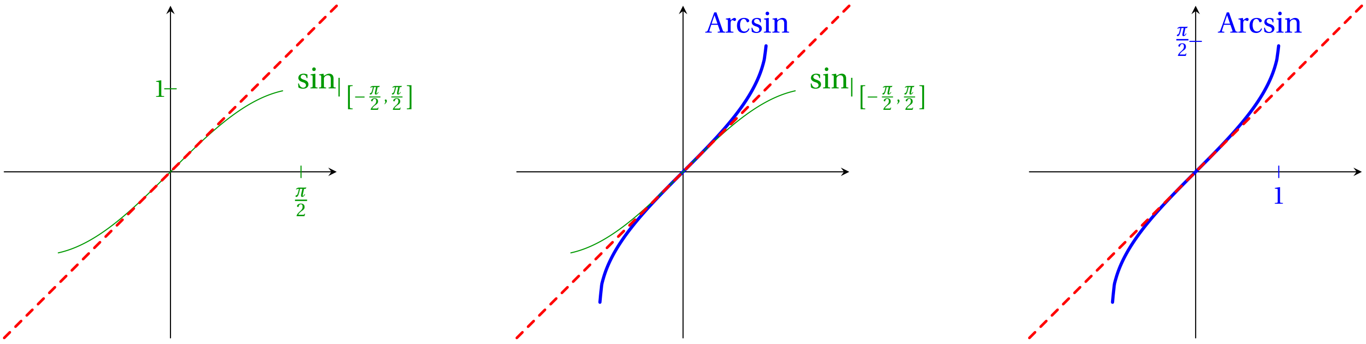
La restriction de la fonction sinus à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $]-1,1[$.
En effet, la fonction $f = \sin_{|\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$

— est injective, par stricte monotonie de f

— a pour image $[-1,1]$. Par continuité de f et le TVI, l'ensemble $f\Big(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\Big)$ est un intervalle. Et les extrémités de cet intervalle sont -1 et 1.

27 **Définition.**
La fonction Arc sinus est la bijection réciproque de la fonction sinus restreinte à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et corestreinte à $[-1,1]$.
Autrement dit :

$$\begin{array}{rccl} \text{Arcsin}: & [-1,1] & \longrightarrow & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ & x & \longmapsto & \text{l'unique } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ tel que } \sin\theta = x \end{array}$$



- La fonction Arc sinus est strictement croissante et continue sur $[-1,1]$. De plus, elle est impaire.
- Que vaut $\text{Arcsin}\big(\sin(3\pi)\big)$?
- On a

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\text{Arcsin}\, x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

- On a

$$\forall\, x \in [-1,1], \quad \sin_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\big(\text{Arcsin}\, x\big) = x \qquad \text{et} \qquad \forall\,\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \text{Arcsin}\big(\sin_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\theta\big) = \theta$$

- On a

$$\forall\, x \in [-1,1], \quad \sin\big(\text{Arcsin}\, x\big) = x \qquad \text{et} \qquad \cancel{\forall\,\theta \in \mathbb{R}, \quad \text{Arcsin}\big(\sin\theta\big) = \theta}$$

- Pour montrer l'égalité $\text{Arcsin}\, x = \theta$, il équivalent de montrer $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\sin\theta = x$.

28 **Question.** Soit $x \in [-1,1]$. Montrer que $\cos(\text{Arcsin}\, x) = \sqrt{1-x^2}$.

29 **Question.** Soit $f : x \mapsto \text{Arcsin}(\sin x)$.
Déterminer l'ensemble de définition de f.
Pourquoi peut-on restreindre l'étude de f à $[0,\pi]$?
Montrer que la courbe de f admet la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ comme axe de symétrie.
En déduire le graphe de f.

La fonction Arc cosinus

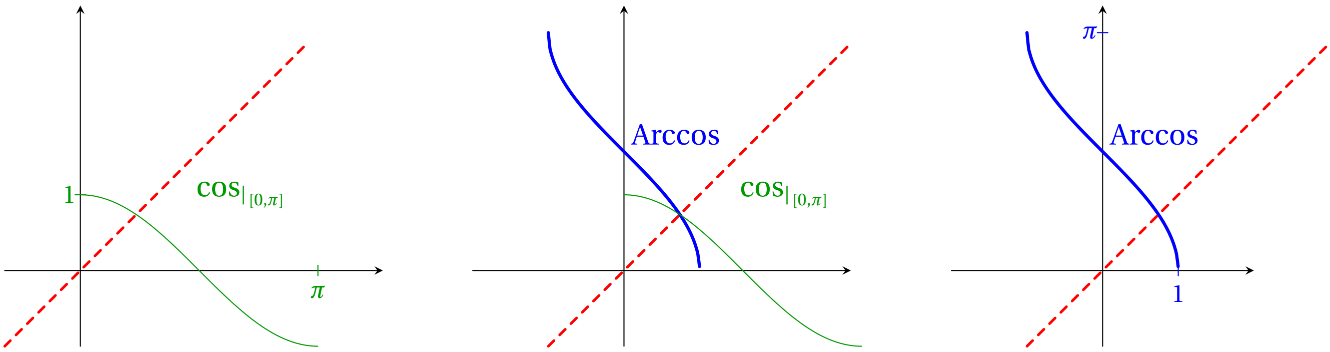
La restriction de la fonction cosinus à $[0,\pi]$ réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$.
En effet, la fonction $f = \cos_{|[0,\pi]}$

— est injective, par stricte monotonie de f

— a pour image $[-1,1]$. Par continuité de f et le TVI, l'ensemble $f\big([0,\pi]\big)$ est un intervalle. Et les extrémités de cet intervalle sont -1 et 1.

30 **Définition.**
La fonction Arc cosinus est la bijection réciproque de la fonction cosinus restreinte à $[0,\pi]$ et corestreinte à $[-1,1]$.
Autrement dit :

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{Arccos}: & [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ & x & \longmapsto & \text{l'unique } \theta \in [0,\pi] \text{ tel que } \cos\theta = x \end{array}$$



- La fonction Arc cosinus est strictement décroissante et continue sur $[-1,1]$.
  Elle n'a pas de parité. En revanche, sa courbe possède le point $(0,\frac{\pi}{2})$ comme centre de symétrie.
- Que vaut $\mathrm{Arccos}\big(\cos(3\pi)\big)$?
- On a

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\mathrm{Arccos}\,x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

- On a
$$\forall x \in [-1,1], \quad \cos_{|[0,\pi]}\Big(\mathrm{Arccos}\,x\Big) = x \qquad \text{et} \qquad \forall \theta \in [0,\pi], \quad \mathrm{Arccos}\Big(\cos_{|[0,\pi]}\theta\Big) = \theta$$
- On a
$$\forall x \in [-1,1], \quad \cos\Big(\mathrm{Arccos}\,x\Big) = x \qquad \text{et} \qquad \xcancel{\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{Arccos}\Big(\cos\theta\Big) = \theta}$$
- Pour montrer l'égalité $\mathrm{Arccos}\,x = \theta$, il équivalent de montrer $\theta \in [0,\pi]$ et $\cos\theta = x$.

31 **Question.** Soit $x \in [-1,1]$. Montrer que $\sin(\mathrm{Arccos}\,x) = \sqrt{1-x^2}$.

Dérivabilité des fonctions Arc sinus et Arc cosinus

32 **Proposition.**

- ⋆ La fonction Arcsin n'est pas dérivable en ± 1.
- ⋆ La fonction Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et on a

$$\forall\, x \in\,]-1,1[, \quad \text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- ⋆ Soit $u : I \to \mathbb{R}$ à valeurs dans $]-1,1[$ et dérivable.
  La fonction $\text{Arcsin}\circ u$ est dérivable sur I et on a

$$(\text{Arcsin}\circ u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

— La fonction Arccos n'est pas dérivable en ± 1.

— La fonction Arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et on a

$$\forall\, x \in\,]-1,1[, \quad \text{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

— Soit $u : I \to \mathbb{R}$ à valeurs dans $]-1,1[$ et dérivable.
La fonction $\text{Arccos}\circ u$ est dérivable sur I et on a

$$(\text{Arccos}\circ u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

- La non-dérivabilité de Arcsin et Arccos en ± 1 se lit sur la courbe : présence de tangente verticale.
- La dérivée de Arcsin est paire (la dérivée d'une fonction impaire, à savoir Arcsin, est paire).
  La dérivée de Arccos n'a pas de parité.

V. Fonctions hyperboliques

Fonctions sinus et cosinus hyperboliques

Rappel. Toute fonction se décompose de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

33 **Définition.**
Les fonctions **cosinus hyperbolique** et **sinus hyperbolique** sont définies sur $\mathbb{R}$ par

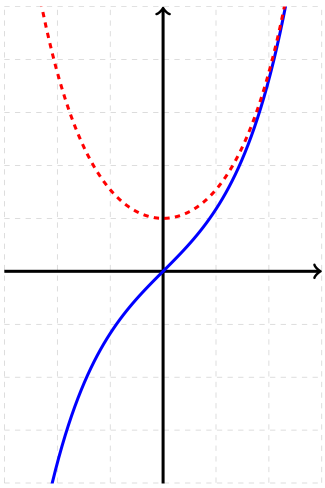
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Ce sont respectivement les parties paires et impaires de la fonction exponentielle.

34 **Proposition.** Les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\operatorname{ch}' = \operatorname{sh} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$$

- Voici les graphes à apprendre :



- On a les tableaux de variations

x	$-\infty$		$+\infty$
signe de $\operatorname{sh}'(x)$		$+$	
variations de sh	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $\operatorname{ch}'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de ch	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

- La continuité de ces fonctions ainsi que leurs variations montrent que :
  — la fonction sinus hyperbolique est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$;
  — la fonction cosinus hyperbolique induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$.

Formulaire de trigonométrie hyperbolique

35 **Proposition.** Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$e^t = \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t \qquad \text{et} \qquad e^{-t} = \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t \qquad \text{et} \qquad \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$$

VI. Fonctions à valeurs complexes

Dans toute la suite, I est un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$.
Les fonctions à valeurs complexes seront étudiées en détail dans les chapitres suivants. Nous allons ici en donner quelques propriétés dont nous aurons besoin pour le calcul de primitives et la résolution des équations différentielles.

Généralités

Une fonction f définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{C}$ est une *fonction complexe de la variable réelle.*
Pour une telle fonction f, on définit alors les fonctions :

— *partie réelle de f*, notée $\operatorname{Re} f$, définie par $\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \operatorname{Re}\big(f(t)\big) \end{array}$

— *partie imaginaire de f*, notée Imf, définie par $\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & Im\big(f(t)\big) \end{array}$

— *module de f*, notée $|f|$, définie par $\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \big|f(t)\big| \end{array}$

— *conjuguée de f*, notée $\overline{f}$, définie par $\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \overline{f(t)} \end{array}$

En définissant l'opération $+$ sur les fonctions complexes comme pour les fonctions réelles, on a

$$f = \operatorname{Re} f + \mathrm{i}\, Imf \qquad \text{et} \qquad |f|^2 = (\operatorname{Re} f)^2 + (Imf)^2 = f\overline{f}$$

36 **Définition.** Soit $f : I \to \mathbb{C}$.
On dit que la fonction complexe f est bornée lorsque la fonction réelle $|f|$ est bornée.

37 **Proposition.** Soit $f : I \to \mathbb{C}$.
La fonction f est bornée si et seulement si les fonctions $\operatorname{Re}(f)$ et $Im(f)$ sont bornées.

38 **Proposition.** Soit $f : I \to \mathbb{C}$ et $g : I \to \mathbb{C}$ deux fonctions bornées et $\lambda \in \mathbb{C}$.
Alors les fonctions $f+g$, fg, λf sont bornées.

Dérivée d'une fonction complexe

39 **Définition.**
Soit $f : I \to \mathbb{C}$.
On dit que f est dérivable sur I lorsque les fonctions réelles $\operatorname{Re} f$ et Imf sont dérivables sur I.
Dans ce cas, on a

$$f' = (\operatorname{Re} f)' + \mathrm{i}(Imf)'$$

- Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable, alors bien évidemment la fonction $\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & f(t) \end{array}$ est dérivable.
- Une fonction constante $I \to \mathbb{C}$ est dérivable et de dérivée nulle (ouf, c'est rassurant).

Opérations sur les fonctions dérivables

40 **Proposition (opérations sur I).** Soit $f, g \in \mathbb{C}^I$. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.
Si f et g sont dérivables sur I, alors :

— $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.

— fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.

— pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f^n est dérivable sur I et $(f^n)' = nf'f^{n-1}$.

— pour $n \in \mathbb{Z}^{-*}$, si f ne s'annule pas sur I, la fonction f^n est dérivable sur I et $(f^n)' = nf'f^{n-1}$.

— si g ne s'annule pas sur I, la fonction $\dfrac{1}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = \dfrac{-g'}{g^2}$.

— si g ne s'annule pas sur I, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

41 **Proposition.** Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $\varphi : I \to J$ une fonction *réelle* dérivable et $f : J \to \mathbb{C}$ une fonction *complexe* dérivable.
Alors la fonction complexe $f \circ \varphi$ est dérivable sur I et on a $(f \circ \varphi)' = (f' \circ \varphi) \times \varphi'$

42 **Question.** Soit $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable. Montrer que $\overline{f}$ est dérivable et donner sa dérivée en fonction de f.

Dérivée de $\exp(f)$

43 **Proposition.**
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable.
Alors la fonction $\exp f : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \exp\big(f(t)\big) \end{array}$ est dérivable sur I et $\big(\exp f\big)' = f' \exp f$.

- Pour la preuve, on ne peut pas appliquer la proposition précédente. WHY?
- Soit $\omega \in \mathbb{C}$. La fonction complexe $\psi_\omega : t \mapsto \mathrm{e}^{\omega t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\psi'_\omega = \omega \psi_\omega$.

44 **Question.** Soit $\rho : I \to \mathbb{R}$ et $\theta : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles dérivables sur I.
Montrer que la fonction $f : t \mapsto \rho(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)}$ est dérivable sur I et donner sa dérivée.

Caractérisation des fonctions constantes

45 **Proposition.** Soit $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable sur l'intervalle I.
La fonction f est constante sur I si et seulement si sa dérivée est nulle sur I.

Dérivées successives

Même définition que pour les fonctions à valeurs réelles.

46 **Question.**
Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{t-\mathrm{i}} \end{array}$. Montrer que f est dérivable et donner sa dérivée.
Plus généralement, montrer que f est n-fois dérivable pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donner l'expression de $f^{(n)}$.

Fonctions usuelles

preuve et éléments de correction