

Fonctions usuelles

exercices



Fonctions usuelles

Faire ses gammes

101**Dérivons**

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée des fonctions suivantes.

- | | |
|--|--|
| (i) $x \mapsto e^{-\frac{a}{x^2}}$ | (vii) $x \mapsto \operatorname{Arctan}(e^x)$ |
| (ii) $x \mapsto x - a\sqrt{x}$ | (viii) $x \mapsto \operatorname{Arcsin}(x^2 - 1)$ |
| (iii) $x \mapsto \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$ | (ix) $x \mapsto \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{1+x}\right)$ |
| (iv) $x \mapsto \sqrt{1 + \cos^2 x}$ | (x) $x \mapsto \frac{\cos^3 x}{(1 - \cos x)^2}$ |
| (v) $x \mapsto (ax + b)^x$ | |
| (vi) $x \mapsto \frac{\cos(ax^2 + bx + 1)}{\sin(x)}$ | |

102**Des équations**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

- (i) $\ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \frac{\ln x + \ln 3}{2}$
(ii) $3^{2x} - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$
(iii) $(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$
(iv) $\ln|2x+1| + \ln|x+3| < \ln 3$

103**Étude de fonctions**

Étudier les fonctions suivantes (domaine de définition, parité, périodicité, variations et limites.)

- | | |
|--|--|
| (i) $x \mapsto \frac{x^3}{x^2 - 3}$ | (v) $x \mapsto \frac{\tan(2x)}{\tan x}$ |
| (ii) $x \mapsto \ln(x-1) + \ln(x+1)$ | (vi) $x \mapsto x \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$ |
| (iii) $x \mapsto \ln(x^2 - 1)$ | (vii) $x \mapsto \sin(3x) + 3 \sin x$ |
| (iv) $x \mapsto \sqrt{\frac{\ln x }{x}}$ | |

Fonctions exponentielles et puissances

104**Écriture d'un entier en base 2**

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et

$$n = \sum_{i=0}^{p-1} a_i 2^i \quad \text{avec} \quad a_{p-1} = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 0, p-2 \rrbracket, a_i \in \{0, 1\}.$$

Montrer que $p = 1 + \lfloor \log_2(n) \rfloor$.

105**Des suites**

Les questions sont indépendantes

- Déterminer tous les couples d'entiers naturels distincts (n, p) non nuls tels que $n^p = p^n$.
- Déterminer les entiers naturels $n \in \mathbb{N}$ tels que $2^n \geq n^2$.

106

Max !

Déterminer, s'il existe, le maximum de $\{\sqrt[n]{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

107

Exponentielle et Taylor

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $e^x \geq \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.

108

Encadrement de e

Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$.

109

Du x en haut et en bas

1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $v : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications.

On suppose que u et v sont dérivables sur I et que u est strictement positive sur I .

Montrer que u^v est dérivable sur I et calculer sa dérivée.

2. Étudier et tracer le graphe de l'application $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^x & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

On précisera les éventuelles tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.

3. Même question avec $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} x^{\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

110

Une inégalité

Montrer : $\forall x \in]0, 1[, x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$.

Étudier les variations de la fonction $x \mapsto x \ln x + (1-x) \ln(1-x)$

Limites

111

Avec du log et de l'exponentielle

Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes :

(i) $x \mapsto \ln(x) - e^x$

(iii) $x \mapsto \frac{\ln(1+e^x)}{\sqrt{x}}$

(ii) $x \mapsto \frac{x^3}{\exp(\sqrt{x})}$

(iv) $x \mapsto \frac{\exp(\sqrt{x})}{\sqrt{\exp(x)}}$

112

Avec des fonctions puissances

Déterminer les limites suivantes :

(i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{x^x}}$

(iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^{b^x}}{b^{a^x}}$ où $1 < a < b$

(ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^{a^x}}{x^{x^a}}$ où $a > 1$

(iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x}$

(v) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/x}$

Fonctions trigonométriques circulaires

113 Graphe

Soit $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(\tan x)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Montrer que f est périodique.
3. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet l'origine comme centre de symétrie.
4. Tracer $\mathcal{C}_f$.

114 Avec Arctan

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Simplifier $\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan}(k)$.

On pourra calculer la tangente de cette expression.

2. En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{k^2 + k + 1} \right) \right)$.

115 Cosinus et Arctan

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Montrer que $\cos(\operatorname{Arctan} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

En déduire une formule analogue pour $\sin(\operatorname{Arctan} x)$.

116 Avec Arctan

1. Montrer que $\forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\}, \frac{1 - \cos t}{\sin t} = \tan(t/2)$.
2. Simplifier $\operatorname{Arctan} \left(\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} \right)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

117 Des identités

1. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2}$.
2. Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, $\operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{2} \operatorname{Arccos} x$.

118 Avec Arcsin

Ensemble de définition et simplification de f définie par $f(x) = \operatorname{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2})$.

119 Équations

Résoudre les équations

1. $\operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}(x+1) = \pi/2$;
2. $\operatorname{Arcsin} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right) = 2 \operatorname{Arctan} x$.

120 Formule d'Euler et Formule de Machin

1. Montrer la relation : $\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{3}$ (formule due à Euler).
2. Montrer la formule de Machin : $\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{239}$.
(Cette formule permet à John Machin (1680-1752) de déterminer en 1706 les 100 premières décimales exactes de π).

121 Encore une formule

Établir $\frac{\pi}{4} = 5 \operatorname{Arctan} \frac{1}{7} + 2 \operatorname{Arctan} \frac{3}{79}$.

Fonctions trigonométriques hyperboliques

122 Formules d'addition des fonctions hyperboliques

Soient x et y deux réels. Montrer les formules suivantes :

1. $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$ et $\operatorname{sh}(2x) = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$;
2. $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$ et $\operatorname{ch}(2x) = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x$.

123 Une espèce de formule de Moivre

Rappeler la formule de Moivre chez les nombres complexes.

Montrer : $\forall p \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^p = \operatorname{ch}(px) + \operatorname{sh}(px)$.

124 Duplication

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

En utilisant la formule de duplication du sinus hyperbolique, simplifier $2^n \prod_{k=1}^n \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

125 Une équation

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = 0$.

126 Sommes

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Calculer $\sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(kx + y)$, $\sum_{k=0}^n \operatorname{sh}(kx + y)$ et $\sum_{k=0}^n k \operatorname{sh}(kx)$.

127 Fonctions hyperboliques réciproques

1. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation $y = \operatorname{sh} x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Qu'en déduit-on ?
2. Même question avec la fonction ch .

128 La fonction tangente hyperbolique

On appelle *tangente hyperbolique* et on note th la fonction $\frac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$.

1. Étudier la fonction th et tracer son graphe.
2. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$ et $\operatorname{th}(2x) = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \geq 1$, on a $\left(\frac{1 + \operatorname{th} x}{1 - \operatorname{th} x}\right)^n = \frac{1 + \operatorname{th}(nx)}{1 - \operatorname{th}(nx)}$.
4. Montrer que th est injective sur $\mathbb{R}$, donc bijective de $\mathbb{R}$ dans son image. Déterminer une expression de sa réciproque, notée Argth .

Fonctions usuelles

corrigés

(i) $x \mapsto e^{-\frac{a}{x^2}}$

$\mathcal{D}f = \mathbb{R}^*$

$\mathcal{D}f' = \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(e^{-\frac{a}{x^2}} \right) &= (-a)(-2)x^{-3} e^{-\frac{a}{x^2}} \\ &= \frac{2a}{x^3} e^{-\frac{a}{x^2}} \end{aligned}$$

(ii) $x \mapsto x - a\sqrt{x}$

$\mathcal{D}f = \mathbb{R}^+$ et $\mathcal{D}f' =]0, +\infty[$

$$\frac{d}{dx} (x - a\sqrt{x}) = 1 - \frac{a}{2\sqrt{x}}$$

(iii) $x \mapsto \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \exp \left[x \ln \left(1 + \frac{a}{x}\right) \right]$

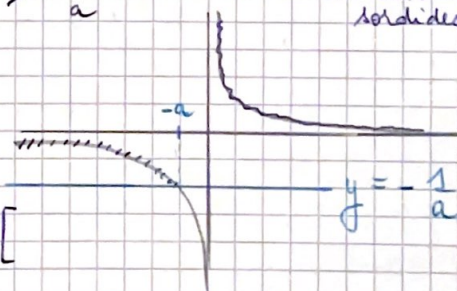
• Déf ?

On résout l'inéquation $1 + \frac{a}{x} > 0$ (le + efficacement possible

Cela équivaut à chercher les x tq $\frac{1}{x} > -\frac{1}{a}$ (au brouillon si vous faites des calculs sordides)

(appel: a est positif)

Petit dessin efficace :



BILAN :

$\mathcal{D}f =]-\infty, -a[\cup]0, +\infty[$

• $\mathcal{D}f' = \text{idem que } \mathcal{D}f$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \right) &= \left[1 \cdot \ln \left(1 + \frac{a}{x}\right) + x \cdot \frac{-\frac{a}{x^2}}{1 + \frac{a}{x}} \right] \exp \left[x \ln \left(1 + \frac{a}{x}\right) \right] \\ &= \left[\ln \left(1 + \frac{a}{x}\right) + \frac{-a}{x+a} \right] \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \end{aligned}$$

$$(iv) x \mapsto \sqrt{1 + \cos^2 x}$$

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 + \cos^2 x \geq 1$$

• A fortiori,

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 + \cos^2 x \geq 0$$

$$D'au \mathcal{D} = \mathbb{R}$$

• A fortiori

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 + \cos^2 x > 0$$

$$D'au \mathcal{D}'\text{é}ri = \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\sqrt{1 + \cos^2 x} \right) &= \frac{2(-\sin x)(\cos x)}{2\sqrt{1 + \cos^2 x}} \\ &= -\frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} \end{aligned}$$

$$(v) x \mapsto (ax+b)^x = \exp \left[x \ln(ax+b) \right]$$

$$\cdot \mathcal{D} =]-\frac{b}{a}, +\infty[$$

$$\cdot \mathcal{D}'\text{é}ri = \text{idem}$$

$$\cdot \frac{d}{dx} \left((ax+b)^x \right) = \left[\ln(ax+b) + x \frac{a}{ax+b} \right] (ax+b)^x$$

$$(vi) x \mapsto \frac{\cos(ax^2+bx+1)}{\sin x}$$

$$\cdot \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \equiv 0[\pi] \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]0+k\pi, \pi+k\pi[$$

$$\cdot \mathcal{D}'\text{é}ri \text{ idem}$$

$$\cdot \frac{d}{dx} (\dots) = \frac{-(2ax+b) \sin(ax^2+bx+1) \sin x - \cos(ax^2+bx+1) \cos x}{(\sin x)^2}$$

$$(vii) x \mapsto \text{Arctan}(e^x)$$

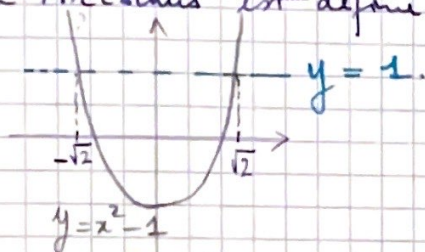
$$\cdot \mathcal{D} = \mathbb{R} \text{ et } \mathcal{D}'\text{é}ri \text{ idem}$$

$$\cdot \frac{d}{dx} (\dots) = \frac{e^x}{1+(e^x)^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

(viii) $x \mapsto \operatorname{Arccos}(x^2 - 1)$

La fonction Arc cosinus est définie sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] -1, 1[$

On a :



D'où $\mathcal{D} = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ et $\mathcal{Dér} =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.

$$\frac{d}{dx}(\dots) = \frac{2x}{\sqrt{1 - (x^2 - 1)^2}}$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{-x^4 + 2x^2}}$$

$$= \frac{2x}{|x| \sqrt{2 - x^2}}$$

(ix) $x \mapsto \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{1+x}\right)$

On a $\mathcal{D} =]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$

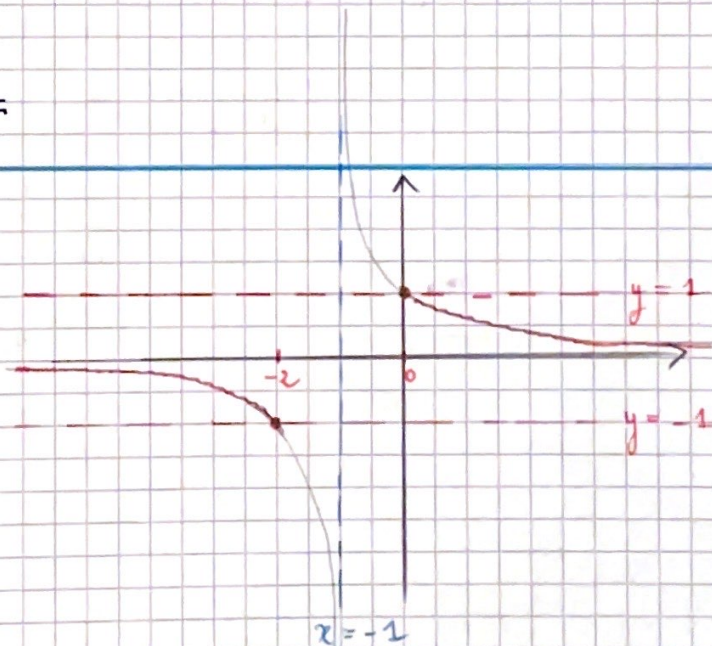
$\mathcal{Dér} =]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$

$$\frac{d}{dx}(\dots) = \frac{-\left(\frac{-1}{(1+x)^2}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{1+x}\right)^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{\frac{\sqrt{(1+x)^2 - 1}}{|1+x|}}$$

$$= \frac{|1+x|}{(1+x)^2 \sqrt{x(x+2)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x(x+2)} |1+x|}$$



en mult. en haut et en bas par $|1+x|$
et en utilisant le fait que $|1+x|^2 = (1+x)^2$

$$(x) \quad x \mapsto \frac{\cos^3 x}{(1 - \cos x)^2}$$

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \equiv 0 [2\pi]\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]0 + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi[$$

Séri = idem

$$= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]2k\pi, 2(k+1)\pi[$$

$$\frac{d}{dx}(\dots) = \frac{d}{dx} \left(\cos^3 x \cdot (1 - \cos x)^{-2} \right)$$

$$= 3(-\sin x)(\cos^2 x)(1 - \cos x)^{-2} + \cos^3 x \cdot (-2)(\sin x)(1 - \cos x)^{-3}$$

$$= -\sin x \cdot \cos^2 x \cdot (1 - \cos x)^{-3} \left[3(1 - \cos x) + 2\cos x \right]$$

$$= \frac{-\sin x \cdot \cos^2 x}{(1 - \cos x)^3} \left[3 - \cos x \right]$$

$$= \frac{\sin x \cdot \cos^2 x \cdot (\cos x - 3)}{(1 - \cos x)^3}$$

(i) Soit $x \in \mathcal{D} =]0, +\infty[$

On a les équivalences suivantes :

$$\ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \frac{\ln x + \ln 3}{2} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \ln(\sqrt{3x})$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+3}{2} = \sqrt{3x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+3)^2}{4} = 3x$$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 - 12x = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

(ii) Ensemble de définition de l'équation

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a les équivalences :

$$x \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln\left(\frac{x+3}{2}\right) \text{ existe} \\ \ln x \text{ existe} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+3}{2} > 0 \\ \text{ou} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in]0, +\infty[$$

Bilan :

$$\mathcal{D} =]0, +\infty[$$

(ii) $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

• Soit $x \in \mathcal{D}$.

On a les équivalences suivantes :

$$3^{2x} - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{1}{2}} - 3^{2x-1} \Leftrightarrow 3^{2x} (1 + 3^{-1}) = 2^x (2^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}})$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{9}{2}\right)^x = \frac{2^{\frac{1}{2}} (2^{\frac{1}{2}} + 1)}{\frac{4}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{9}{2}\right)^x = \frac{9 \times 3}{4 \times 2^{\frac{1}{2}}} = \frac{9\sqrt{9}}{2\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{9}{2}\right)^x = \left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

WHY

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$



On vérifie que $\frac{3}{2} \in \mathcal{D}$

Justification du WHY

Pour $a > 0$, $x, x' \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence $a^x = a^{x'} \Leftrightarrow x = x'$
et $a \neq 1$

En effet, la fonction $x \mapsto a^x = \exp[x \ln a]$ est injective car strictement monotone

BILAN

$$\mathcal{Y} = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

(iii) • Recherche du domaine de définition

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \sqrt{x}^x = \exp[x \ln \sqrt{x}] \text{ existe} &\Leftrightarrow \sqrt{x} > 0 \\ &\Leftrightarrow x \in]0, +\infty[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad x^{\sqrt{x}} = \exp[\sqrt{x} \ln x] \text{ existe} &\Leftrightarrow x \geq 0 \text{ et } x > 0 \\ &\Leftrightarrow x \in]0, +\infty[\end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \mathcal{D} =]0, +\infty[\cap]0, +\infty[$$

$$\mathcal{D} =]0, +\infty[$$

• Résolution

Soit $x \in \mathcal{D}$.

On a les équivalences:

$$\sqrt{x}^x = x^{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \exp[x \ln \sqrt{x}] = \exp[\sqrt{x} \ln x]$$

$$\Leftrightarrow x \ln \sqrt{x} = \sqrt{x} \ln x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} x \ln x = \sqrt{x} \ln x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} \ln x \left[\frac{1}{2} \sqrt{x} - 1 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \text{ ou } \ln x = 0 \text{ ou } \frac{1}{2} \sqrt{x} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = 4$$



Vérifier que les potentielles solutions appartiennent à $\mathcal{D}$.

On a $0 \notin \mathcal{D}$; $1 \in \mathcal{D}$; $4 \in \mathcal{D}$.

BILAN

$$\boxed{\mathcal{S} = \{1; 4\}}$$

(iv) Recherche de l'ens. de définition $\mathcal{D}$ de l'équation

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences

$$x \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln|2x+1| \text{ existe} \\ \ln|x+3| \text{ existe} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \neq 0 \\ \text{et} \\ x+3 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{2} \text{ et } x \neq -3.$$

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -3; -\frac{1}{2} \right\}$$

• Résolution.

Soit $x \in \mathcal{D}$. On a les équivalences

$$\ln|2x+1| + \ln|x+3| < \ln 3 \Leftrightarrow \ln|(2x+1)(x+3)| < \ln 3$$

$$\Leftrightarrow |(2x+1)(x+3)| < 3.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x+1)(x+3) < 3 \\ \text{et} \\ (2x+1)(x+3) > -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 7x < 0 \\ \text{et} \\ 2x^2 + 7x + 6 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\frac{7}{2}, 0[\\ \text{et} \\ x \in]-\infty, -2[\cup]-\frac{3}{2}, +\infty[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\frac{7}{2}, -2[\cup]-\frac{3}{2}, 0[$$

⚠ Ne pas oublier $x \in \mathcal{D}$

BILAN : $\boxed{\mathcal{Y} =]-\frac{7}{2}, -3[\cup]-3, -2[\cup]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{2}, 0[}$

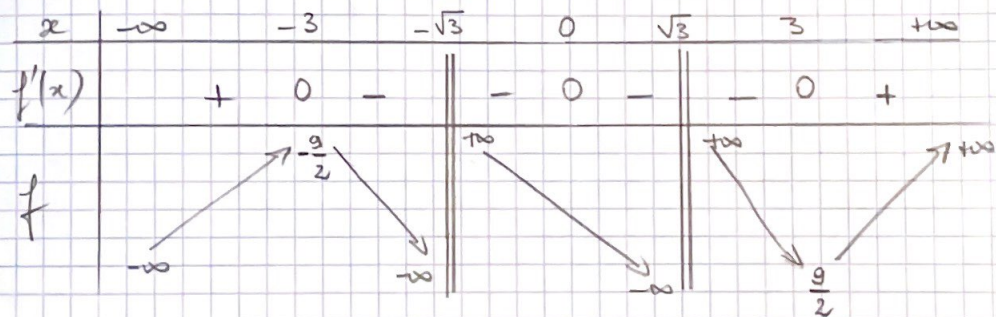
$$(i) f: x \mapsto \frac{x^3}{x^2 - 3}$$

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\} =]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, +\infty[$$

f est impaire

f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{D}, f'(x) &= \frac{3x^2(x^2 - 3) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 3)^2} \\ &= \frac{x^2(x^2 - 9)}{(x^2 - 3)^2} \end{aligned}$$

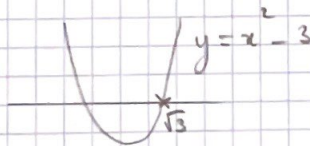


Limites

Par imparité de f , il suffit de justifier les limites en $\sqrt{3}^-$; $\sqrt{3}^+$; $+\infty$.

En $\sqrt{3}$

On a



$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^-} (x^2 - 3) = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^+} (x^2 - 3) = 0^+$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^-} \frac{1}{x^2 - 3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^+} \frac{1}{x^2 - 3} = +\infty$$

$$\text{Puis } \lim_{\sqrt{3}^-} f = -\infty \quad \lim_{\sqrt{3}^+} f = +\infty$$

En $+\infty$ On a $f(x) = \frac{x^3}{x^2-3} = \frac{x^3}{x^2(1-\frac{3}{x^2})} = \frac{x}{1-\frac{3}{x^2}} \rightarrow +\infty$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{3}{x^2} = 1$

Par quotient, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Bonus Montrons que Γ_f admet une asymptote oblique en $+\infty$.

On a $\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{1 - \frac{3}{x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$

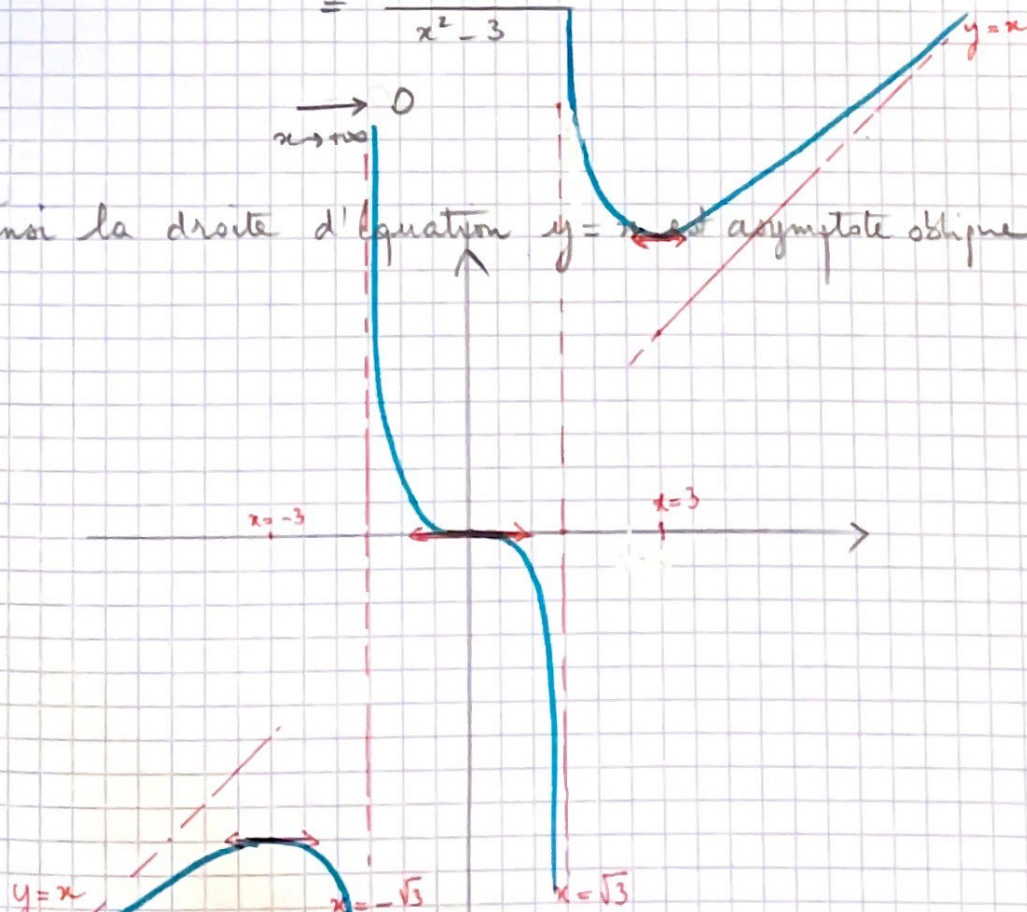
Puis $f(x) - x = \frac{x^3}{x^2-3} - x$

$= \frac{x^3 - x(x^2-3)}{x^2-3}$

$= \frac{3x}{x^2-3}$

$\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

Ainsi la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique en $+\infty$



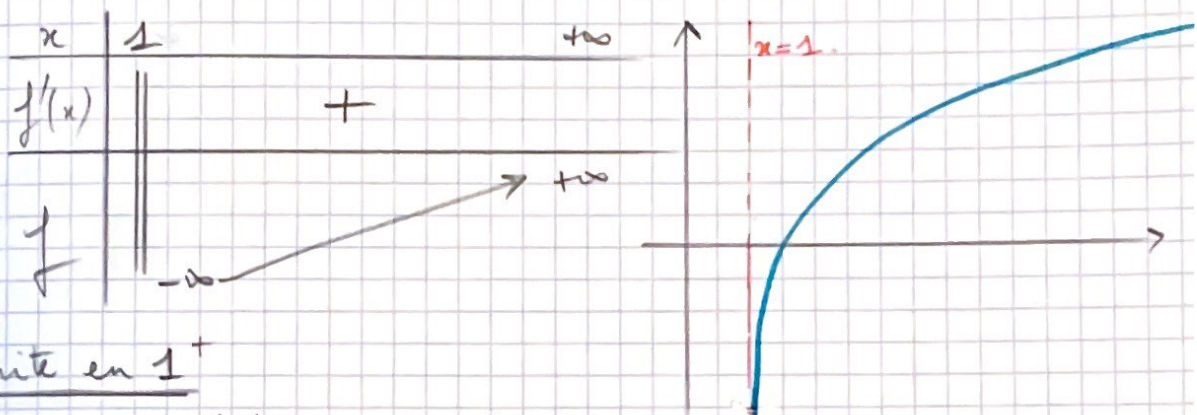
(ii) $f: x \mapsto \ln(x-1) + \ln(x+1)$

$\mathcal{D}_f =]1, +\infty[$

f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et on a :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f'(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{2x}{x^2-1}$$



Limite en 1^+

• On a $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} x-1 = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} \ln t = -\infty \end{cases}$

d'où $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x-1) = -\infty$

• On a $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x+1) = \ln 2$

Par somme $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$

Limite en $+\infty$

• On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-1) = +\infty$

• On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) = +\infty$

Par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

iii) $f: x \mapsto \ln(x^2 - 1)$

$\mathcal{D}_f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

f est paire.

Sur $]1, +\infty[$, f est égale à la fonction précédente (pointu)

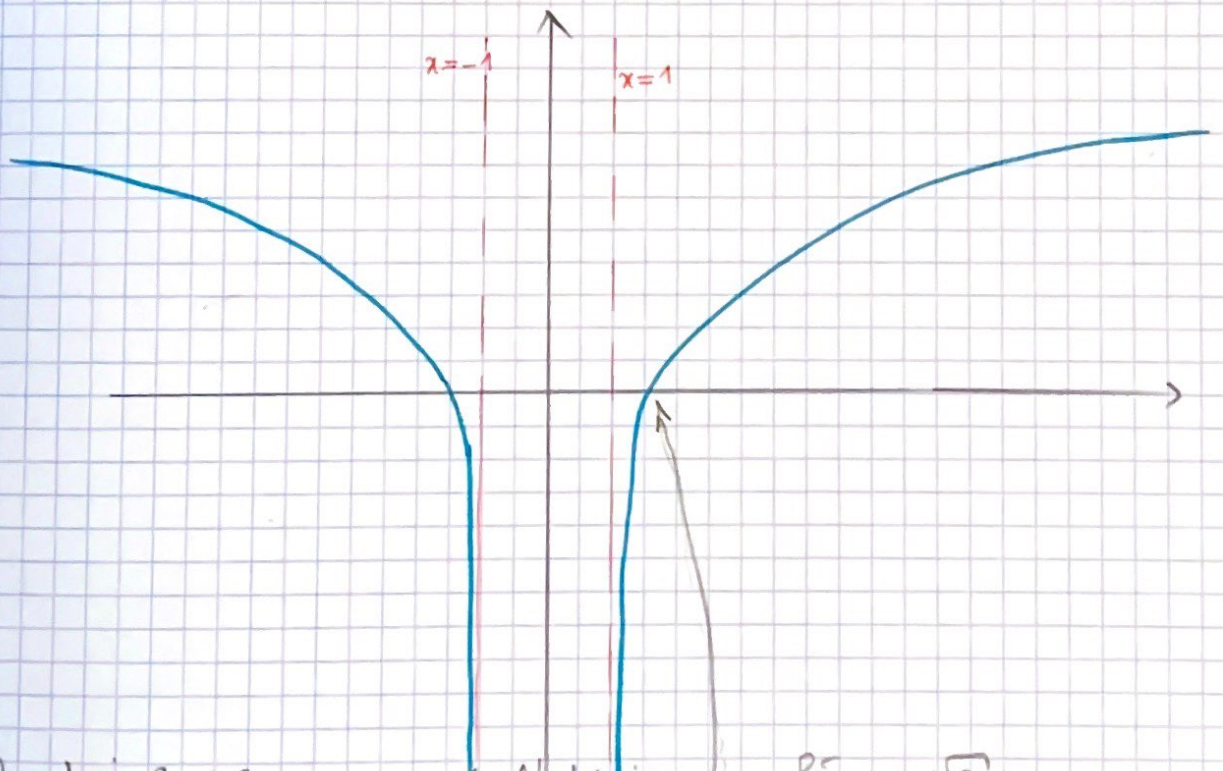
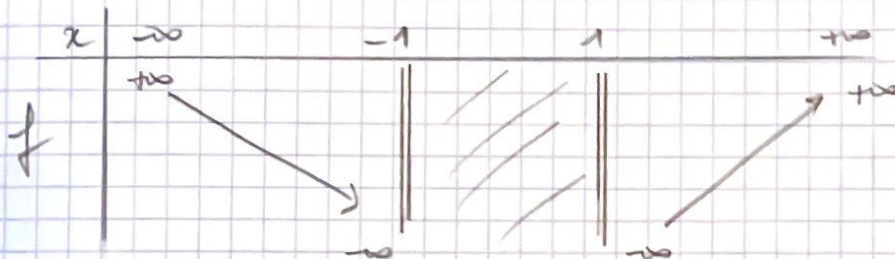
En effet :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad x^2 - 1 = \underbrace{(x-1)}_{\geq 0} \underbrace{(x+1)}_{\geq 0}$$

D'où

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \ln(x^2 - 1) = \ln(x-1) + \ln(x+1)$$

D'après l'étude précédente, on a donc :



Question BONUS : que vaut l'abscisse ? Réponse $\sqrt{2}$

On résout $f(x) = 0$ céd $\ln(x^2 - 1) = \ln 1$ céd $x^2 - 1 = 1$
céd $x^2 = 2$.

iv) $f: x \mapsto \sqrt{\frac{\ln|x|}{x}}$

• Recherche de $\mathcal{D}_f$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a l'équivalence:

$$x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow \frac{\ln|x|}{x} \text{ existe et } \frac{\ln|x|}{x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } x \in [-1, 0[\cup [1, +\infty[$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$\ln x $		$+$	0	$-$	$-$
x	$-$	$-$		$+$	$+$
$\frac{\ln x }{x}$	$-$	0	$+$	$-$	0

Bilan $\mathcal{D}_f = [-1, 0[\cup [1, +\infty[$

• f est dérivable sur $\mathcal{D}' =]-1, 0[\cup]1, +\infty[$

En effet:

• $x \mapsto \frac{\ln|x|}{x}$ est dérivable sur $\mathcal{D}'$ et à valeurs dans $]0, +\infty[$

• $t \mapsto \sqrt{t}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$

Par composition, f est dérivable sur $\mathcal{D}'$.

On a

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{D}', \quad f'(x) &= \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln|x|}{x^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{\ln|x|}{x}}} \\ &= \frac{1 - \ln|x|}{2x^2} \times \sqrt{\frac{x}{\ln|x|}} \end{aligned}$$

x	-1	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	$\parallel$	$+$	$\parallel$	$+$	0
f	0	$\nearrow$	$\parallel$	$\nearrow \sqrt{\frac{1}{e}}$	$\searrow$

limite en 0^-

On a $\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln|x| = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Par produit $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln|x|}{x} = +\infty$

D'où $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$

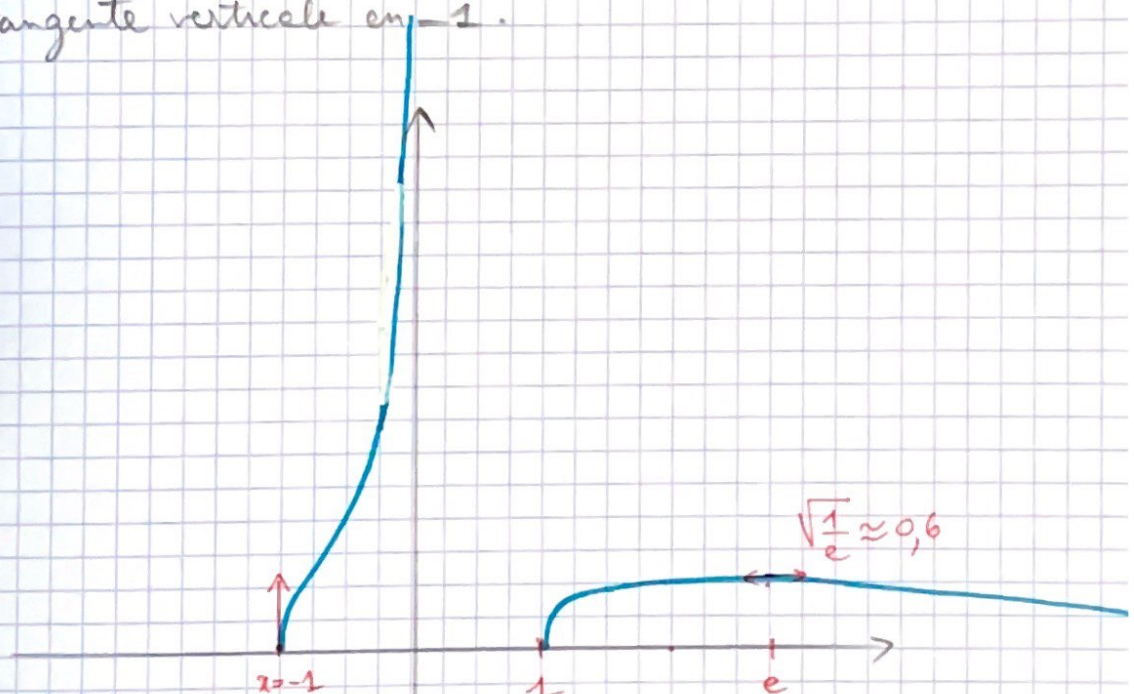
limite en $+\infty$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln|x|}{x} = 0$ par crois-comparé

d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Bonus On a $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = +\infty$

On verra + tard que cela témoigne d'une tangente verticale en -1 .



(v) $x \mapsto \frac{\tan(2x)}{\tan x}$

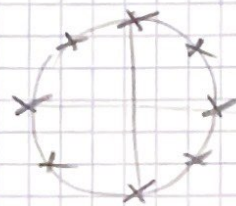
• Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a :

$$x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow \begin{cases} \tan(2x) \text{ existe} \\ \tan x \text{ existe et non nul.} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \neq \frac{\pi}{2} [\pi] \\ x \neq \frac{\pi}{2} [\pi] \text{ et } x \neq 0 [\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} [\frac{\pi}{2}] \\ x \neq \frac{\pi}{2} [\pi] \text{ et } x \neq 0 [\pi] \end{cases}$$



• f est paire et π -périodique

On peut restreindre l'étude sur $[0, \frac{\pi}{2}] \cap \mathcal{D}_f$.

$$\text{où } \mathcal{D}_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]0 + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}[$$

$$= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]2k\frac{\pi}{4}, (2k+1)\frac{\pi}{4}[\cup](2k+1)\frac{\pi}{4}, (2k+2)\frac{\pi}{4}[$$

On peut donc restreindre l'étude de f à

$$]0, \frac{\pi}{4}[\cup]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$$

• f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$.

Utilisons l'expression suivante de f :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) = \frac{2}{1 - \tan^2 x}$$

D'où

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f'(x) = \frac{4 \tan x (1 + \tan^2 x)}{(1 - \tan^2 x)^2}$$

obtenue avec

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

Donc le tableau sur $]0, \frac{\pi}{4}[\cup]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	+
f	2	$+\infty$	0

En 0

On a $f(x) = 2 \frac{\tan(2x)}{2x} \times \frac{1}{\frac{\tan x}{x}}$

On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x)}{2x} = 1$

Par quotient, puis produit, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$

En $\frac{\pi}{4}$

• On a $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} 2x = \frac{\pi}{2}^-$ d'où $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \tan(2x) = +\infty$

et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \tan x = 1$

Par quotient $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) = +\infty$

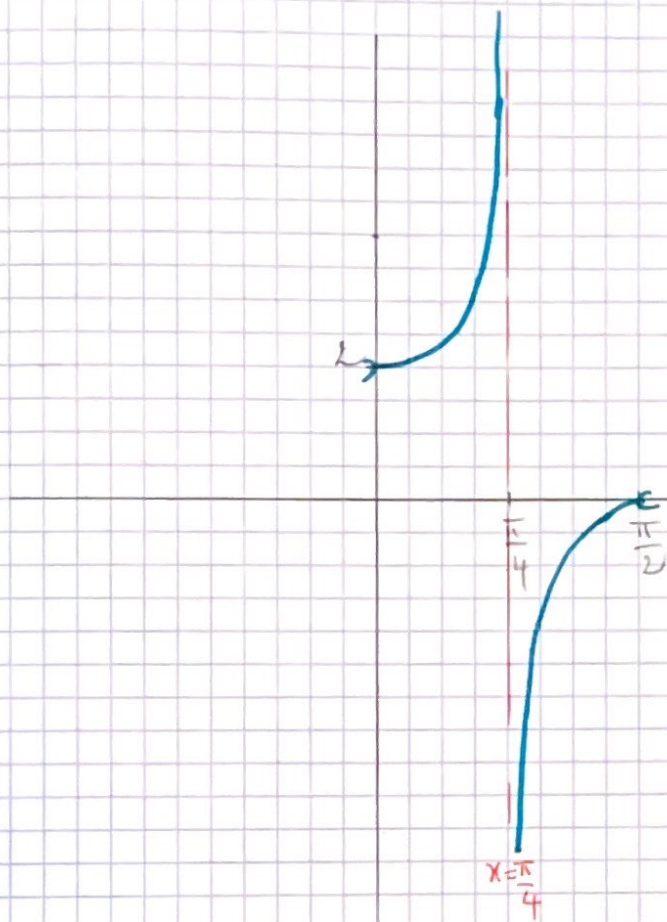
• Etude analogue en $\frac{\pi}{4}^+$

En $\frac{\pi}{2}$

On a $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan(2x) = 0$ (WHY)

On a $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan x} = 0$

} par produit $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = 0$



Le graphe de f sur $]0, \frac{\pi}{4}[\cup]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ que l'on prolonge par symétrie axiale d'axe (Oy) à $[-\frac{\pi}{2}, 0] \cap \mathcal{D}_f$
 Puis par translation, on prolonge à $\mathcal{D}_f$.

(VI) $f: x \mapsto x \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$

f est paire donc on peut se restreindre à $]0, +\infty[$ pour l'étude
 f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) &= 1 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) + x \times \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} \\ &= \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

Pour étudier le signe de f' , on étudie les variations de f'
 f' est dérivable et on a:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^*, f''(x) &= \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} - \frac{1(x^2 + 1) - x(2x)}{(x^2 + 1)^2} \\ &= -\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{-x(x^2 + 1) + x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{-2}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

x	0	$+\infty$
$f''(x)$		-
f'		$\searrow 0$
$f'(x)$		+
f		$\nearrow$

Limite en 0.

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

$$\text{On a } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{Arctan } t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow 0^+} \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Par produit, } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Limite en $+\infty$

$$\text{On a } f(x) = \frac{\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

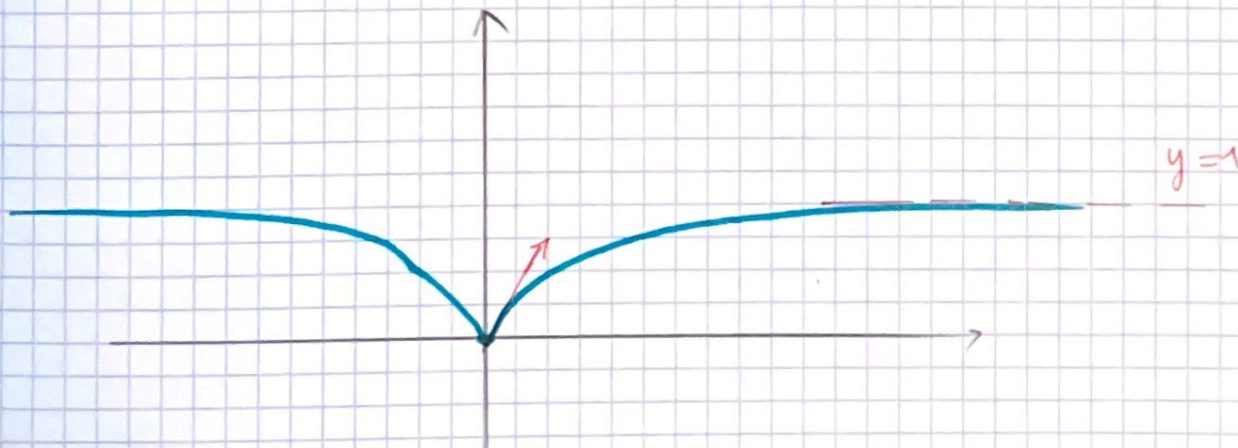
$$\text{On a } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{Arctan } t}{t} = 1 \end{cases}$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

Bonus pour tracer le graphe au voisinage de 0.

$$\text{On peut montrer (faites-le) que } \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \frac{\pi}{2}$$

On apprendra + tard que cela implique la présence d'une tangente en 0 de coeff dir $\frac{\pi}{2}$.



(vii) $f: x \mapsto \sin(3x) + 3\sin x$

- $\mathcal{D} = \mathbb{R}$
- f est impaire
- f est (2π) -périodique
- On peut restreindre l'étude à $[0, \pi]$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= 3\cos(3x) + 3\cos x \\ &= 3[\cos(3x) + \cos x] \\ &= 6\cos(2x)\cos x \quad \text{avec le rappel} \end{aligned}$$

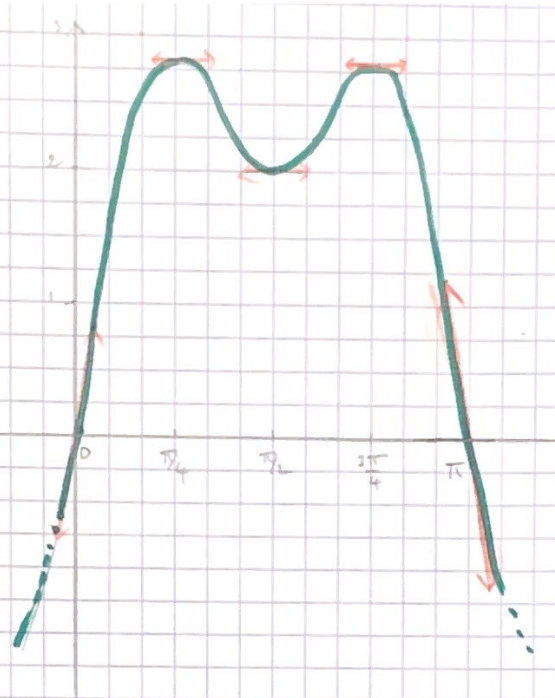
Rappel $\cos p + \cos q = \operatorname{Re}(e^{ip} + e^{iq})$

$$\begin{aligned} &= \operatorname{Re}\left(e^{i\frac{p+q}{2}}(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{-i\frac{p-q}{2}})\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(e^{i\frac{p+q}{2}} \times 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\right) \\ &= 2\cos\frac{p+q}{2} \cos\frac{p-q}{2} \end{aligned}$$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\cos(2x)$	1	0	-1	0	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$f'(x)$	2	0	0	0	-2
$f(x)$	0	$\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	0

Bonus On peut montrer que $x = \frac{\pi}{2}$ est axe de symétrie.

la courbe sur $[0, \pi]$
 à symétriser par rapport
 à l'origine
 puis à translater



Bonus : $f'(0) = 6$ donc on peut tracer la tangente au point
 d'abscisse 0.

et $f'(\pi) = -6$.

— Commençons par prouver que $\tan\left(5 \operatorname{Arctan} \frac{1}{7} + 2 \operatorname{Arctan} \frac{3}{79}\right) = 1$.

La formule de Moivre permet d'obtenir :

$$\tan 5t = \frac{\sin 5t}{\cos 5t} = \frac{5 \tan t - 10 \tan^3 t + \tan^5 t}{1 - 10 \tan^2 t + 5 \tan^4 t}.$$

En remplaçant t par $\operatorname{Arctan}(1/7)$, on obtient $\tan(5 \operatorname{Arctan} \frac{1}{7}) = \frac{2879}{3353}$.

On trouve de même $\tan(2 \operatorname{Arctan} \frac{3}{79}) = \frac{237}{3116}$. En utilisant la formule d'addition donnant $\tan(a+b)$, on en déduit que :

$$\tan\left(5 \operatorname{Arctan} \frac{1}{7} + 2 \operatorname{Arctan} \frac{3}{79}\right) = \frac{\frac{2879}{3353} + \frac{237}{3116}}{1 - \frac{2879}{3353} \frac{237}{3116}} = 1.$$

— Vérifions maintenant $0 \leq 5 \operatorname{Arctan} \frac{1}{7} + 2 \operatorname{Arctan} \frac{3}{79} < \frac{3\pi}{4}$.

C'est une conséquence de :

$$0 \leq \operatorname{Arctan} \frac{3}{79} \leq \operatorname{Arctan} \frac{1}{7} \leq \operatorname{Arctan} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

et de :

$$0 \leq 5 \operatorname{Arctan} \frac{1}{7} + 2 \operatorname{Arctan} \frac{3}{79} \leq \frac{7\pi}{6} < \frac{3\pi}{4}.$$

On en déduit alors l'égalité demandée.