Nombres réels

exercices

Borne supérieure, borne inférieure et tutti quanti

101 Détermination de bornes

Déterminer, si elles existent, les bornes des ensembles suivants et préciser s'il s'agit d'un maximum/minimum.

$$A = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\};$$

$$B = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \{0\};$$

$$C = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{Z}^*\right\};$$

$$D = \left\{\frac{1}{x},\ x \in \mathbb{R}_+^*\right\};$$

$$E = \{an + b,\ n \in \mathbb{N}^*\} \text{ où } (a, b) \in \mathbb{R}^2;$$

$$F = \{(-1)^n a + b,\ n \in \mathbb{N}^*\} \text{ où } (a, b) \in \mathbb{R}^2;$$

$$G = \left\{\frac{a}{n} + b,\ n \in \mathbb{N}^*\right\} \text{ où } (a, b) \in \mathbb{R}^2;$$

$$H = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

$$I = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

$$J = \left\{(-1)^n(1 - \frac{1}{n}),\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

102 Un classique

1. Déterminer la borne inférieure de $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soit a un réel tel que $\forall \varepsilon > 0, |a| \leqslant \varepsilon$. En utilisant la question 1, que peut-on dire de a ?

103 Avec la définition

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$. On suppose que B est bornée. Montrer que A est bornée et comparer les bornes supérieures et inférieures de A et de B.

104 « $A < B$ »

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $\forall\, a \in A, \forall\, b \in B, a < b$.
Montrer que A est majorée, que B est minorée et comparer $\sup A$ et $\inf B$.
Donner un exemple de parties de $\mathbb{R}$ où il y a égalité entre $\sup A$ et $\inf B$.

105 Un mini raisonnement

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ telle que $\sup A > 0$. Montrer qu'il existe un élément de A strictement positif.

106 Deux parties adjacentes

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$, non vides, vérifiant :

$$\begin{cases} \forall\, a \in A,\ \forall\, b \in B,\ a \leqslant b \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, a \in A,\ \exists\, b \in B,\ b - a \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

Montrer que $\sup(A) = \inf(B)$.

107 Opérations sur des parties de $\mathbb{R}$

Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit les ensembles suivants :

$$-A = \{-a \mid a \in A\},\ A+B = \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\},\ A+\lambda = \{a + \lambda \mid a \in A\},\ \lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}.$$

1. Montrer que $A \cup B$ admet une borne supérieure et la déterminer.
2. L'intersection $A \cap B$ admet-elle une borne supérieure ?
3. Montrer que $-A$ admet une borne inférieure et la déterminer.
4. Montrer que $A + \lambda$ admet une borne supérieure et la déterminer.
5. Montrer que $A + B$ admet une borne supérieure et la déterminer.
6. Si $\lambda > 0$, montrer que λA admet une borne supérieure et la déterminer.
   Que peut-on dire si $\lambda < 0$ ou $\lambda = 0$?

Établir des propriétés analogues lorsque l'on suppose que A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et minorées.

108 Point fixe

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction croissante. On veut montrer que f possède un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$. On pose $E = \Big\{x \in [0,1] \mid f(x) \leqslant x\Big\}$.

1. Montrer $f(E) \subset E$. *On dit que E est stable par f.*
2. Montrer que E possède une borne inférieure m, puis que $m \in [0,1]$.
3. Montrer que $f(m)$ minore E.
4. Montrer que $m \in E$ et $f(m) \in E$.
5. En déduire que m est un point fixe de f.

Ce résultat est-il toujours vrai avec une fonction décroissante ?
Ce résultat est-il toujours vrai si l'on remplace $[0,1]$ par $[0,1[$?

109 Distance d'un réel à une partie

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on appelle *distance* de x à A le réel :

$$d(x,A) = \inf\left\{|x-a|,\ a \in A\right\}.$$

Justifier que $d(x,A)$ est bien définie, puis montrer :

$$\forall\, x,y \in \mathbb{R},\ |d(x,A) - d(y,A)| \leqslant |x-y|.$$

110 Avec des fonctions

Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles définies sur une partie A non vide de $\mathbb{R}$.
On suppose que f et g sont majorées sur A. Comparer $\sup\limits_A f + \sup\limits_A g$ et $\sup\limits_A (f+g)$.

111 Une fonction définie à l'aide de sup

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction majorée. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on pose $f^*(y) = \sup\limits_{x \leqslant y} f(x)$.

1. Déterminer f^* dans le cas où f est croissante.
2. Étudier la monotonie de f^*.

Partie entière

112 Des résultats classiques

Soient x et y deux réels. Montrer les assertions suivantes.

(i) $x \leqslant y \implies \lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$. La réciproque est-elle vraie ?

(ii) $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

(iii) $\lfloor x \rfloor + \lfloor x+y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

(iv) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

(v) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left\lfloor \dfrac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{x}{n} \right\rfloor$.

(vi) $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$.

113 Une étude de fonction

Étudier la périodicité des fonctions $x \mapsto \lfloor 3x \rfloor - 3x$ et $x \mapsto \dfrac{x}{2} - \left\lfloor \dfrac{x+1}{2} \right\rfloor$.

114 Un peu d'arithmétique

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \lfloor \sqrt{n^4+2n^3+3n^2+1} \rfloor = n^2+n$.
2. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ l'entier $n^4+2n^3+3n^2+1$ est-il le carré d'un entier ?

115 **Une belle égalité**

Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor .$$

Commencer par traiter le cas $x \in [0,1[$, puis exploiter ce cas pour le cas général.

116 **Nombres d'entiers dans un segment**

Soit $a \leqslant b \in \mathbb{R}$. Établir :

$$\mathrm{Card}([a,b] \cap \mathbb{Z}) = \lfloor b \rfloor + \lfloor 1-a \rfloor .$$

117 **Un exercice de khôlle !**

Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n+2} \right\rfloor .$$

On pourra montrer

$$p^2 \leqslant 4n+1 \leqslant \left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2 < 4n+2 \leqslant (p+1)^2$$

où $p \in \mathbb{Z}$ est à déterminer.

Densité

118 **Définition de la densité**

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est *dense* dans $\mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient un élément de A.

1. Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists y \in A, |x-y| < \varepsilon$.
2. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

119 **Une condition suffisante pour être dense**

Soit $A \subset \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ \exists (a,b) \in A^2,\ a < x < b \\ \forall (a,b) \in A^2,\ \dfrac{a+b}{2} \in A. \end{cases}$$

Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Pour aller plus loin...

120 **Relation d'inclusion sur l'ensemble des parties et bornes**

Soit E un ensemble. On considère $\mathcal{P}(E)$ muni de la relation d'inclusion. Montrer que toute partie de $\mathcal{P}(E)$ admet une borne supérieure et une borne inférieure.

121 **Le principe de récurrence**

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément ;

(ii) si $\mathcal{A}$ est une partie de $\mathbb{N}$ telle que $\begin{cases} 0 \in \mathcal{A} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \in \mathcal{A} \Rightarrow n+1 \in \mathcal{A}) \end{cases}$, alors $\mathcal{A} = \mathbb{N}$.

122 **Une partie de $\mathbb{Q}$ sans borne supérieure**

On considère l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ muni de la relation d'ordre usuelle.
Montrer que l'ensemble $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leqslant 2\} \subset \mathbb{Q}$ n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

123

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \;=\; \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$$

Montrer que cette somme vaut encore

$$\left(\frac{n}{2}\right)^2 \;-\; \frac{1-(-1)^n}{8}$$

Nombres réels

corrigés

A) On a clairement $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1$, ce qui montre que A est minoré par 0 et majoré par 1.
Comme en outre $1 = \frac{1}{1} \in A$, on a déjà

$$\max A = \sup A = 1.$$

Par ailleurs, montrons que 0 est la borne inférieure de A. On a déjà dit que 0 minorait A.
Soit $\varepsilon > 0$. On va montrer que $0 + \varepsilon$ ne minore pas A.
Par le caractère archimédien des réels, on peut trouver un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$, ce qui exhibe un élément de A qui est $< \varepsilon$ et montre que ε ne minore pas la partie A.
Le nombre 0 est donc le plus grand des minorants de A, ce qui montre $0 = \inf A$.
Comme $0 \notin A$, on a $\inf A \notin A$, ce qui montre que A n'a pas de minimum.

B) Il n'est pas difficile de montrer que 0 minore B et que 1 majore B.
Comme $1 \in B$, on a,

$$\max B = \sup B = 1.$$

Contrairement au point précédent, $0 \in B$, donc on a

$$\min B = \inf B = 0.$$

C) On a déjà vu que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1$.
En passant à l'opposé, on a de même l'encadrement $\forall n \in \mathbb{Z}_-^*, -1 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 0$.
En rassemblant ces deux encadrements, on a

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, -1 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1,$$

donc -1 minore C et 1 majore C.
Comme $-1 = \frac{1}{-1} \in C$ et $1 = \frac{1}{1} \in C$, on a

$$\min C = \inf C = -1 \quad \text{et} \quad \max C = \sup C = 1.$$

D) On montre facilement (par exemple en étudiant la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$) que

$$\left\{\frac{1}{x},\ x \in \mathbb{R}_+^*\right\} = \mathbb{R}_+^*.$$

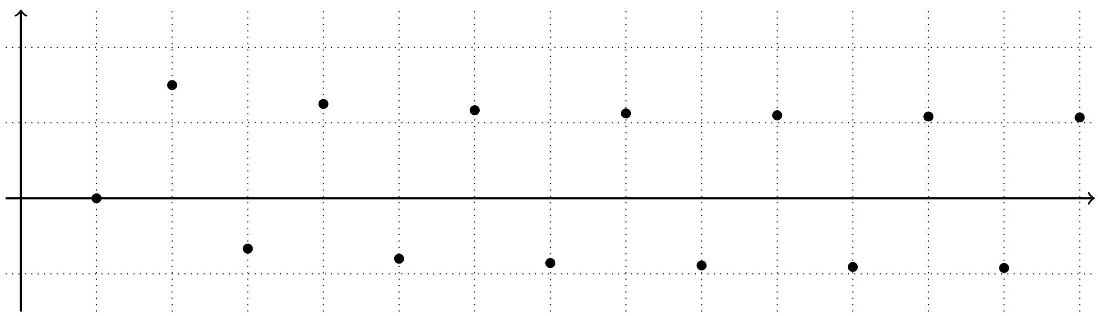
Il s'agit donc d'un ensemble non majoré.
L'ensemble est par ailleurs minoré et $0 = \inf \mathbb{R}_+^*$.
Comme $0 \notin \mathbb{R}_+^*$, on a $\inf \mathbb{R}_+^* \notin \mathbb{R}_+^*$, donc $\mathbb{R}_+^*$ n'a pas de minimum.

E)

F)

G)

H) Un graphique peut aider à y voir plus clair.



On va montrer que

$$\max A = \sup A = \frac{3}{2} \qquad \text{et} \qquad \inf A = -1,$$

Montrons $\forall n \in \mathbb{N}^*, (-1)^n + \frac{1}{n} \leqslant \frac{3}{2}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On distingue deux cas.

- Si n est impair, on a $(-1)^n = -1$ et $\frac{1}{n} \leqslant 1$, donc
$$(-1)^n + \frac{1}{n} \leqslant -1 + 1 = 0.$$
- Si n est pair, il est déjà $\geqslant 2$. On a donc $(-1)^n = 1$ et $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{2}$, donc
$$(-1)^n + \frac{1}{n} \leqslant 1 + \frac{1}{2} \leqslant \frac{3}{2}.$$

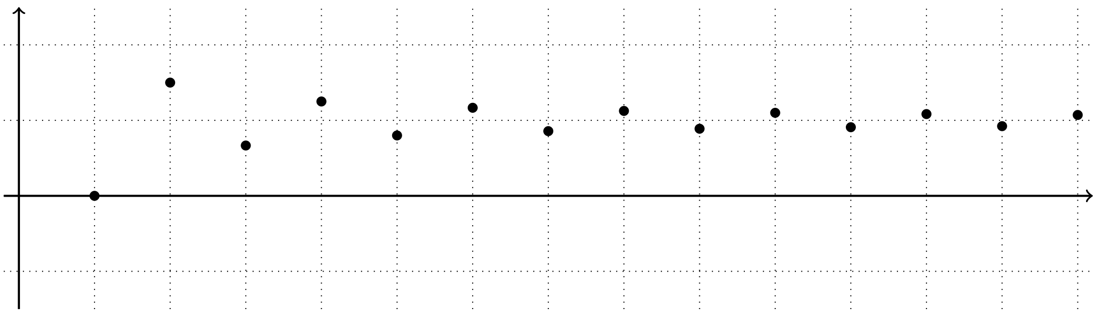
Comme $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} \in A$, on a déjà montré
$$\max A = \sup A = \frac{3}{2}.$$

Par ailleurs, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} > 0$, donc $(-1)^n + \frac{1}{n} \geqslant -1 + \frac{1}{n} > -1$. Cela montre déjà que -1 minore A.
Pour montrer que $-1 = \inf A$, nous allons utiliser la caractérisation epsilonesque de la borne inférieure : il nous reste à montrer $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, a \leqslant -1 + \varepsilon$.
D'après le caractère archimédien des réels, on peut trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$.
Posons
$$m = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est impair} \\ n+1 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

L'entier m est alors impair quoi qu'il arrive, et, comme $m \geqslant n$, on a $\frac{1}{m} \leqslant \varepsilon$.
On a donc
$$(-1)^m + \frac{1}{m} = -1 + \frac{1}{m} \leqslant -1 + \varepsilon.$$

Comme $(-1)^m + \frac{1}{m} \in A$, cela conclut.

I)

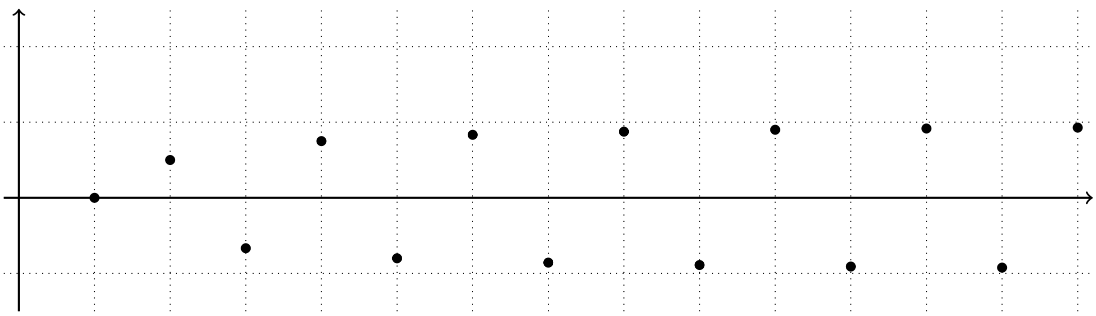


— On a déjà $1 + \frac{(-1)^1}{1} = 0$ et $1 + \frac{(-1)^2}{2} = \frac{3}{2}$.

— Par ailleurs, pour tout $n \geqslant 3$, on a $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{3}$, donc $\left|\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) - 1\right| \leqslant \frac{1}{3}$, donc
$$0 < \frac{2}{3} \leqslant 1 + \frac{(-1)^n}{n} \leqslant \frac{4}{3} < \frac{3}{2}.$$

— Cela montre :
  — que $0 \in A$ et que 0 minore A, donc $0 = \min A$;
  — que $\frac{3}{2} \in A$ et que $\frac{3}{2}$ majore A, donc $\frac{3}{2} = \max A$.

J)



— On a déjà, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|(-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right| = 1 - \frac{1}{n} < n,$$

ce qui montre $-1 < (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

— Soit $\varepsilon > 0$. Montrons $\exists a \in A : a \geqslant 1 - \varepsilon$. Cela montrera $\sup A = 1$, et donc que A n'a pas de maximum (car, d'après ce qui précède, sa borne supérieure, 1, majore **strictement** A).

D'après le caractère archimédien des réels, on peut trouver $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$. Quitte à ajouter 1 à n (ce qui ne changera pas l'inégalité précédente), on peut supposer n pair. On a alors $\frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$, donc $(-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} \geqslant 1 - \varepsilon$, ce qui conclut.

— On montre exactement de la même façon que $-1 = \inf A$, et donc que A ne possède pas de minimum.

1. La borne inférieure de $\mathbb{R}_+^*$ existe car $\mathbb{R}_+^*$ est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$.
   Notons α cette borne inférieure.
   1ère preuve. Montrons que $\alpha = 0$ en montrant que $0 \leqslant \alpha$ puis $\alpha \leqslant 0$.

   — 0 est un minorant de $\mathbb{R}_+^*$, donc $0 \leqslant \alpha$ (un minorant est toujours plus petit que le plus grand des minorants, à savoir la borne inférieure !).
   On peut le retrouver en disant :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 < x$$
   Par passage à la borne inférieure (qui transforme des inégalités strictes en larges) :
   $$0 \leqslant \inf_{x \in \mathbb{R}_+^*} x \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad 0 \leqslant \inf \mathbb{R}_+^* \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad 0 \leqslant \alpha$$

   — La borne inférieure est un minorant donc :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \alpha \leqslant x$$
   On peut discrétiser, en disant en particulier :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha \leqslant \frac{1}{n}$$
   En passant à la limite sur n (licite, car chaque terme admet une limite), on a
   $$\alpha \leqslant 0$$
   On peut raisonner par l'absurde. Si on avait $\alpha > 0$, il existerait $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x < \alpha$ (prendre $x = \frac{\alpha}{2}$ qui est dans $\mathbb{R}_+^*$ car $\alpha > 0$), et alors α ne serait pas la borne inférieure de $\mathbb{R}_+^*$.

   2ème preuve. Montrons que $\alpha = 0$ en montrant que $0 \leqslant \alpha$ puis $\alpha \leqslant 0$.
2. Soit a un réel tel que $\forall \varepsilon > 0, |a| \leqslant \varepsilon$. Donc par passage à la borne inférieure
   $$|a| \leqslant \inf \mathbb{R}_+^*$$
   (on peut le retrouver en disant « $|a|$ est un minorant de $\mathbb{R}_+^*$; et $\mathbb{R}_+^*$ est le plus grand des minorants, d'où $|a| \leqslant \inf \mathbb{R}_+^*$ »).
   Grâce à la question 1, cela se réécrit $|a| \leqslant 0$.
   Comme une valeur absolue est également positive, on en déduit $a = 0$.

Comme B est bornée, il existe m et $M \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall\, b \in B,\ m \leqslant b \leqslant M$$

Comme $A \subset B$, on a donc

$$\forall\, a \in A,\ m \leqslant a \leqslant M$$

On en déduit que A est bornée.
Comparons maintenant les bornes supérieures et inférieures de A et de B, qui existent, car les ensembles sont des parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$.
Par définition, on a :

$$\forall\, b \in B,\ \inf B \leqslant b \leqslant \sup B$$

Comme $A \subset B$, on en déduit

$$\forall\, a \in A,\ \inf B \leqslant a \leqslant \sup B$$

que l'on peut réécrire :

$$\forall\, a \in A,\ \inf B \leqslant a \qquad \text{et} \qquad \forall\, a \in A,\ a \leqslant \sup B$$

En passant à la borne inférieure à gauche, et à la borne supérieure à droite, on a

$$\inf B \leqslant \inf A \qquad \text{et} \qquad \sup A \leqslant \sup B$$

On aurait aussi pu justifier ces inégalités en disant
« L'inégalité $\forall\, a \in A,\ \inf B \leqslant a$ dit que $\inf B$ est un minorant de A ; or $\inf A$ est le plus grand des minorants, donc $\inf B \leqslant \inf A$ ».
Idem pour sup.

104

Comme B est non vide, il existe $b_0 \in B$. On a alors avec l'hypothèse :

$$\forall\, a \in A,\ \ a < b_0$$

Ainsi, A est majorée. En tant que partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, cette partie A admet une borne supérieure.

Même type de raisonnement pour montrer que B est minorée ; étant non vide, B admet une borne inférieure.

Montrons que $\sup A \leqslant \inf B$.
Pour cela, partons de l'hypothèse $\forall\, a \in A, \forall\, b \in B, a < b$.
Fixons $a \in A$. On a alors

$$\forall\, b \in B, a < b$$

En passant à la borne inférieure (ou bien en disant « a est un minorant de B, donc la borne inférieure de B, qui est le plus grand des minorants, est supérieure à a), on a :

$$a \leqslant \inf B$$

Récoltons : on a donc obtenu $\forall\, a \in A,\ \ a \leqslant \inf B$.
Passons à la borne supérieure maintenant. On obtient $\sup A \leqslant \inf B$.
On peut aussi dire que $\inf B$ est un majorant de A, donc la borne supérieure de A, qui est le plus petit des majorants, est inférieure à $\inf B$.

Pour un exemple de parties de $\mathbb{R}$ où on a $A < B$ avec $\sup A = \inf B$, on peut prendre $A = \left]-\infty, 3\right[$ et $B = \left]3, +\infty\right[$.

105

Le fait que A soit non vide et majorée assure l'existence de $\sup A$.
Montrons qu'il existe un élément de A strictement positif.
Raisonnons par l'absurde en supposant que tous les éléments de A sont négatifs :

$$\forall\, a \in A,\ a \leqslant 0$$

En passant à la borne supérieure (licite), on a $\sup A \leqslant 0$.
On aurait aussi pu dire « A est majorée par 0, donc le plus petit des majorants est inférieure à 0, c'est-à-dire $\sup A \leqslant 0$.
Or d'après l'énoncé $\sup A > 0$, d'où la contradiction.

107

Rappelons la caractérisation epsilonesque de la borne supérieure.

Soit E une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Soit $s \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence

$$s = \sup E \iff \begin{cases} s \text{ est un majorant de } E : & \forall\, e \in E,\ e \leqslant s \\ s \text{ est le plus petit des majorants de } E : & \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, e \in E,\ s - \varepsilon \leqslant e \end{cases}$$

Les hypothèses entraînent que A et B possèdent des bornes inférieure et supérieure.

1. — La partie $A \cup B$ est non vide, car A est non vide.
   — La partie $A \cup B$ est majorée.
   Soit $x \in A \cup B$.
   Comme la borne supérieure d'une partie en est un majorant, on a

$$\forall\, a \in A,\ a \leqslant \sup A \quad \text{et} \quad \forall\, b \in B,\ a \leqslant \sup B.$$

   Comme $\sup A$ et $\sup B$ sont $\leqslant \max(\sup A, \sup B)$, on en déduit

$$x \leqslant \max(\sup A, \sup B),$$

   On vient de prouver que $\max(\sup A, \sup B)$ est un majorant de $A \cup B$.
   La partie $A \cup B$ est non vide et majorée (par $\max(\sup A, \sup B)$), donc elle admet une borne inférieure.
   Montrons $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$ par caractérisation epsilonesque.
   — On a déjà montré que $\max(\sup A, \sup B)$ est un majorant de $A \cup B$.
   — Reste à montrer que c'est le plus petit des majorants.
   Soit $\varepsilon > 0$.
   Montrons qu'il existe $x \in A \cup B$ tel que $\max(\sup A, \sup B) - \varepsilon \leqslant x$.
     — **Traitons le cas $\sup B \leqslant \sup A$.** Dans ce cas $\max(\sup A, \sup B) = \sup A$.
     Par caractérisation epsilonesque de la borne supérieure pour A, on peut trouver $a \in A$ tel que l'on ait l'inégalité $\sup A - \varepsilon \leqslant a$.
     A fortiori, cet élément a appartient à $A \cup B$ et vérifie $\sup A - \varepsilon \leqslant a$.
     On a donc trouvé un élément $a \in A \cup B$ tel que $\max(\sup A, \sup B) - \varepsilon \leqslant x$.
     — **L'autre cas est analogue.** Il suffit d'inverser les rôles joués par A et B.
2. Soit $x \in A \cap B$.
   Comme $x \in A$, on a $x \leqslant \sup A$.
   Comme $x \in B$, on a $x \leqslant \sup B$.
   On a donc $x \leqslant \min(\sup A, \sup B)$.
   On vient de montrer $\forall x \in A \cap B,\ x \leqslant \min(\sup A, \sup B)$.
   Ainsi, la partie $A \cap B$ est majorée.
   Si elle est non vide (ce que l'on ne sait pas), alors la borne supérieure existe et elle vérifie l'inégalité $\sup(A \cap B) \leqslant \min(\sup A, \sup B)$.
   Attention, on n'a pas nécessairement égalité.
3. — Montrons que $-A$ est non vide.
   Comme A est non vide, il existe $a_0 \in A$, donc $-a_0 \in -A$.
   — Montrons que $-A$ est minorée.
   Soit $b \in -A$.
   Par définition, on peut trouver $a \in A$ tel que $b = -a$.
   Comme $a \in A$, on a $a \leqslant \sup A$, donc $b = -a \geqslant -\sup A$.
   On a donc montré que $\forall\, b \in -A,\ b \geqslant -\sup A$.
   Donc $-A$ est minorée par $-\sup A$.
   La partie $-A$ est non vide et minorée (par $-\sup A$), donc admet une borne inférieure.
   Montrons $\inf(-A) = -\sup A$ par caractérisation epsilonesque.
   — On a déjà montré que $-\sup A$ est un minorant de $-A$.

— Soit $\varepsilon > 0$. Montrons qu'il existe $b \in -A$ tel que $b \leqslant -\sup A + \varepsilon$.
Par caractérisation epsilonesque pour la partie A, on peut trouver $a \in A$ tel que

$$\sup A - \varepsilon \leqslant a$$

En passant à l'opposé, on a

$$\underbrace{-a}_{\in -A} \leqslant -\sup A + \varepsilon,$$

En posant $b = -a$, on a réalisé le contrat.

4. — La partie $A + \lambda$ est non vide.
   — La partie $A + \lambda$ est majorée par $\sup A + \lambda$.
   Soit $b \in A + \lambda$.
   On peut trouver $a \in A$ tel que $b = a + \lambda$.
   Comme $a \in A$, on a $a \leqslant \sup A$.
   On en déduit $b \leqslant \sup A + \lambda$.
   On a donc montré que $\sup A + \lambda$ majore $A + \lambda$.

La partie $A + \lambda$ est non vide et majorée donc admet une borne supérieure.
Montrons que $\sup(A + \lambda) = \sup A + \lambda$ par caractérisation epsilonesque.

— On a déjà montré que $\sup A + \lambda$ est un majorant de $A + \lambda$.
— Soit $\varepsilon > 0$.
Montrons qu'il existe $b \in A + \lambda$ tel que $\sup A + \lambda - \varepsilon \leqslant b$.
Par caractérisation epsilonesque, on peut trouver $a \in A$ tel que $\sup A - \varepsilon \leqslant a$.
En ajoutant λ, on obtient $(\sup A + \lambda) - \varepsilon \leqslant a + \lambda$.

5. — La partie $A + B$ est non vide.
   — La partie $A + B$ est majorée (par $\sup A + \sup B$).
   Soit $x \in A + B$. On peut trouver $a \in A$ et $b \in B$ tels que $x = a + b$.
   Comme $a \in A$, on a $a \leqslant \sup A$.
   Comme $b \in B$, on a $b \leqslant \sup B$.
   On en déduit $x = a + b \leqslant \sup A + \sup B$.
   On a donc montré que $\sup A + \sup B$ majore $A + B$.

La partie $A + B$ est non vide et majorée, donc elle admet une borne supérieure.
Montrons que $\sup A + \sup B = \sup(A + B)$ par caractérisation epsilonesque.

— On a déjà montré que $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A + B$.
— Soit $\varepsilon > 0$.
Montrons qu'il existe $x \in A + B$ tel que $\sup A + \sup B - \varepsilon \leqslant x$.
Par caractérisation epsilonesque appliquée à A, puis à B, on peut trouver $a \in A$ tel que $\sup A - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant a$ et on peut trouver $b \in B$ tel que $\sup B - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant b$.
En additionnant ces deux inégalités, on obtient

$$\sup A + \sup B - \varepsilon \leqslant a + b$$

6. — La partie λA est non vide.
   — La partie λA est majorée (par $\lambda \sup A$).
   Soit $b \in \lambda A$. On peut trouver $a \in A$ tel que $b = \lambda a$.
   Comme $a \in A$, on a $a \leqslant \sup A$.
   En multipliant par $\lambda \geqslant 0$, on en déduit

$$\lambda a \leqslant \lambda \sup A.$$

   On a donc montré que $\lambda \sup A$ majore λA.

La partie λA est non vide et majorée, donc elle admet une borne supérieure.
Montrons que $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$ par caractérisation epsilonesque.

— On a déjà montré que $\lambda \sup A$ est un majorant de λA.

— Soit $\varepsilon > 0$.

Montrons qu'il existe $x \in \lambda A$ tel que $\lambda \sup A - \varepsilon \leqslant x$.

Par caractérisation epsilonesque, comme $\lambda > 0$, on peut trouver $a \in A$ tel que $\sup A - \frac{\varepsilon}{\lambda} \leqslant a$.

En multipliant par $\lambda \geqslant 0$, on en déduit

$$\lambda \sup A - \varepsilon \leqslant \lambda a$$

Si $\lambda = 0$, on a $\lambda A = \{0\}$, donc $\sup(\lambda A) = 0$.

Si $\lambda < 0$, on peut

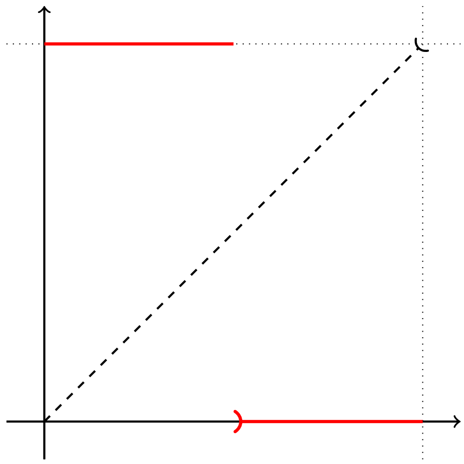
— utiliser le cas précédent (ou plutôt son extension naturelle aux bornes inférieures) pour montrer que $\inf(|\lambda| A) = |\lambda| \inf A$;

— puis utiliser la question 3 pour en déduire que

$$\sup(\lambda A) = -\inf(-\lambda A) = -\inf(|\lambda| A) = -|\lambda| \inf A = \lambda \inf A.$$

1. Soit $y \in f(E)$. On peut trouver $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
   Comme $x \in E$, on a $f(x) \leqslant x$, c'est-à-dire $y \leqslant x$.
   Par croissance de f, on en déduit $f(y) \leqslant f(x)$, c'est-à-dire $f(y) \leqslant y$, ce qui implique $y \in E$.
2. L'ensemble E est non vide (comme le codomaine de f est $[0,1]$, on a $f(1) \in [0,1]$, donc $1 \in E$) et minoré (par 0, comme $E \subset [0,1]$), donc il possède une borne inférieure m.
   Ce m appartient à $[0,1]$.
   On a $m \leqslant 1$, car $1 \in E$.
   On a $0 \leqslant m$, car 0 est un minorant de E et $m = \inf E$.
3. Soit $x \in E$.
   Comme m est un minorant de E, on a $m \leqslant x$.
   Comme f est croissante, on en déduit
   $$\begin{aligned} f(m) &\leqslant f(x) \\ &\leqslant x. && \text{car } x \in E \end{aligned}$$
   On a donc montré $\forall x \in E, f(m) \leqslant x$, c'est-à-dire que $f(m)$ minore E.
4. On a montré que $f(m)$ minore E. Comme $m = \inf E$ est le plus grand des minorants de E, on en déduit $f(m) \leqslant m$. De plus, $m \in [0,1]$, donc $m \in E$.
   On sait que $f(E) \subset E$, donc $f(m) \in E$.
5. On dispose donc de m et $f(m)$ deux minorants de E, qui appartiennent à E.
   Ce sont donc deux minimums de E, donc ils sont égaux.

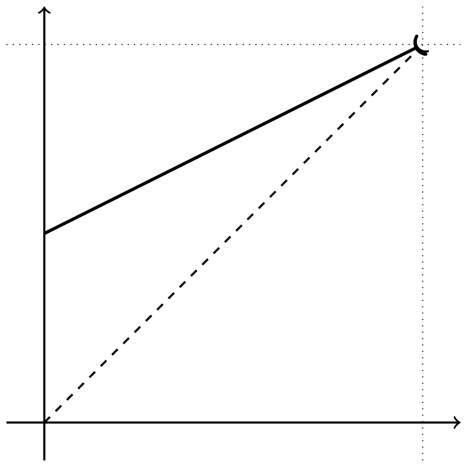
Le résultat devient faux avec une fonction décroissante (prendre la fonction qui est constante égale à 1 sur $[0, \frac{1}{2}]$ et constante égale à 0 sur $]\frac{1}{2}, 1]$.



Le résultat devient faux sur l'intervalle semi-ouvert $[0,1[$: la fonction

$$\begin{array}{ccc} [0,1[& \longrightarrow & [0,1[\\ x & \longmapsto & \frac{1+x}{2}, \end{array}$$

par exemple, est croissante, mais n'admet pas de point fixe.



(i)

(ii) Par définition, on a

$$\begin{cases} \lfloor x \rfloor & \leqslant & x & < & \lfloor x \rfloor + 1 \\ \lfloor y \rfloor & \leqslant & x & < & \lfloor y \rfloor + 1 \end{cases}$$

Par somme, on en déduit

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \ \leqslant\ x + y \ <\ \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$$

Disjonction de cas.

Cas $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$ Dans ce cas $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.

Cas $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 \leqslant x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$ Dans ce cas $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Dans les deux cas, on a donc :

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x + y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

(iii)

(iv) Il s'agit de montrer que la partie entière de $\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ vaut $\lfloor x \rfloor$.
C'est-à-dire, qu'il s'agit de montrer que

$$\lfloor x \rfloor \ \leqslant\ \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \ <\ \lfloor x \rfloor + 1$$

Début de la preuve.
Par définition de $\lfloor x \rfloor$ et en multipliant par n, on obtient :

$$n\lfloor x \rfloor \ \leqslant\ nx \ <\ n(\lfloor x \rfloor + 1)$$

On procède maintenant en deux temps.
• En appliquant la fonction partie entière qui est croissante sur l'inégalité de gauche, on obtient

$$n\lfloor x \rfloor \ \leqslant\ \lfloor nx \rfloor$$

• En combinant l'inégalité $\lfloor nx \rfloor \leqslant nx$ avec l'inégalité stricte de droite $nx < n(\lfloor x \rfloor + 1)$, on obtient par transitivité :

$$\lfloor nx \rfloor < n(\lfloor x \rfloor + 1)$$

On vient donc de montrer que

$$n\lfloor x \rfloor \ \leqslant\ \lfloor nx \rfloor \ <\ n(\lfloor x \rfloor + 1)$$

En divisant par n, on a donc

$$\lfloor x \rfloor \ \leqslant\ \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \ <\ \lfloor x \rfloor + 1$$

On vient d'obtenir un encadrement du réel $\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ par deux entiers consécutifs (avec les inégalités strictes et larges au bon endroit), à savoir l'entier $\lfloor x \rfloor$ et l'entier suivant.
On a donc :

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor \ =\ \lfloor x \rfloor$$

Autre solution.
On pose $x = p_x + d_x$ avec $p_x = \lfloor x \rfloor$ et $d_x = x - \lfloor x \rfloor$.
Donc $p_x \in \mathbb{Z}$ et $d_x \in [0, 1[$.
On a alors $nx = np_x + nd_x$. Comme $np_x \in \mathbb{Z}$, on a $\lfloor nx \rfloor = np_x + \lfloor nd_x \rfloor$.
Ainsi

$$\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \ =\ p_x + \frac{\lfloor nd_x \rfloor}{n}$$

L'égalité demandée revient à montrer que la partie entière de $\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ vaut $p_x = \lfloor x \rfloor$.

Il suffit donc de montrer que $\dfrac{\lfloor nd_x \rfloor}{n} \in [0, 1[$.
Allons-y.
On a $0 \leqslant d_x < 1$, d'où $0 \leqslant nd_x < n$, d'où $0 \leqslant \lfloor nd_x \rfloor < n$. D'où le résultat en divisant par n.

(v)

(vi) Posons $n = \lfloor x \rfloor$ et $a = x - \lfloor x \rfloor$, de sorte que $x = n + a$.
On va utiliser à deux reprises la propriété suivante :

$$\forall\, p \in \mathbb{Z},\ \forall\, y \in \mathbb{R}, \quad \lfloor p + y \rfloor \ = \ p + \lfloor y \rfloor$$

On a :

$$\begin{aligned} \lfloor 2x \rfloor - \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor &= \lfloor 2n + 2a \rfloor - \left\lfloor n + a + \frac{1}{2} \right\rfloor - n \\ &= 2n + \lfloor 2a \rfloor - \left(n + \left\lfloor a + \frac{1}{2} \right\rfloor \right) - n \qquad 2n \text{ et } n \text{ sont des entiers} \\ &= \lfloor 2a \rfloor - \left\lfloor a + \frac{1}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Raisonnons par disjonction de cas.

Cas 1 Supposons $a \in [0, \frac{1}{2}[$.
Alors $2a \in [0, 1[$ et $a + \frac{1}{2} \in [0, 1[$ donc $\lfloor 2a \rfloor - \lfloor a + \frac{1}{2} \rfloor = 0 - 0 = 0$.

Cas 2 Supposons $a \in [\frac{1}{2}, 1[$.
Alors $2a \in [1, 2[$ et $a + \frac{1}{2} \in [1, 2[$ donc $\lfloor 2a \rfloor - \lfloor a + \frac{1}{2} \rfloor = 1 - 1 = 0$.

BILAN : On a

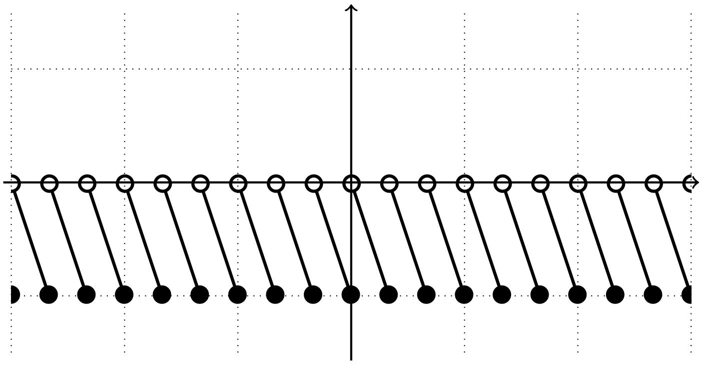
$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$$

113

— Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\left\lfloor 3\left(x+\frac{1}{3}\right)\right\rfloor - 3\left(x+\frac{1}{3}\right) &= \lfloor 3x+1\rfloor - 3x - 1\\ &= \lfloor 3x\rfloor + 1 - 3x - 1\\ &= \lfloor 3x\rfloor - 3x.\end{aligned}$$

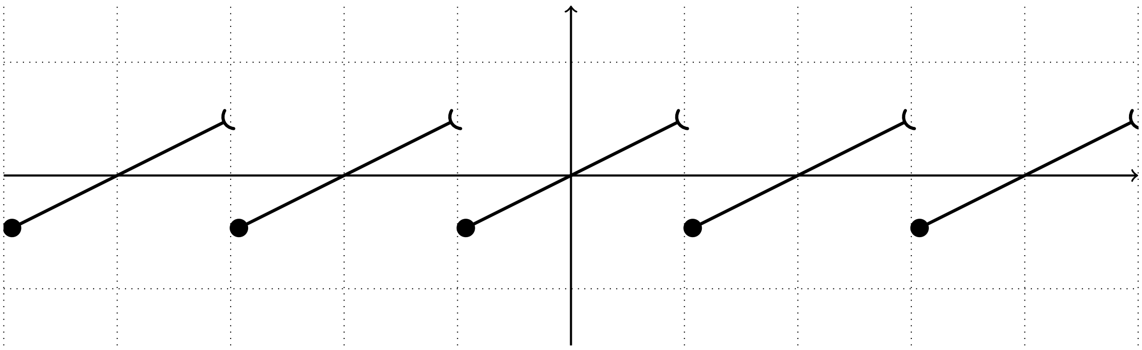
Cela montre que la fonction $x \mapsto \lfloor 3x\rfloor - 3x$ est $\frac{1}{3}$-périodique.



— Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{2} - \left\lfloor \frac{(x+2)+1}{2}\right\rfloor &= \frac{x}{2} + 1 - \left\lfloor \frac{x+1}{2} + 1\right\rfloor\\ &= \frac{x}{2} + 1 - \left\lfloor \frac{x+1}{2}\right\rfloor - 1\\ &= \frac{x}{2} - \left\lfloor \frac{x+1}{2}\right\rfloor.\end{aligned}$$

Cela montre que la fonction $x \mapsto \frac{x}{2} - \left\lfloor \frac{x+1}{2}\right\rfloor$ est 2-périodique.



115

On procède en deux étapes.

Cas particulier. On suppose $x \in [0,1[$.

Comme $[0,1[= \bigcup_{k=0}^{n-1} \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$, on peut trouver $k_x \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $x \in \left[\frac{k_x}{n}, \frac{k_x+1}{n}\right[$.
On a alors $nx \in [k_x, k_x+1[$, donc $\lfloor nx \rfloor = k_x$.

Examinons les termes du membre gauche de l'égalité.
Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. On a

$$\underbrace{\frac{k_x+k}{n}}_{\in[0,2[} \leqslant x + \frac{k}{n} < \underbrace{\frac{k_x+k+1}{n}}_{\in]0,2]}$$

donc

$$\left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{k_x+k+1}{n} \leqslant 1 \text{ càd } k_x + k \leqslant n-1 \text{ càd } k_x + k < n \text{ càd } k < n - k_x \\ 1 & \text{si } \frac{k_x+k}{n} \geqslant 1 \text{ càd } k \geqslant n - k_x \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor &= \sum_{k=0}^{n-k_x} 0 + \sum_{k=n-k_x}^{n-1} 1 \\ &= (n-1) - (n-k_x) + 1 \\ &= k_x \\ &= \lfloor nx \rfloor . \end{aligned}$$

Cas général. Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque que l'on écrit $x = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)$.
On pose $p = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $\xi = x - p \in [0,1[$ de sorte que $x = p + \xi$.
On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor p + \xi + \frac{k}{n} \right\rfloor \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(p + \left\lfloor \xi + \frac{k}{n} \right\rfloor \right) && \text{(car } p \in \mathbb{Z}) \\ &= pn + \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \xi + \frac{k}{n} \right\rfloor \\ &= pn + \lfloor n\xi \rfloor && \text{(d'après le cas particulier)} \\ &= \lfloor n(p+\xi) \rfloor \\ &= \lfloor nx \rfloor \end{aligned}$$

Autre façon de présenter l'argument "en deux étapes".
Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque que l'on écrit $x = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)$.
On pose $p = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $\xi = x - p \in [0,1[$ de sorte que $x = p + \xi$.
On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor &\iff \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor p + \xi + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor n(p+\xi) \rfloor \\ &\iff np + \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \xi + \frac{k}{n} \right\rfloor = np + \lfloor n\xi \rfloor \\ &\iff \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \xi + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor n\xi \rfloor \end{aligned}$$

On constate que l'assertion finale est l'égalité de l'énoncé avec $\xi \in [0,1[$.

Ainsi, si on arrive à démontrer l'égalité pour un réel de $[0,1[$, on l'aura démontré pour un réel quelconque d'après les équivalences précédentes.
Sans perte de généralités, on peut donc s'attaquer à montrer cette égalité pour un $x \in [0,1[$. C'est ce qui a été fait dans la première étape.

Autre preuve (Pénélope Nazaret, 2022-2023, promo 2024).

On considère la fonction $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor - \lfloor nx \rfloor$ définie sur $\mathbb{R}$.

— Cette fonction (qui dépend de n) est $\frac{1}{n}$-périodique (le calcul est du même type que précédemment).

— Montrons que f est nulle sur $[0, \frac{1}{n}[$.
Soit $x \in [0, \frac{1}{n}[$.
Alors $0 \leqslant nx < 1$. Donc $\lfloor nx \rfloor = 0$.
Occupons-nous de la somme. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$.
On a
$$\frac{k}{n} \leqslant x + \frac{k}{n} < \frac{k+1}{n}$$
Comme $k \geqslant 0$ et $k \leqslant n-1$, on a :
$$\frac{0}{n} \leqslant \frac{k}{n} \leqslant x + \frac{k}{n} < \frac{k+1}{n} \leqslant \frac{n-1+1}{n}$$
d'où
$$0 \leqslant x + \frac{k}{n} < 1$$
Ainsi, $\lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = 0$.
Par somme, $\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = 0$.

— Par $\frac{1}{n}$-périodicité, on en déduit que f est nulle sur $\mathbb{R}$ tout entier !

116

On distingue 2 cas.

— Supposons $a \in \mathbb{Z}$.
La partie $[a, b] \cap \mathbb{Z} = [\![a, \lfloor b \rfloor]\!]$ possède alors $\lfloor b \rfloor - a + 1$ éléments.
Par ailleurs, dans ce cas, $1 - a \in \mathbb{Z}$, donc $\lfloor 1 - a \rfloor = 1 - a$, et on a bien

$$\lfloor b \rfloor + \lfloor 1 - a \rfloor = \lfloor b \rfloor + 1 - a.$$

— Supposons $a \notin \mathbb{Z}$.
La partie $[a, b] \cap \mathbb{Z} = [\![\lfloor a \rfloor + 1, \lfloor b \rfloor]\!]$ possède alors $\lfloor b \rfloor - (\lfloor a \rfloor + 1) + 1 = \lfloor b \rfloor - \lfloor a \rfloor$ éléments.
Par ailleurs, dans ce cas, $\lfloor 1 - a \rfloor = -\lfloor a \rfloor$: en effet, on a, par définition de la partie entière, l'encadrement $\lfloor a \rfloor < a < \lfloor a \rfloor + 1$, donc $-\lfloor a \rfloor < 1 - a < 1 - \lfloor a \rfloor$. Ainsi, on a bien

$$\lfloor b \rfloor + \lfloor 1 - a \rfloor = \lfloor b \rfloor - \lfloor a \rfloor.$$

117

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On a l'égalité

$$\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2 = n + 2\sqrt{n}\,\sqrt{n+1} + n + 1$$
$$= 2n + 1 + 2\sqrt{n^2+n}.$$

L'encadrement $n^2 \leqslant n^2 + n < n^2 + n + \frac{1}{4} = \left(n+\frac{1}{2}\right)^2$ entraîne alors

$$4n+1 \leqslant \left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2 < 4n+2.$$

Soit maintenant $p = \left\lfloor \sqrt{4n+1} \right\rfloor \in \mathbb{N}$.
On a alors $p+1 > \sqrt{4n+1}$, donc $(p+1)^2 > 4n+1$.
En promouvant cette inégalité stricte entre entiers en une inégalité large, on a $(p+1)^2 \geqslant 4n+2$, ce qui prouve

$$p^2 \leqslant 4n+1 \leqslant \left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2 < 4n+2 \leqslant (p+1)^2.$$

En fait, la dernière inégalité est même être stricte car un carré parfait ne s'écrit jamais sous la forme $4n+2$ (il n'est jamais congru à 2 modulo 4). En effet, si un nombre pair est un carré parfait, il doit être le carré d'un nombre pair, et donc être lui-même un multiple de 4.
Par stricte croissance de la fonction racine carrée, on en déduit

$$p \leqslant \sqrt{n}+\sqrt{n+1} < \sqrt{4n+2} < p+1,$$

ce qui montre

$$p = \left\lfloor \sqrt{n}+\sqrt{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n+2} \right\rfloor.$$