Nombres réels

I Partie bornée, extremum 2

II Borne supérieure, borne inférieure 3
- Définition et « propriété de la borne supérieure »
- Borne supérieure versus maximum
- Borne inférieure
- Généralisation

III Intervalles de $\mathbb{R}$ 8

IV Partie entière 9
- Définition
- Propriétés

V Compléments 12
- Densité
- Principe de récurrence

I. Partie bornée, extremum

1 **Définition.** Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

— Le réel M est un *majorant de A* lorsque $\forall x \in A,\ x \leqslant M$.
Dans ce cas, on dit que la partie A est majorée par M.

— Le réel m est un *minorant de A* lorsque $\forall x \in A,\ x \geqslant m$.
Dans ce cas, on dit que la partie A est minorée par m.

- Le sous-ensemble vide de $\mathbb{R}$ est majoré et minoré par tout réel.
Rappelons en effet que toute assertion de la forme « $\forall x \in \emptyset,\ \mathscr{P}(x)$ » est vraie.
- Si M est un majorant de A, alors tout réel M' supérieur à M est également un majorant de A.
- Si m est un minorant de A, alors tout réel m' inférieur à m est également un minorant de A.

2 **Définition.** Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Alors :

— A est *majorée* lorsque A admet un majorant ;

— A est *minorée* lorsque A admet un minorant ;

— A est *bornée* lorsque A est majorée et minorée.

- L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est ni majoré, ni minoré.
- Le sous-ensemble $\left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ de $\mathbb{R}$ est une partie bornée.

3 **Proposition.** Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On a l'équivalence :

(i) A est bornée.

(ii) il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in A,\ |x| \leqslant K$.

4 **Définition/Proposition.** Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

— On dit que A possède un maximum lorsque A possède un majorant appartenant à A.
Lorsque A possède un maximum celui-ci est unique. On le note $\max A$.

— On dit que A possède un minimum lorsque A possède un minorant appartenant à A.
Lorsque A possède un minimum celui-ci est unique. On le note $\min A$.

- Une partie majorée (resp. minorée) n'admet pas nécessairement de maximum (resp. minimum).
- La partie $\mathbb{R}^+$ est minorée mais pas majorée. Elle a un minimum.
- La partie $\mathbb{R}^{+*}$ est minorée mais pas majorée. Elle n'a pas de minimum.
- La partie $]0,1]$ est bornée. Elle a un maximum 1, mais pas de minimum.

II. Borne supérieure, borne inférieure

Définition et « propriété de la borne supérieure »

5 **Définition.** Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Soit $s \in \mathbb{R}$.
On dit que s est la borne supérieure de A (ou encore le supremum de A) lorsque s est le plus petit des majorants de A.
On note alors $s = \sup A$.

- On peut retenir la phrase suivante :

  Lorsqu'elle existe, la borne supérieure *de A est le plus petit des majorants de A.*

6 **Exemple.**
Soit $A = \mathbb{R}^-$. L'ensemble des majorants de A est $[0, +\infty[$. On a donc $\sup A = 0$.
Soit $A = \mathbb{R}^{-*}$. L'ensemble des majorants de A est $[0, +\infty[$. On a donc $\sup A = 0$.
Prouvons que $\text{Majorants}(A) = [0, +\infty[$.

— Montrons $\boxed{\supset}$.
Soit $x \in [0, +\infty[$.
Alors $x \geqslant 0$.
De plus, $\forall a \in A,\ a \leqslant 0$.
Donc, par transitivité $\forall a \in A,\ a \leqslant x$.
Donc $x \in \text{Majorants}(A)$.

— Montrons $\boxed{\subset}$.
Soit $M \in \text{Majorants}(A)$.
Montrons que $M \in [0, +\infty[$.
Raisonnons par l'absurde et supposons que $M \notin [0, +\infty[$, c'est-à-dire $M < 0$.
On a alors $\frac{M}{2} \in A$.
Comme M est un majorant de A, on a alors $\frac{M}{2} \leqslant M$.
D'où $M \geqslant 0$,
Or $M > 0$, d'où la contradiction.

On admet le théorème suivant, qui est la propriété fondatrice de l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels.

7 **Théorème (propriété de la borne supérieure).**
Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

- Quand on vous demande de montrer qu'un ensemble possède une borne supérieure, le théorème précédent doit être votre première idée !
- Il est absolument capital de s'assurer qu'une partie est non vide et majorée avant de parler de sa borne supérieure.
- L'équivalent de ce théorème pour l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est faux.
  Par exemple, l'ensemble $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ est non vide (il contient 0) et majoré (par 3, par exemple), mais il ne possède pas de borne supérieure **dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ lui-même**.
  En revanche, une fois que l'on connaît l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels, on peut constater que cet ensemble est $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\cap \mathbb{Q}$ et on peut montrer que sa borne supérieure est $\sqrt{2}$.
  D'une certaine façon, c'est cette lacune de $\mathbb{Q}$ qui conduit à l'introduction des nombres réels : on a rajouté à $\mathbb{Q}$ toutes les bornes supérieures qui manquaient. On dit que $\mathbb{R}$ est la complétion de $\mathbb{Q}$ et cette idée est à la base de toutes les constructions rigoureuses de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$. Ce faisant, on a ajouté des nombres plus difficiles à comprendre que les rationnels, mais on a obtenu un ensemble possédant de meilleures propriétés structurelles que $\mathbb{Q}$.

8 **Proposition.** Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. On a :

$$\text{Majorants}(A) \ = \ [\sup A, +\infty[$$

L'inclusion $\subset$ est vraiment intéressante. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a : $\quad x \in \text{Majorants}(A) \implies x \in [\sup A, +\infty[$

9 **Proposition (passage à la borne sup dans les inégalités larges).**
Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a l'implication :

$$\big(\forall\, a \in A,\ a \leqslant x\big) \implies \sup A \leqslant x$$

- Attention aux inégalités strictes : $\cancel{\big(\forall\, a \in A,\ a < x\big) \implies \sup A < x}$

  Contre-exemple, $A = \ldots$
- Mais on a :

$$\big(\forall\, a \in A,\ a < x\big) \implies \sup A \leqslant x$$

- La contraposée dit que, pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, on a :

$$x < \sup A \implies \exists\, a \in A,\ x \leqslant a$$

  que l'on peut comprendre : « si $x < \sup A$, alors x n'est pas un majorant de A (sinon il serait $\geqslant$ au plus petit des majorants qui est $\sup A$) » ou encore $x < \sup A$ signifie $x \notin [\sup A, +\infty[= \text{Majorants}(A)$.

10 **Proposition (caractérisation epsilonesque de la borne sup).**
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Soit $s \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence

$$s = \sup A \iff \begin{cases} s \text{ est un majorant de } A : & \forall\, a \in A,\ a \leqslant s \\ s \text{ est le plus petit des majorants de } A : & \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, a \in A,\ s - \varepsilon < a \end{cases}$$

- Le deuxième point traduit le fait que « $s - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A et ce, quel que soit $\varepsilon > 0$ ».
  En effet, $s - \varepsilon$ est un majorant de A s'écrit $\forall\, a \in A,\ a \leqslant s - \varepsilon$ et sa négation est bien ce qui est annoncé.
- Dans le deuxième point, on peut remplacer l'inégalité *stricte* par une inégalité *large* :

$$s = \sup A \iff \begin{cases} \forall\, a \in A,\ a \leqslant s \\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, a \in A,\ s - \varepsilon \leqslant a \end{cases}$$

  Il nous faut prouver que (le faire en exercice, en utilisant le rappel qui suit) :

$$\big(\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, a \in A,\ s - \varepsilon < a\big) \overset{\text{WHY}}{\iff} \big(\forall\, \varepsilon' > 0,\ \exists\, a \in A,\ s - \varepsilon' \leqslant a\big)$$

  Rappel. Pour $d \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence :

$$\big(\forall\, \varepsilon > 0,\ d < \varepsilon\big) \iff \big(\forall\, \varepsilon' > 0,\ d \leqslant \varepsilon'\big)$$

  — L'implication $\boxed{\implies}$ est automatique. Fixons $\varepsilon' > 0$.
  On applique la prémisse à ε égal à ε'. On a alors $d < \varepsilon = \varepsilon'$. Donc $d \leqslant \varepsilon'$.

  — L'implication $\boxed{\impliedby}$ est plus subtile. Fixons $\varepsilon > 0$.
  On applique la prémisse à ε' égal à $\frac{\varepsilon}{2}$. On a alors $d \leqslant \varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2}$. Donc $d < \varepsilon$.

- On aurait pu encore écrire :

$$\forall x \in \left]-\infty, s\right[, \ \exists a \in A, \ x \leqslant a \qquad \text{ou même (cf. le rappel)} \qquad \forall x \in \left]-\infty, s\right[, \ \exists a \in A, \ x < a$$

- On déduit du point précédent, l'implication suivante (où l'a-t-on déjà vu passer ?).
Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$x < s \implies \exists a \in A, \ x \leqslant a$$

- Quel que soit ε strictement positif, on peut trouver un élément $a \in A$ compris entre $\sup A - \varepsilon$ et $\sup A$.
Attention, il peut aussi exister des réels n'appartenant pas à A et compris entre $\sup A - \varepsilon$ et $\sup A$.

11 **Question.**

(i) Soit $A = [a, b]$. Alors $\max A = b$.
(ii) Soit $A = \left]-\infty, b\right]$. Alors $\max A = b$.
(iii) Soit $A = \left]-\infty, b\right[$. Alors $\sup A = b$.
(iv) Soit $A = \left[a, b\right[$. Alors $\sup A = b$.

Borne supérieure versus maximum

Il y a une différence majeure entre les deux notions (voisines) de maximum et de borne supérieure.
Il n'y a pas de doute que le maximum est une notion plus facile à comprendre, mais qui a le grand défaut de n'exister que rarement.
L'idée à retenir est la suivante :

— le maximum, **qui n'existe que rarement**, est un majorant qui appartient à la partie considérée,
— la borne supérieure, **qui existe souvent**, est un majorant qui appartient « presque » à la partie considérée.

12 **Proposition (max VERSUS sup : caractérisation).**
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée.

— Soit $M \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence

$$M = \max A \iff \begin{cases} M \text{ majore } A : & \forall a \in A, \ a \leqslant M \\ M \text{ appartient à } A : & M \in A \end{cases}$$

— Soit $s \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence

$$s = \sup A \iff \begin{cases} s \text{ majore } A : & \forall a \in A, \ a \leqslant s \\ s \text{ appartient presque à } A : & \forall \varepsilon > 0, \ \exists a \in A, \ |s - a| \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

- La condition $\forall \varepsilon > 0, \ \exists a \in A, \ |s - a| \leqslant \varepsilon$ signifie que « s est arbitrairement proche de A », c'est-à-dire que « s est ε-proche d'un élément de A et ce, quel que soit $\varepsilon > 0$ ».
- Comme la borne supérieure est un majorant de A, on peut écrire la condition sous la forme

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists a \in A, \ s - \varepsilon \leqslant a \qquad \text{ou même (cf. le rappel)} \qquad \forall \varepsilon > 0, \ \exists a \in A, \ s - \varepsilon < a$$

et on retrouve notre condition epsilonesque de la page précédente.

13 **Proposition (max VERSUS sup).**
Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.

— Si A admet un maximum, alors $\sup A = \max A$.
— Si $\sup A \in A$, alors $\sup A$ est le maximum de A.
— Si $\sup A \notin A$, alors A n'a pas de maximum.

Borne inférieure

14 **Définition.** Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Soit $i \in \mathbb{R}$.
On dit que i est la borne inférieure de A (ou encore le infimum de A) lorsque i est le plus grand des minorants de A.
On note alors $i = \inf A$.

15 **Théorème (propriété de la borne inférieure).**
Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Montrons comment on peut déduire ce théorème de son cousin germain.
On se donne A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ et l'on note E l'ensemble des minorants de A.
On souhaite montrer que E admet un plus grand élément : autrement dit que $\max E$ existe.

- l'ensemble E est une partie non vide de $\mathbb{R}$ (WHY)
- l'ensemble E est majorée (WHY)
- le réel $\sup E$ est bien défini (WHY)
- $\sup E$ est un minorant de A (WHY)
- $\max E$ existe (WHY)

16 **Proposition.** Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. On a :

$$\text{Minorants}(A) = \left]-\infty, \inf A\right]$$

17 **Proposition (passage à la borne inf dans les inégalités larges).**
Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a l'implication :

$$\Big(\forall\, a \in A,\ x \leqslant a\Big) \implies x \leqslant \inf A$$

18 **Proposition (caractérisation epsilonesque de la borne inf).**
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée. Soit $i \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence

$$i = \inf A \iff \begin{cases} i \text{ est un minorant de } A : & \forall\, a \in A,\ i \leqslant a \\ i \text{ est le plus grand des minorants de } A : & \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, a \in A,\ a < i + \varepsilon \end{cases}$$

19 **Proposition (min VERSUS inf : caractérisation).**
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée.

- Soit $m \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence

$$m = \min A \iff \begin{cases} m \text{ minore } A : & \forall\, a \in A,\ m \leqslant a \\ m \text{ appartient à } A : & m \in A \end{cases}$$

- Soit $i \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence

$$i = \inf A \iff \begin{cases} i \text{ minore } A : & \forall\, a \in A,\ i \leqslant a \\ i \text{ appartient presque à } A : & \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, a \in A,\ |i - a| \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

20 **Proposition (min VERSUS inf).**
Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$.

- Si A admet un minimum, alors $\inf A = \min A$.
- Si $\inf A \in A$, alors $\inf A$ est le minimum de A.
- Si $\inf A \notin A$, alors A n'a pas de minimum.

Généralisation

Lorsque A est une partie non majorée (resp. non minorée) de $\mathbb{R}$, on convient que

$$\sup A = +\infty \qquad (\text{resp. } \inf A = -\infty)$$

Avec cette généralisation, on observe alors que toute partie non vide de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure (resp. inférieure) dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (resp. $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$) et que celle-ci est réelle si et seulement si la partie est majorée (resp. minorée).

Cette généralisation pourra parfois être utile dans certaines preuves, mais je vous conseille de ne pas trop l'utiliser en pale.

III. Intervalles de $\mathbb{R}$

Un intervalle I de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x, y \in I, \quad x < y \implies [x, y] \subset I$$

On a déjà affirmé que, mis à part l'ensemble vide et les singletons (que l'on qualifie d'intervalle triviaux), tout intervalle est de l'un des 9 types suivants :

— un *segment* $[a, b]$, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$;

— un *intervalle ouvert* $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, pour $a < b$;

— un *intervalle semi-ouvert* $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$, pour $a < b$;

— un intervalle semi-ouvert $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$, pour $a < b$;

— une *demi-droite fermée* $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\}$, pour $a \in \mathbb{R}$;

— une demi-droite fermée $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\}$, pour $a \in \mathbb{R}$;

— une *demi-droite ouverte* $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$, pour $a \in \mathbb{R}$;

— une demi-droite ouverte $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$, pour $a \in \mathbb{R}$;

— la *droite* $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

On reconnaît que ces intervalles ont des propriétés différentes : par exemple, $[a, b[$ est borné, et vérifie $\min([a, b[) = a$ et $\sup([a, b[) = b$ (mais ce n'est pas un maximum).

21 **Théorème (classification des intervalles).**
Tout intervalle non trivial est de l'un des neuf types précédents.

Preuve. Soit I un intervalle non trivial.
En particulier I est non vide, et on peut donc considérer les bornes inférieure et supérieure généralisées de I.
Posons $a = \inf I$ et $b = \sup I$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Montrons les égalités du tableau ci-dessous :

	$b \in I$	$b \in \mathbb{R} \setminus I$	$b = +\infty$
$a \in I$	$I = [a, b]$	$I = [a, b[$	$I = [a, +\infty[$
$a \in \mathbb{R} \setminus I$	$I =]a, b]$	$I =]a, b[$	$I =]a, +\infty[$
$a = -\infty$	$I =]-\infty, b]$	$I =]-\infty, b[$	$I =]-\infty, +\infty[$

— Par définition de a et b, on obtient que l'ensemble I est inclus dans l'intervalle indiqué.

— Pour conclure, il suffit de montrer l'inclusion $]a, b[\subset I$.
En effet, en fonction de l'appartenance de a et b à I, on aura alors

$$]a, b[\subset I, \quad]a, b] \subset I, \quad [a, b[\subset I, \quad [a, b] \subset I$$

et comme on a déjà montré l'autre inclusion, on aura des égalités.
Soit $z \in]a, b[$. Montrons que $z \in I$.
Distinguons deux cas :

  — si $b = +\infty$, alors I n'est pas majoré , donc z n'est pas un majorant de I.

  — si $b \in \mathbb{R}$, alors l'inégalité $z < b$ se réécrit $z \notin [\sup I, +\infty[$, donc z n'est pas un majorant de I.

Dans les deux cas, on peut trouver $y \in I$ tel que $z < y$.
De même, on montre que z n'est pas un minorant de I, donc on peut trouver $x \in I$ tel que $x < z$.
On a ainsi $z \in [x, y]$.
Comme $x \in I$ et $y \in I$ et que I est un intervalle, on a $[x, y] \subset I$.
On en déduit que $z \in I$.

IV. Partie entière

Définition

22 **Définition.** Soit $x \in \mathbb{R}$.
La partie entière de x est le plus grand entier inférieur ou égal à x.
On la note $\lfloor x \rfloor$.

- La partie entière de x est l'unique entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que $m \leqslant x < m+1$.
  Autrement dit, pour $m \in \mathbb{Z}$, on a :

$$m \leqslant x < m+1 \implies \lfloor x \rfloor = m$$

- La définition de la partie entière nécessite une justification (car on ne sait pas, *a priori*, que « le plus grand entier inférieur ou égal à x » existe).
  Pour faire proprement cette justification, on utilise la proposition suivante.

23 **Proposition.**

- — Toute partie de $\mathbb{Z}$ non vide et majorée (par un réel) admet un maximum.
- — Toute partie de $\mathbb{Z}$ non vide et minorée (par un réel) admet un minimum.
- — En particulier, toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum.

Preuve de l'existence de la partie entière de x.
Tout d'abord, remarquons que $\mathbb{Z}$ n'est pas une partie minorée (par un réel) ; sinon, $\mathbb{Z}$ aurait un minimum noté n, et alors, en considérant l'élément $n-1 \in \mathbb{Z}$, on aboutirait à une contradiction (WHY).
Notons $A_x = \left\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leqslant x\right\}$.

- — La partie A_x est une partie de $\mathbb{Z}$ (WHY).
- — La partie A_x est non vide (WHY).
- — La partie A_x est majorée (WHY).

Donc (WHY), la partie A_x admet un maximum.
Donc (WHY), il existe un plus grand entier inférieur ou égal à x.

Propriétés

24 **Proposition.**
La fonction partie entière $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}$

— est croissante

— n'est pas strictement croissante

— a le graphe suivant :

25 **Proposition.**

— On a les encadrements :
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$$
et
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$$

— On a
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \lfloor x \rfloor = x \iff x \in \mathbb{Z}$$

— On a
$$\forall\, n \in \mathbb{Z},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad n \leqslant x \iff n \leqslant \lfloor x \rfloor$$

— On a
$$\forall\, p \in \mathbb{Z},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x + p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p$$

26 **Remarques importantes.**

- Attention : $\xcancel{\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor}$
- Soit $n \in \mathbb{Z}$.
  Le plus grand entier pair inférieur ou égal à n est …
  Le plus grand entier impair inférieur ou égal à n est …
- Soit $p, q \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$p \leqslant x < q \implies p \leqslant \lfloor x \rfloor < q$$

27 **Question.** Soit n et k deux entiers de $\mathbb{Z}$.
Trouver un entier $a \in \mathbb{Z}$ tel que

$$2k < n \quad \Longleftrightarrow \quad k \leqslant a$$

Un élève propose la solution suivante.

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} 2k < n &\Longleftrightarrow k < \frac{n}{2} \\ &\Longleftrightarrow \lfloor k \rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor && \textit{par croissance de la fonction partie entière} \\ &\Longleftrightarrow k \leqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor && \textit{car k est un entier} \end{aligned}$$

L'entier $a = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ répond donc à la question.

Le prof lui répond :

Pour $n = 6$, on obtient $a = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = 3$ et l'équivalence proposée ne fonctionne pas avec $k = 3$.

Où est l'erreur ? Proposez une solution.

28 **Proposition (caractère archimédien de $\mathbb{R}$).**

(i) Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n > x$.

(ii) Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$.

(iii) (Axiome d'Archimède). Soit $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$.

- Une variante du point (i) : *Pour $x \in \mathbb{R}$, il existe un entier $n' \in \mathbb{Z}$ tel que $n' \geqslant x$.*
  En effet, prendre $n' = \ldots$
- L'entier $\lfloor x \rfloor + 1$ n'est pas en général le plus petit entier $\geqslant x$.
  Plus exactement il l'est, sauf si $x \in \mathbb{Z}$.
  Il peut être conceptuellement plus clair de donner un nom à ce plus petit entier $\geqslant x$, et on le qualifie de partie entière supérieure :

$$\lceil x \rceil = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ \lfloor x \rfloor + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

  En pratique, la partie entière (inférieure) $\lfloor x \rfloor$ suffira largement à nos besoins.

29 **Proposition (Division euclidienne dans $\mathbb{R}$).**
Soit $T > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. Il existe alors un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times [0, T[$ tel que $x = qT + r$.
On appelle q et r le quotient et le reste dans la division euclidienne de x par T.

- r est l'unique élément de $[0, T[$ tel que $x \equiv r\ [T]$.
- Dans le cas particulier $T = 1$, le quotient de x est la partie entière $\lfloor x \rfloor$ et le reste est la partie fractionnaire $x - \lfloor x \rfloor$.

V. Compléments

Densité

30 **Définition.** Soit D une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que D est dense dans $\mathbb{R}$ lorsque $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, d \in D \cap [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$
Autrement dit, D est dense dans $\mathbb{R}$ lorsque tout point de $\mathbb{R}$ est arbitrairement proche de points de D.

31 **Proposition.**
Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Principe de récurrence

32 **Proposition.** Les deux assertions suivantes sont équivalentes.

1. *Principe de récurrence* : étant donné un prédicat P portant sur les entiers naturels,
$$\text{si } \begin{cases} P(0) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{cases} \quad \text{alors} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ P(n).$$
2. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

$\boxed{1. \implies 2.}$ Supposons le principe de récurrence vrai.
Soit A une partie de $\mathbb{N}$ n'admettant pas de plus petit élément. Montrons que A est vide.
Pour cela, montrons que tout entier naturel est un minorant de A.
Procédons par récurrence.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $P(n)$: « n est un minorant de A ».

Initialisation. Comme $A \subset \mathbb{N}$, tous les éléments de A sont positifs. Donc 0 est un minorant de A.
D'où $P(0)$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$.
D'après $P(n)$, l'entier n minore A.
On a $n \notin A$ sinon n serait le plus petit élément de A (et on a supposé que A n'admettait pas de plus petit élément).
Ainsi $\forall a \in A,\ n \leqslant a$ et $n \neq a$.
D'où $\forall a \in A,\ n+1 \leqslant a$.
D'où $P(n+1)$.

Bilan. Tout entier naturel est un minorant de A.

Donc A est vide : en effet, s'il existait $a_0 \in A$, tous les entiers naturels seraient des minorants de A donc $\forall n \in \mathbb{N}, n \leqslant a_0$.
En particulier, pour $n = a_0 + 1$, on aurait une contradiction.

Donc toute partie *non vide* de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

$\boxed{2. \implies 1.}$
Supposons que toute partie de $\mathbb{N}$ non vide admet un plus petit élément.
Soit P un prédicat portant sur les entiers naturels.
$$\text{Supposons } \begin{cases} P(0) \\ \forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{cases}$$
Posons $A = \{n \in \mathbb{N} \mid\ P(n) \text{ est fausse}\}$. Montrons que A est vide.

Raisonnons par l'absurde. Supposons que A soit non vide.
En tant que partie de $\mathbb{N}$ non vide, A possède un plus petit élément n_0 d'après l'hypothèse.
Comme $P(0)$ est vraie, $0 \notin A$. Donc $n_0 \neq 0$ donc $n_0 \geqslant 1$.
On a alors $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$ et $n_0 - 1 \notin A$ (car n_0 est le plus petit élément de A).
Donc $P(n_0 - 1)$ est vraie.
D'après l'implication supposée, on en déduit que $P(n_0)$ est vraie donc que $n_0 \notin A$.
Ce qui contredit le fait que $n_0 \in A$.

Donc A est vide et ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$.

Nombres réels

preuve et éléments de correction