Matrices
Systèmes linéaires

09c-Matrices_Systemes.pdf, 17 novembre 2022, 17:17

Ici, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n, p, q, r sont des entiers de $\mathbb{N}^*$.

I. Matrices rectangulaires

1 **Définition.**
Une *matrice* à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $[\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$.
Une telle matrice est de *taille* (n, p).

- Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ une matrice. Il est d'usage de ranger cette collection de a_{ij} dans un tableau :

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{bmatrix}$$

— $a_{i,j}$ est le coefficient de A d'indice (i, j), c'est le coefficient de A situé à la ligne i et la colonne j. Ce coefficient sera souvent noté, en PCSI 3, $\text{coeff}_{i,j}(A)$.

— La $j^{\text{ème}}$ colonne de A, notée $\text{Col}_j(A)$, est la matrice colonne $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$.

— La $i^{\text{ème}}$ ligne de A, notée $\text{Ligne}_i(A)$, est la matrice ligne $\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \end{bmatrix}$.

- L'ensemble des matrices de taille (n, p) à coefficient dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
  - — Pour $n = p$, $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ se note plutôt $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$: c'est l'ensemble des matrices carrées de taille n.
  - — Pour $p = 1$, $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices colonnes de taille n.
  - — Pour $n = 1$, $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices lignes de taille p.
- La matrice de taille (n, p) dont tous les coefficients sont nuls est **la** matrice nulle.
  Elle est notée $0_{\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$, voire $0_{n,p}$.
- La matrice carrée de taille n dont tous les coefficients diagonaux valent 1 et les autres coefficients sont nuls est appelée la matrice identité et est notée I_n.

Remarque. L'usage veut que l'on utilise le plus possible la lettre i pour les indices de lignes et j pour les indices de colonnes.
Si M est une matrice, le coefficient d'indice (i, j) est noté sans ambiguïté :

$$\text{coeff}_{i,j}(M) \qquad\qquad M_{i,j}$$

Souvent, on nomme avec une lettre minuscule le coefficient d'indice (i, j), autrement dit, si M est la matrice, il arrive de désigner par $m_{i,j}$ son coefficient d'indice (i, j) de manière un peu abusive. Rigoureusement, il faudrait écrire :

Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note $(m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ cette matrice M.

Cela se transforme souvent en :

Soit $M = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

2 **Question.** Soit A la matrice carrée de taille n ayant des α sur la diagonale, des β sur la sur-diagonale et des 0 ailleurs :

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \beta \\ & & & \alpha \end{bmatrix} \qquad \text{autrement dit} \qquad \mathrm{coeff}_{i,j}(A) = \begin{cases} \alpha & \text{si } i = j \\ \beta & \text{si } \ldots\ldots \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit P la matrice carrée de taille $n+1$, ayant dans son triangle inférieur le triangle de Pascal. On a

$$\forall\, i, j \in [\![1, n+1]\!], \qquad \mathrm{coeff}_{i,j}(P) = \begin{cases} \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ & \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3 **Fait.**

— Deux matrices sont égales lorsqu'elles ont même format, et les mêmes coefficients.

— Deux matrices sont égales lorsqu'elles ont même format, et les mêmes lignes.

— Deux matrices sont égales lorsqu'elles ont même format, et les mêmes colonnes.

Soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a les équivalences :

* $A = B \iff \forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \forall\, j \in [\![1, p]\!], \quad \mathrm{coeff}_{i,j}(A) = \mathrm{coeff}_{i,j}(B)$
* $A = B \iff \forall\, i \in [\![1, n]\!], \quad \mathrm{Ligne}_i(A) = \mathrm{Ligne}_i(B)$
* $A = B \iff \forall\, j \in [\![1, p]\!], \quad \mathrm{Col}_j(A) = \mathrm{Col}_j(B)$

Addition, multiplication par un scalaire

4 **Définition (opérations sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)**
L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est muni de deux lois, une loi interne $+$ et une loi externe $\cdot$

- Pour $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la matrice $A+B$ est définie par

$$\text{coeff}_{i,j}(A+B) \;=\; \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

visuellement

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1p}+b_{1p} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2p}+b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{np}+b_{np} \end{bmatrix}$$

- Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la matrice $\lambda \cdot A$ est définie par

$$\text{coeff}_{i,j}(\lambda \cdot A) \;=\; \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

visuellement

$$\lambda \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1p} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{np} \end{bmatrix}$$

- Soit $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ deux matrices.

  Une combinaison linéaire de A et B est une matrice de la forme $\lambda \cdot A + \mu \cdot B$ où λ et μ sont des scalaires.

- Soit $M_1, \dots, M_s \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices.

  Une combinaison linéaire de $M_1, \dots, M_s$ est une matrice de la forme $\lambda_1 M_1 + \cdots + \lambda_s M_s$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ sont des scalaires.

5 **Définition (matrices élémentaires).**
Une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est *élémentaire* lorsqu'elle contient un seul coefficient non nul, qui vaut 1.

Lorsque le format est sous-entendu, on note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire avec un 1 en position (i,j) et des 0 ailleurs (sinon, on la note $E_{i,j}^{(n,p)}$) :

$$E_{ij} \;=$$

Autrement dit,

$$\forall\, k \in [\![\dots]\!], \quad \forall\, \ell \in [\![\dots]\!], \quad \text{coeff}_{k,\ell}(E_{ij}) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{si } \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

6 **Fait.** Toute matrice est combinaison linéaire des matrices élémentaires, et l'écriture est unique. Précisément, pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$, on a

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

c'est-à-dire, avec le symbole Σ

$$A = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

- Par exemple, la matrice P du triangle de Pascal de taille $n+1$ s'écrit

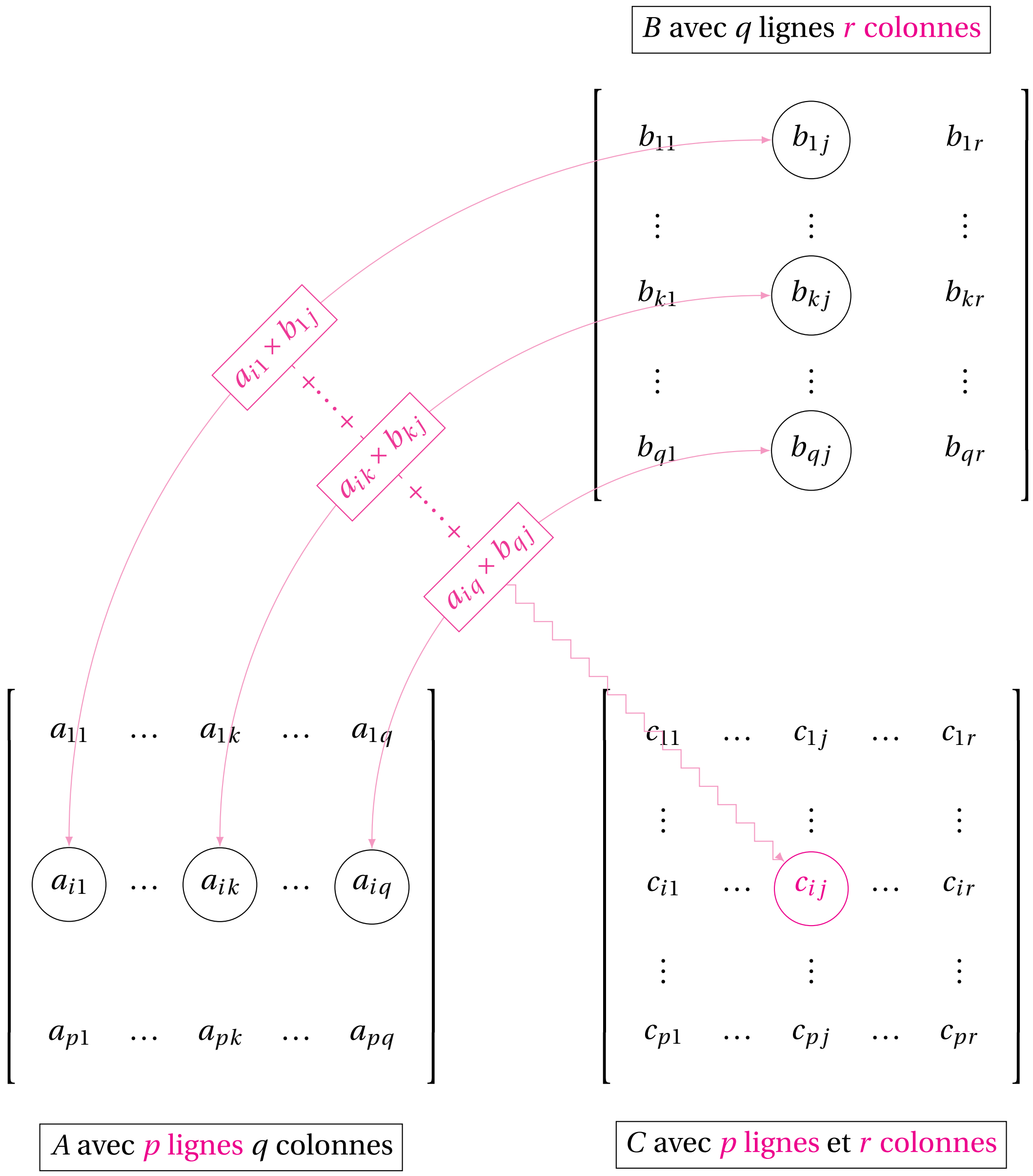
$$P = \sum_{(i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2} \binom{i-1}{j-1} E_{i,j} = \sum_{j \leqslant i} \binom{i-1}{j-1} E_{i,j}$$

7 **Question.** On note $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Soit $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Montrer que M est combinaison linéaire des matrices $E_{1,1}$, $E_{2,2}$, S et A.

Produit matriciel

Considérons $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$.
Définissons $C \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$ de la façon suivante :



Autrement dit,

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} + \cdots + a_{iq}b_{qj}$$

8 **Définition (produit matriciel)**
Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$.
Le produit de A par B, noté AB, est la matrice de $\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$ définie par

$$\text{coeff}_{i,j}(AB) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

- Pour pouvoir multiplier, on doit avoir *compatibilité des formats*, c'est-à-dire une formule du type « Chasles » :

$$\text{matrice-de-taille-}(p,q) \;\times\; \text{matrice-de-taille-}(q,r) \;=\; \text{matrice-de-taille-}(p,r)$$

- Le produit de deux matrices carrées de taille n est une matrice carrée de taille n :

$$\forall\, A,B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad AB \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

  On dit que l'ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est stable par produit.

- Pour une matrice *carrée*, on peut définir ses puissances :

$$A^0 = I_n \qquad A^1 = A \qquad A^2 = AA \qquad A^3 = AAA \qquad \text{etc.}$$

  Autrement dit, on pose $\quad \forall\, k \in \mathbb{N},\ A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{k \text{ fois}}$.

- Si $A \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{K})$, alors AB est carrée de taille 2 et BA est carrée de taille 3.
  Ainsi, $\cancel{AB = BA}$.

- Même avec des matrices A, B carrées de même taille, $\cancel{AB = BA}$. En effet :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \text{versus} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

  donc pour obtenir un exemple de matrices A, B telles que $AB \neq BA$, il suffit de prendre ....

9 **Proposition (propriétés du produit matriciel)**

1. Associativité :

$$\forall\, A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \quad \forall\, B \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K}), \quad \forall\, C \in \mathscr{M}_{r,s}(\mathbb{K}), \quad A(BC) = (AB)C$$

2. Distributivité de $\times$ sur $+$:

$$\forall\, A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \quad \forall\, B,C \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K}), \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \quad A(B+C) \;=\; AB \;+\; AC$$

3. Lois $\cdot$ et $\times$:

$$\forall\, A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \quad \forall\, B \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K}), \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda\cdot(AB) \;=\; (\lambda\cdot A)B \;=\; A(\lambda\cdot B)$$

4. Multiplication par l'identité :

$$\forall\, A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \qquad AI_q \;=\; A \quad \text{et} \quad I_pA \;=\; A$$

   En particulier, $\qquad \forall\, A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad AI_n \;=\; I_nA \;=\; A$

- En Spé, vous apprendrez que l'application suivante est bilinéaire :

$$\Psi : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{p,r}(\mathbb{K}) \\ (A,B) & \longmapsto & AB \end{array}$$

  ce qui signifie que pour tous $A, A' \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B, B' \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$, on a :

$$\Psi(\lambda A + \lambda' A', B) \;=\; \lambda \Psi(A,B) \;+\; \lambda' \Psi(A',B) \quad \text{et} \quad \Psi(A, \lambda B + \lambda' B') \;=\; \lambda \Psi(A,B) \;+\; \lambda' \Psi(A,B')$$

  ce qui traduit par :

$$(\lambda A + \lambda' A')B = \lambda AB + \lambda' A'B \quad \text{et} \quad A(\lambda B + \lambda' B') = \lambda AB + \lambda' AB'$$

  et qui est la traduction des points 2. et 3. de la proposition précédente.

10 **Question.**
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice s'écrivant $A = CL$ avec $(C, L) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.
Montrer qu'il existe un scalaire λ tel que $A^2 = \lambda A$.

11 **La remarque la plus importante de ce chapitre !**

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \qquad \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \qquad \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \qquad \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

12 **Proposition (produit d'une matrice par une colonne).**
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Le produit de A par la colonne $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ ayant un 1 en $i^{\text{ème}}$ position est $\mathrm{Col}_i(A)$.
- Le produit de A par la matrice colonne $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$ est la colonne $\sum_{i=1}^{p} x_i \mathrm{Col}_i(A)$. Dit autrement :

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = x_1\mathrm{Col}_1(A) + \cdots + x_p\mathrm{Col}_p(A)$$

♡ **Pour une colonne X, la colonne AX est une combinaison linéaire des colonnes de A** ♡

13 **Question super méga importante.**

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. Comment traduire matriciellement $\mathrm{Col}_1(A) - 2\mathrm{Col}_2(A) + \mathrm{Col}_3(A) = 0$?

14 **Proposition (interprétation du produit matriciel en lignes/colonnes)**
Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$.

— La $i^{\text{ème}}$ ligne de AB s'exprime en fonction de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A et de B

$$\text{Ligne}_i(AB) = \text{Ligne}_i(A)B$$

Ainsi, la matrice AB est la matrice dont les lignes sont $\text{Ligne}_1(A)B, \dots, \text{Ligne}_p(A)B$.

— La $j^{\text{ème}}$ colonne de AB s'exprime en fonction de A et de la $j^{\text{ème}}$ colonne de B :

$$\text{Col}_j(AB) = A\text{Col}_j(B)$$

Ainsi, la matrice AB est la matrice dont les colonnes sont $A\text{Col}_1(B), \dots, A\text{Col}_r(B)$.

Question.

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix} =$ d'où $E_{12}A$ est la matrice ayant pour lignes ...

$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$ d'où AE_{13} est la matrice ayant pour colonnes ...

15 **Proposition (produit d'une matrice avec une matrice élémentaire)**
Soit A une matrice et E_{ij} une matrice élémentaire. Sous couvert de compatibilité des formats :

$$E_{ij}A \text{ est la matrice ayant pour lignes } \begin{cases} \text{Ligne}_j(A) & \text{en ligne } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$AE_{ij} \text{ est la matrice ayant pour colonnes } \begin{cases} \text{Col}_i(A) & \text{en colonne } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Autrement dit :

$$\text{Ligne}_\ell(E_{ij}A) = \begin{cases} \text{Ligne}_j(A) & \text{si } \ell = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \text{Col}_c(AE_{ij}) = \begin{cases} \text{Col}_i(A) & \text{si } c = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

16 **Question.**
Dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{K})$, calculer les produits des matrices élémentaires $E_{2,3}E_{1,4}$, puis $E_{2,3}E_{3,4}$, puis $E_{4,1}E_{1,2}$.

17 **Proposition (produit de deux matrices élémentaires).**
Lorsque les tailles des matrices rendent licite le produit matriciel, on a :

$$E_{i,j}\,E_{k,\ell} = \delta_{j,k}\,E_{i,\ell} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad E_{i,j}\,E_{k,\ell} = \begin{cases} E_{i,\ell} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Pour a, b, c des objets mathématiques comparables (par exemple des entiers), le symbole de Kronecker vérifie
$$\delta_{a,b}\delta_{b,c} \;=\; \delta_{a,c}\delta_{c,b} \;=\; \delta_{b,a}\delta_{a,c}$$
En effet,
$$\begin{cases} 1 & \text{si } a = b = c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{est égal à} \quad \begin{cases} 1 & \text{si } a = c = b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{est égal à} \quad \begin{cases} 1 & \text{si } b = a = c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
- En notant q le format commun à E_{ij} et $E_{k\ell}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{coeff}_{a,b}(E_{ij}E_{k\ell}) &= \sum_{c=1}^{q} \mathrm{coeff}_{a,c}(E_{ij})\,\mathrm{coeff}_{c,b}(E_{k\ell}) \\
&= \sum_{c=1}^{q} \delta_{a,i}\delta_{c,j}\delta_{c,k}\delta_{b,\ell} \\
&= \delta_{a,i}\delta_{b,\ell} \sum_{c=1}^{q} \underbrace{\delta_{j,c}\delta_{c,k}}_{\delta_{c,j}\delta_{j,k}} \\
&= \delta_{j,k}\delta_{a,i}\delta_{b,\ell} \sum_{c=1}^{q} \delta_{c,j} \\
&= \delta_{j,k}\delta_{a,i}\delta_{b,\ell} \times 1 \\
&= \delta_{j,k}\,\mathrm{coeff}_{a,b}(E_{i,\ell}) \\
&= \mathrm{coeff}_{a,b}(\delta_{j,k}\,E_{i,\ell})
\end{aligned}$$

18 **Attention !**

- Le produit matriciel n'est **pas** commutatif, c'est-à-dire pour A, B multipliables, $AB \cancel{=} BA$
- Il n'y a **pas** de propriété « d'intégrité », c'est-à-dire pour A, B multipliables,
$$AB = 0 \quad \cancel{\Longrightarrow} \quad A = 0 \ \text{ ou } \ B = 0$$
- Il n'y a **pas** de propriété « de simplification », c'est-à-dire pour M, N multipliables avec A,
$$AM = AN \quad \cancel{\Longrightarrow} \quad M = N \qquad\qquad MA = NA \quad \cancel{\Longrightarrow} \quad M = N$$
- Il existe des éléments nilpotents, c'est-à-dire des matrices *non nulles* ayant une certaine puissance nulle. Soit A carrée et $k \geqslant 2$
$$A^k = 0 \quad \cancel{\Longrightarrow} \quad A = 0$$

19 **Question.** Soit $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Montrer

$$\Big(\forall X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}),\ AX = BX\Big) \implies A = B$$

En particulier

$$\Big(\forall X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}),\ AX = 0\Big) \implies A = 0$$

Transposition

Soit $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$. On définit la transposée de A comme étant $A^\top = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$.

20 **Définition (matrice transposée)**
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
La transposée de A est la matrice de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, notée $A^\top$, définie par

$$\forall\, i \in [\![1,p]\!],\ \forall\, j \in [\![1,n]\!], \quad \operatorname{coeff}_{i,j}(A^\top) = \operatorname{coeff}_{j,i}(A)$$

- Pour une matrice *carrée*, que vaut la diagonale de la transposée ?

21 **Proposition (propriétés de la transposition)**

1. La transposition « traverse les combinaisons linéaires »

$$\forall\, A,B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad \forall\, \lambda,\mu \in \mathbb{K}, \qquad (\lambda A + \mu B)^\top = \lambda A^\top + \mu B^\top$$

2. La transposition « permute » le produit matriciel :

$$\forall\, A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \quad \forall\, B \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K}), \qquad (AB)^\top = B^\top A^\top$$

3. On a $\qquad \forall\, A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad (A^\top)^\top = A$

22 **Question.** Soit A carrée à coefficients réels. Montrer que $AA^\top = 0 \implies A = 0$.

Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice

23 **Définition (opérations élémentaires T-D-P)** Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On appelle *opération élémentaire* sur les lignes de A l'une des trois opérations suivantes :

- ⋆ $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, appelée *transvection*;
- ⋆ $L_i \leftarrow \mu L_i$, avec $\mu \in \mathbb{K}^*$, appelée *dilatation*;
- ⋆ $L_i \leftrightarrow L_j$, appelée *échange* (ou *permutation*).

- On a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ p & q & r & s \\ t & u & v & w \end{bmatrix} =$$

Bilan : effectuer $L_2 \leftarrow L_2 + 7L_4$ sur une matrice revient à la multiplier *à gauche* par $I + 7E_{24}$.

- On a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ p & q & r & s \\ t & u & v & w \end{bmatrix} =$$

Bilan : effectuer $L_3 \leftarrow 8L_3$ sur une matrice revient à la multiplier *à gauche* par ...

- On a

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ p & q & r & s \\ t & u & v & w \end{bmatrix} =$$

Effectuer $L_1 \leftrightarrow L_4$ sur une matrice revient à la multiplier *à gauche* par ...

24 **Définition (matrices d'opérations élémentaires T-D-P).**

- ⋆ On appelle *matrice de transvection* toute matrice *carrée* de la forme :

$$T_{i,j,\lambda} = I + \lambda E_{i,j} \quad \text{où } i \neq j \text{ et } \lambda \in \mathbb{K}.$$

- ⋆ On appelle *matrice de dilatation* toute matrice *carrée* de la forme :

$$D_{i,\mu} = I + (\mu - 1)E_{i,i} \quad \text{où } \mu \in \mathbb{K}^*$$

- ⋆ On appelle *matrice de permutation* toute matrice *carrée* de la forme :

$$P_{i,j} = I - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i} \quad \text{où } i \neq j$$

25 **Proposition.** Effectuer une opération élémentaire sur les *lignes* de A revient à multiplier A *à gauche* par la matrice d'opération élémentaire correspondante :

- ⋆ $T_{i,j,\lambda}A$ est obtenue à partir de A par la transvection $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$;
- ⋆ $D_{i,\mu}A$ est obtenue à partir de A par la transvection $L_i \leftarrow \mu L_i$;
- ⋆ $P_{i,j}A$ est obtenue à partir de A par la permutation $L_i \leftrightarrow L_j$.

26 **Question.** Soit $A \in \mathscr{M}_5(\mathbb{K})$. Comment interpréter le produit matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{9} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} A$$

II. Matrices carrées

Matrice symétrique et matrice antisymétrique

27 **Définition.** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

— On dit que A est symétrique lorsque $A^\top = A$

Une matrice est symétrique lorsqu'elle est égale à sa transposée.

On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques.

— On dit que A est antisymétrique lorsque $A^\top = -A$

Une matrice est antisymétrique lorsqu'elle est égale à l'opposé de sa transposée.

On note $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

- Voici une matrice symétrique de taille 3 et une matrice antisymétrique de taille 3 :

- Quid d'une matrice à la fois symétrique et antisymétrique ?
- On remarque que
  — la diagonale d'une matrice symétrique est ...
  — la diagonale d'une matrice antisymétrique est ...

28 **Proposition (caractérisation de la (anti)symétrie avec les coefficients)**
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a les équivalences :

$$A \text{ est symétrique} \iff \forall\, i,j \in [\![1,n]\!],\ a_{ij} = a_{ji}$$

$$A \text{ est antisymétrique} \iff \forall\, i,j \in [\![1,n]\!],\ a_{ij} = -a_{ji}$$

29 **Proposition.**
Les ensembles $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ contiennent la matrice nulle et ils sont stables par combinaison linéaire.

30 **Proposition (décomposition symétrique+antisymétrique).**
Toute matrice carrée s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

$$\forall\, M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \exists!\,(S,A) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \times \mathscr{A}_n(\mathbb{K}), \quad M = S + A$$

31 **Définition.**
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

— A est scalaire lorsque $A = \lambda I$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$.

— A est diagonale lorsque $\forall\, i \neq j, a_{ij} = 0$.

— A est triangulaire supérieure lorsque $\forall\, i > j,\ a_{ij} = 0$.

— A est triangulaire inférieure lorsque $\forall\, i < j,\ a_{ij} = 0$.

— A est triangulaire supérieure stricte lorsque $\forall\, i \geqslant j,\ a_{ij} = 0$.
(triangulaire supérieure à diagonale nulle)

— A est triangulaire inférieure stricte lorsque $\forall\, i \leqslant j,\ a_{ij} = 0$.
(triangulaire inférieure à diagonale nulle)

- On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales de taille n.
- On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) de taille n.
- Une matrice diagonale est une matrice à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure.
- La transposée d'une matrice triangulaire supérieure et une matrice triangulaire inférieure.
- Voici deux matrices triangulaires supérieures de taille 3 :

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad A' = \begin{bmatrix} a' & b' & c' \\ 0 & d' & e' \\ 0 & 0 & f' \end{bmatrix}$$

On a

$\lambda A + \lambda' A' =$

$AA' =$

32 **Proposition (stabilité par combinaison linéaire et produit)**

1. L'ensemble des matrices triangulaires supérieures est stable par combinaison linéaire et par produit.
2. idem avec les matrices triangulaires inférieures.
3. idem avec les matrices diagonales.
4. idem avec les matrices triangulaires supérieures strictes.
5. idem avec les matrices triangulaires inférieures strictes.

Trace d'une matrice carrée

33 **Définition.**
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit la trace de A, notée $\mathrm{tr}(A)$, comme étant le scalaire :

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \qquad \text{ou encore} \qquad \mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{coeff}_{ii}(A)$$

La trace d'une matrice carrée est la somme des coefficients de sa diagonale.

34 **Proposition (propriétés de la trace)**

- La trace « traverse les combinaisons linéaires ».

$$\forall\, A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \qquad \mathrm{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \mathrm{tr}(A) + \mu \mathrm{tr}(B)$$

- La trace oublie la non-commutativité du produit matriciel.

$$\forall\, A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$$

- La trace d'une matrice carrée est la même que la trace de sa transposée.

$$\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \mathrm{tr}(A^\top) = \mathrm{tr}(A)$$

35 **Question.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer l'implication

$$\Big(\forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \mathrm{tr}(AM) = 0\Big) \quad \Longrightarrow \quad A = 0$$

Calculs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est stable pour le produit matriciel c'est-à-dire : $\forall\, A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\quad AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
Ainsi, pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut définir ses puissances par récurrence :

$$A^0 = I_n \qquad A^1 = A \qquad A^2 = AA \qquad A^3 = AAA \qquad \text{etc.} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N},\ A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{k \text{ fois}}$$

36 **Question.** On note J la matrice carrée pleine de 1 de taille n. Pour $k \in \mathbb{N}$, déterminer J^k.

37 **Définition.**
Une matrice N est dite *nilpotente* s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $N^k = 0$.

- La matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ est nilpotente, car $A^2 = 0$.
- La matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ est nilpotente, car $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ puis $A^3 = 0$.
- Parmi les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:
  — si $i \neq j$, alors $E_{i,j}^2 = 0$, donc $E_{i,j}$ est nilpotente.
  — pour tout i, on a $E_{i,i}^2 = E_{i,i}$, et une récurrence donne $\quad \forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ E_{i,i}^k = E_{i,i} \neq 0$.
  Donc E_{ii} n'est pas nilpotente.
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid A^k = 0\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc possède un plus petit élément k_0.
  Cet entier k_0 est appelée *l'indice de nilpotence* de A. Il vérifie :

$$\forall\, k \in [\![0, k_0 - 1]\!],\ A^k \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \geqslant k_0 + 1,\ A^k = \underbrace{A^{k_0}}_{=0} A^{k-k_0} = 0.$$

38 **Proposition (binôme de Newton et identité de Bernoulli)**
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$\boxed{\boxed{\text{Si } A \text{ et } B \text{ commutent}}}$, alors

....

et

....

- Toute matrice carrée commute avec l'identité !

39 **Question.** Soit $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III. Matrices inversibles

40 **Définition.**

— Une matrice *carrée* A est inversible lorsqu'il existe une matrice carrée B telle que $\begin{cases} AB = I \\ BA = I \end{cases}$

— Si une telle matrice B existe, elle est unique, et est notée A^{-1}.

— On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées inversibles de taille n.

Remarques importantes.

- Cela n'a pas de sens de parler de l'inversibilité d'une matrice non carrée.
- Soit A carrée. S'il existe B telle que $AB = I$, rien ne dit que $BA = I$.
  Autrement dit, si A est inversible à droite, alors rien ne dit que A est inversible à gauche.
  Sauf qu'en 2023, on a apprendra un théorème qui stipule :
  > *Si A est inversible à droite, alors A est inversible à gauche, et l'inverse à gauche est le même que l'inverse à droite.*

  (idem en échangeant droite et gauche).
  Pour l'instant, on va essayer (et on va le faire) de se passer de ce résultat.
- Soit $A, M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
  Si A est inversible, on a $\quad AM = N \iff M = A^{-1}N.$
- La matrice identité I est inversible. WHY ? Que vaut son inverse ?
- La matrice nulle 0 n'est pas inversible. WHY ?
- A quelle condition une matrice carrée de taille 1, disons $A = [\lambda]$, est-elle inversible ?

41 **Condition suffisante de non-inversibilité.**

- Si l'équation $AX = 0$ admet une autre solution que la colonne nulle, alors A n'est pas inversible.
- La matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ n'est pas inversible. WHY ?
- S'il existe une relation de liaison non triviale entre les colonnes de A, alors A n'est pas inversible.
- S'il existe une colonne de A qui est combinaison linéaire des autres, alors A n'est pas inversible.
- Si une matrice A possède une colonne nulle, alors A n'est pas inversible. La réciproque est fausse !

42 **Proposition (matrice diagonale et inversibilité)**
Une matrice diagonale est inversible si et seulement si elle n'a aucun 0 sur sa diagonale.

Plus précisément, pour $D = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix}$ diagonale de taille n, on a l'équivalence

$$\begin{aligned} D \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \quad &\iff \quad \forall\, i \in [\![1, n]\!],\ d_i \neq 0 \\ &\iff \quad \prod_{i=1}^{n} d_i \neq 0 \end{aligned}$$

Dans ce cas, on a $D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{d_n} \end{bmatrix}$

43 **Proposition (propriétés de l'inverse).**

— **inverse**
Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.
L'inverse d'une matrice inversible est inversible.

— **produit** — chaussettes et chaussures —
Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
Le produit de deux matrices inversibles est inversible et l'inverse du produit est le produit des inverses.

— **puissance**
Si A est inversible, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice A^k est inversible et $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.
Une puissance d'une matrice inversible est inversible et l'inverse de la puissance est la puissance de l'inverse.

— **transposée**
Si A est inversible, alors $A^\top$ est inversible et on a $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.
La transposée d'une matrice inversible est inversible et la transposée de l'inverse est l'inverse de la transposée.

44 **Proposition (inversibilité des matrices de taille 2).**
Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ une matrice carrée de taille 2. On a l'équivalence

$$A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K}) \iff ad - bc \neq 0$$

Dans ce cas, $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Preuve. On va utiliser le **lemme** suivant (que je vous laisse prouver) :

Pour une matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ quelconque carrée de taille 2, on a l'égalité

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = 0$$

45 **Lien entre matrice carrée et système linéaire carré**

- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Si A est inversible, l'équation $AX = 0$ d'inconnue X admet une unique solution, à savoir $X = 0$.
- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et Y une colonne de taille n.
Si A est inversible, alors pour toute colonne X de taille n, on a $AX = Y \iff X = A^{-1}Y$.

Si A est inversible, alors l'équation $AX = Y$ d'inconnue X admet une unique solution, à savoir $X = A^{-1}Y$

- Rappel de septembre.
Soit $s, d \in \mathbb{R}$ fixé. Montrons qu'il existe un unique couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant le système $\begin{cases} x + y = s \\ x - y = d \end{cases}$.

En posant $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ et $Y = \begin{bmatrix} s \\ d \end{bmatrix}$ cela revient à montrer :

il existe une unique colonne $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ telle que $AX = Y$.

Comme A est inversible (son déterminant $1 \times (-1) - 1 \times 1$ est $\neq 0$), il existe une unique colonne X à savoir $X = A^{-1}Y$.
Bonus : on peut exprimer la solution X en déterminant A^{-1}.

On a $A^{-1} = \dfrac{1}{-2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Ainsi X, qui vaut $A^{-1}Y$, vaut $X = \begin{bmatrix} \dfrac{s+d}{2} \\ \dfrac{s-d}{2} \end{bmatrix}$.

Inversibilité et opérations élémentaires

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Rappel :
  T code l'opération … On peut défaire cette opération en effectuant …
  D code l'opération … On peut défaire cette opération en effectuant …
  P code l'opération … On peut défaire cette opération en effectuant …

- Les matrices T, D, P sont inversibles, WHY ?
  En posant $T' = \dots$, on vérifie que $TT' = I$ et $T'T = I$.
  En posant $D' = \dots$, on vérifie que $DD' = I$ et $D'D = I$.
  En posant $P' = \dots$, on vérifie que $PP' = I$ et $P'P = I$.

$T' =$ $\qquad$ $D' =$ $\qquad$ $P' =$

46 **Proposition.**
Une matrice d'opération élémentaire est inversible.

Preuve. Il y a trois types d'opérations élémentaires.

- Transvection. La matrice $T_{i,j,\lambda}$ est inversible d'inverse …
- Dilatation. La matrice $D_{i,\mu}$ est inversible d'inverse …
- Permutation. La matrice $P_{i,j}$ est inversible d'inverse …

47 **Lemme.**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Soit $\Omega \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ (typiquement une matrice d'opération élémentaire).
On a l'équivalence
$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \Omega A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

- En multipliant A à gauche par une matrice inversible Ω, on ne change pas son caractère inversible. L'équivalence se traduit par une implication et sa contraposée :
$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \implies \Omega A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \qquad \text{et} \qquad A \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \implies \Omega A \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$
- En prenant pour Ω un produit de matrices d'opérations élémentaires (qui est bien une matrice inversible WHY ?), alors le lemme raconte ceci :
  — Si A est *inversible*, alors en effectuant des opérations élémentaires sur ses lignes, la nouvelle matrice obtenue est *inversible*.
  — Si A est *non-inversible*, alors en effectuant des opérations élémentaires sur ses lignes, la nouvelle matrice obtenue est *non-inversible*.
- En français :

En effectuant des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice carrée, on ne change pas son caractère inversible.

- Ici, on a multiplié à gauche, mais on a le même genre d'énoncé à droite.

48 **Proposition (Condition suffisante d'inversibilité et obtention de l'inverse).**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
S'il existe une matrice *inversible* Ω telle que $\Omega A = I$, alors A est inversible et $A^{-1} = \Omega$.

- Rappelons que si on enlève l'hypothèse d'inversibilité sur Ω, on ne peut pas conclure pour l'instant (on pourra en 2023). Autrement dit, le théorème suivant est pour l'instant **hors d'accès** :
  S'il existe une matrice B (quelconque) telle que $BA = I$, alors A est inversible et $A^{-1} = B$.
- Cette proposition nous permet de répondre à des exercices du type :
  « Montrer que la matrice suivante est inversible et déterminer son inverse ».
- En français :

Si en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice carrée A on arrive à faire apparaître la matrice identité I, alors la matrice A est inversible.

Dans ce cas, l'inverse de A s'obtient en faisant subir à la matrice identité I les mêmes opérations élémentaires.

- Pour comprendre la fin de l'encadré, il faut voir A^{-1} comme ΩI : autrement dit, on fait subir les opérations codées par Ω à la matrice identité.
- La réciproque est également vraie (cf. preuve à venir dans quelques pages) :

Si A est inversible, alors on peut transformer A en l'identité I en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes.

Dans ce cas, l'inverse de A s'obtient en faisant subir à la matrice identité I les mêmes opérations élémentaires.

49 **Exemple.**

Montrons que la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ inversible et déterminons son inverse.

Effectuons des opérations élémentaires sur les lignes de A et parallèlement sur les lignes de I.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 + L_1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 &\leftarrow L_2 - 2L_3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -7 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow \tfrac{1}{2} L_2$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -7/2 & 5/2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

D'après la proposition « condition suffisante d'inversibilité et obtention de l'inverse », on en déduit que A et inversible et $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -7/2 & 5/2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Question subsidiaire. Que vaut le produit de ces 7 = 6+1 matrices ?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

50 sol → 41 **Question.**

Montrer que $Z = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

Inversibilité et échelonnement d'une matrice triangulaire

51 **Proposition (inversibilité d'une matrice triangulaire)**
Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si elle n'a aucun 0 sur sa diagonale.

Plus précisément, pour $T = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & \text{quelque} & \\ & \alpha_2 & & \text{chose} \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{bmatrix}$ triangulaire supérieure de taille n, on a :

$$\begin{aligned} T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) & \iff \forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \alpha_i \neq 0 \\ & \iff \prod_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0 \end{aligned}$$

Dans ce cas, $T^{-1} = \ldots$

En particulier, T^{-1} est également triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont les inverses de ceux de T.

- Idem avec triangulaire inférieure.
- On remarque que l'on n'a pas de *formule* explicite pour T^{-1}, mais on a une *forme* pour T^{-1}.
- **Preuve de** $\boxed{\Leftarrow}$
  Supposons les coefficients diagonaux de T non nuls.
  On peut effectuer des opérations élémentaires sur les lignes ce qui ne change pas le caractère inversible de T.
  En effectuant les dilatations $L_i \leftarrow \dfrac{1}{\alpha_i} L_i$ (licite, WHY?), on rend les coefficients diagonaux de T égaux à 1.
  On se ramène donc à montrer qu'une matrice triangulaire supérieure à diagonale unité est inversible. Notons encore T cette matrice.
  En effectuant des transvections du type $L_i \leftarrow L_i - t_{i,n} L_n$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, on annule, dans la dernière colonne, tous les coefficients au-dessus de la diagonale et les autres coefficients de T sont inchangés.
  On fait de même avec la colonne $n-1$. Puis avec la colonne $n-2$ etc. jusqu'à la colonne 2.
  On finit par obtenir la matrice identité qui est inversible.
  La matrice initiale T est donc inversible (car effectuer des opérations élémentaires ne change pas le caractère inversible).
- **Preuve de** $\boxed{\Rightarrow}$ Par contraposée.
  Supposons qu'il existe un coefficient nul sur la diagonale.
  Posons $i_0 = \min\{i \in [\![1, n]\!] \mid \alpha_i = 0\}$. C'est licite de considérer un tel i_0, WHY?
  En effectuant des opérations élémentaires comme précédemment, on peut rendre le bloc carré en haut à gauche (entre les indices 1 et $i_0 - 1$) égal à l'identité, sans changer le caractère inversible de T.
  On effectue maintenant des opérations élémentaires sur la *colonne* i_0, sans changer le caractère inversible de T :
  $$\forall\, i \in [\![1, i_0 - 1]\!], \quad C_{i_0} \leftarrow C_{i_0} - t_{i,i_0} C_i$$
  Après ces opérations, la colonne i_0 est nulle.
  La dernière matrice obtenue n'est donc pas inversible, et donc la matrice initiale T ne l'est pas non plus.
- Pour la forme de T^{-1}.
  Supposons T inversible. En reprenant la preuve de $\Leftarrow$, on constate qu'il existe une matrice Ω produit de matrices de dilatations et de transvections $T_{ij\lambda}$ avec $i < j$ telle que $\Omega T = I$, donc $T^{-1} = \Omega$.
  Reste à montrer que Ω est de la forme annoncée pour T^{-1}, c'est-à-dire triangulaire supérieure avec des $\frac{1}{\alpha_i}$ sur la diagonale.
  Comme une matrice de dilatation est diagonale (donc triangulaire supérieure), et comme une matrice de transvection $T_{ij\lambda}$ **avec $i < j$** est triangulaire supérieure, on en déduit par produit de telles matrices que Ω est triangulaire supérieure.
  Enfin, la diagonale $I = \Omega T$ est le produit des diagonales de Ω et T (WHY?), d'où la forme de la diagonale de Ω.

De la dernière remarque, on déduit :

52 **Lemme (échelonnement d'une matrice triangulaire inversible).** Notons $\mathscr{E}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices qui s'écrivent comme un produit de matrices d'opérations élémentaires.
Soit $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \cap \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ une matrice inversible et triangulaire supérieure. Alors

$$\exists \Omega \in \mathscr{E}_n(\mathbb{K}) \cap \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K}), \quad \Omega T = I$$

- En particulier, $T^{-1} = \Omega$, donc T^{-1} est une matrice triangulaire supérieure et ses éléments diagonaux sont égaux aux inverses des éléments diagonaux de T.

53 **Question.**

1. Montrer que la matrice $T = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ est inversible et déterminer T^{-1}.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. A quelle condition la matrice $A_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-3) \end{bmatrix}$ est-elle inversible ?

54 **Lemme (échelonnement d'une matrice quelconque en une matrice triangulaire).**
Notons $\mathscr{E}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices qui s'écrivent comme un produit de matrices d'opérations élémentaires.
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :
$$\exists \Omega \in \mathscr{E}_n(\mathbb{K}), \quad \exists T \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K}), \quad \Omega A = T$$
et on a :
$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

- La preuve se fait par récurrence sur la taille n.
- En français :

> En effectuant des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice **carrée** A, on peut la transformer en une matrice **triangulaire** supérieure T.
>
> Le caractère inversible de A est alors gouverné par la diagonale de T.

- Ce résultat nous permet de répondre à des exercices du type
« La matrice suivante est-elle inversible, si oui déterminer son inverse ».

On peut maintenant en déduire

55 **Lemme (échelonnement d'une matrice inversible).**
Notons $\mathscr{E}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices qui s'écrivent comme un produit de matrices d'opérations élémentaires.
Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible. Alors
$$\exists \Omega \in \mathscr{E}_n(\mathbb{K}), \quad \Omega A = I$$
En particulier, $A^{-1} = \Omega$.

- **Preuve.** D'après 54, il existe $\Omega_1 \in \mathscr{E}_n(\mathbb{K})$ et $T \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ deux matrices telles que $\Omega_1 A = T$.
Comme A est inversible, T est aussi inversible.
On peut alors appliquer le point 52 à la matrice T qui est inversible et triangulaire supérieure.
Il existe alors $\Omega_2 \in \mathscr{E}_n(\mathbb{K})$ une matrice telle que $\Omega_2 T = I$.
D'où $\Omega_2 \Omega_1 A = I$.
La matrice $\Omega = \Omega_2\Omega_1$ est bien dans $\mathscr{E}_n(\mathbb{K})$ (en effet, Ω_1 et Ω_2 sont des produits de matrices d'opérations élémentaires, donc Ω est elle-même un produit de telles matrices).
- En français :

> Si A est inversible, alors on peut transformer A en l'identité I en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes.
>
> Dans ce cas, l'inverse de A s'obtient en faisant subir à la matrice identité I les mêmes opérations élémentaires.

56 **Question.**
sol → 41

1. La matrice $V = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -13 & 2 \\ 2 & -9 & -47 & 16 \\ -4 & 10 & 38 & 1/3 \\ 0 & 1 & 7 & -4 \end{bmatrix}$ est-elle inversible ?
2. À quelle condition sur $x \in \mathbb{R}$, la matrice $B_x = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & x \end{bmatrix}$ est-elle inversible ?

On utilise le point clé suivant :

> En effectuant des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice carrée, on peut la transformer en une matrice triangulaire, sans changer son caractère inversible.
>
> L'inversibilité se lit alors à l'œil nu sur la diagonale de la matrice triangulaire obtenue

On effectue des opérations élémentaires sur les lignes de B_x ce qui ne change pas son caractère inversible.

$$B_x = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ . & -3 & -6 \\ 7 & 8 & x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ . & -3 & -6 \\ . & -6 & x-21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ . & 1 & 2 \\ . & -6 & x-21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ . & 1 & 2 \\ . & . & x-9 \end{bmatrix}$$

On a donc l'équivalence :

$$B_x \text{ inversible} \iff \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ . & 1 & 2 \\ . & . & x-9 \end{bmatrix} \text{ inversible}$$

On utilise maintenant le critère d'inversibilité pour les matrices triangulaires supérieures :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ . & 1 & 2 \\ . & . & x-9 \end{bmatrix} \text{ inversible} \iff x-9 \neq 0$$

Bilan :

$$B_x \text{ inversible} \iff x \neq 9$$

Inversibilité et systèmes linéaires carrés

57 **Rappel.** Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles quelconques.

- *Définition.* On dit que $f : E \to F$ est bijective lorsque

pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ admet une unique solution

$$\forall\, y \in F, \quad \exists!\, x \in E, \quad f(x) = y$$

- *Théorème.* On a l'équivalence

$$f \text{ est bijective} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, g : F \to E \text{ telle que } \begin{cases} g \circ f = \mathrm{id}_E \\ f \circ g = \mathrm{id}_F \end{cases}$$

- *Remarque.* On peut avoir $g \circ f = \mathrm{id}$ et $f \circ g \neq \mathrm{id}$.

58 **Nouveauté.** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

- *Définition.* On dit que A est inversible lorsqu'il existe une matrice carrée B telle que $\begin{cases} AB = I \\ BA = I \end{cases}$

- *Théorème à venir.* On a l'équivalence

$$A \text{ est inversible} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad \exists!\, X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad AX = Y$$

- *Remarque.* On ne peut **pas** avoir $AB = I$ et $BA \neq I$, comme nous le verrons en 2023.

59 **Question subsidiaire.**
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $f_A : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$
Existe-t-il un lien entre l'inversibilité de A et la bijectivité de f_A ?

On apprendra en 2023 que f_A est une application linéaire, c'est-à-dire qu'elle traverse les combinaisons linéaires :

$$\forall\, X, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad f_A(\lambda X + \mu Y) = \lambda f_A(X) + \mu f_A(Y)$$

Cette application linéaire f_A s'appelle *l'application linéaire canoniquement associée à la matrice A.*

60 **Théorème (Caractérisation de l'inversibilité en termes de $AX = Y$)**

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \forall\, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\quad \exists!\, X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\quad AX = Y$$

- En posant $\begin{array}{rccc} f_A : & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ & X & \longmapsto & AX \end{array}$, l'équivalence se réécrit :

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \forall\, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\quad \exists!\, X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\quad \boldsymbol{f_A(X) = Y}$$

ou encore

$$A \text{ inversible} \iff f_A \text{ bijective}$$

- Voilà ce que dit l'énoncé en français :

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si A est inversible, alors pour tout second membre Y, l'équation $AX = Y$ admet une unique solution, à savoir $X = A^{-1}Y$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si **pour tout** second membre Y, l'équation $AX = Y$ admet une unique solution, alors A est inversible.

- **Preuve.**

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
Montrons que $\quad \forall\, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ \exists!\, X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ AX = Y$

Fixons Y une colonne.
Par hypothèse, A est inversible, donc A^{-1} existe.
Donc l'équation $AX = Y$ d'inconnue X admet une unique solution, à savoir $X = A^{-1}Y$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $\forall\, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ \exists!\, X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ AX = Y$ ou encore supposons que f_A est bijective.

Montrons qu'il existe une matrice carrée B telle que $\begin{cases} AB = I \\ BA = I \end{cases}$.

Idée. On va construire B en colonnes. C'est-à-dire en imposant $\mathrm{Col}_j(B) = $ qq-chose.

— Par *surjectivité* de f_A, la colonne $E_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ (qui est la $j^{\text{ème}}$ colonne de I) est atteinte !

Ainsi, il existe X_j tel que $f_A(X_j) = E_j$ ou encore tel que $AX_j = E_j$.

On construit alors la matrice B comme étant la matrice telle que $\forall\, j \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{Col}_j(B) = X_j$.
On a donc $\forall\, j \in [\![1,n]\!]$, $A\mathrm{Col}_j(B) = \mathrm{Col}_j(I)$ (WHY?).
Donc $AB = I$ (WHY?).

— Reste à vérifier que $BA = I$ (c'est un peu atucieux).
En multipliant par A à droite l'égalité $AB = I$, on a $(AB)A = IA$.
Par associativité du produit matriciel et le fait que A commute avec I, on obtient $A(BA) = A(I)$.
Ainsi (WHY?) :

$$\forall\, j \in [\![1,n]\!],\quad A\mathrm{Col}_j(BA) = A\mathrm{Col}_j(I)$$

Ou encore

$$\forall\, j \in [\![1,n]\!],\quad f_A\big(\mathrm{Col}_j(BA)\big) = f_A\big(\mathrm{Col}_j(I)\big)$$

Par *injectivité* de f_A, on en déduit $\quad \forall\, j \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{Col}_j(BA) = \mathrm{Col}_j(I)$.
D'où (WHY?) $BA = I$.

Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice

- Le théorème précédent permet **à nouveau** de répondre à un exercice du type « la matrice suivante est-elle inversible, si oui, déterminer son inverse ».
- Pour cela, il suffit de se donner une colonne Y (souvent appelée second membre) et de déterminer le **nombre** de colonnes X telles que $AX = Y$.

61 **Question.** La matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.

On utilise la caractérisation de l'inversibilité en termes de $AX = Y$.

Soit un second membre $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ et cherchons le **nombre** de colonnes $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ de l'équation $AX = Y$.

On a les équivalences (WHY ?)

$$AX = Y \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & & + & -x_3 & = & y_1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & y_2 \\ -x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & y_3 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & & + & -x_3 & = & y_1 \\ & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & y_2 - y_1 \\ & + & 4x_2 & + & 5x_3 & = & y_3 + y_1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & & + & -x_3 & = & y_1 \\ & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & y_2 - y_1 \\ & + & & + & x_3 & = & y_3 - 2y_2 + 3y_1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array}$$

à ce stade, on peut dire que A est inversible ;
en effet, on voit facilement que le système admet une unique solution
à cause de l'aspect triangulaire

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & & + & -x_3 & = & y_1 \\ & + & 2x_2 & + & & = & y_2 - y_1 - 2(y_3 - 2y_2 + 3y_1) \\ & + & & + & x_3 & = & y_3 - 2y_2 + 3y_1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & & + & & = & y_1 + (y_3 - 2y_2 + 3y_1) \\ & + & 2x_2 & + & & = & -7y_1 + 5y_2 - 2y_3 \\ & + & & + & x_3 & = & y_3 - 2y_2 + 3y_1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & & + & & = & 4y_1 - 2y_2 + y_3 \\ & + & x_2 & + & & = & \frac{-7}{2}y_1 + \frac{5}{2}y_2 - y_3 \\ & + & & + & x_3 & = & 3y_1 - 2y_2 + y_3 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & 4y_1 & - & 2y_2 & + & y_3 \\ x_2 & = & \frac{-7}{2}y_1 & + & \frac{5}{2}y_2 & - & y_3 \\ x_3 & = & 3y_1 & - & 2y_2 & + & y_3 \end{array} \right.$$

$$\iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ \frac{-7}{2} & \frac{5}{2} & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Ces équivalences montrent que l'équation $AX = Y$ admet une unique solution. Donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ \frac{-7}{2} & \frac{5}{2} & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Autre façon de présenter le calcul.

On a les équivalences (WHY ?)

$$AX = Y \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & & + & -x_3 & = & y_1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & \qquad y_2 \\ -x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & \qquad\qquad y_3 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & & + & -x_3 & = & y_1 & & & & \\ & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -y_1 & + & y_2 & & \\ & + & 4x_2 & + & 5x_3 & = & y_1 & & & + & y_3 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & & + & -x_3 & = & y_1 & & & & \\ & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -y_1 & + & y_2 & & \\ & + & & + & x_3 & = & 3y_1 & + & (-2)y_2 & + & y_3 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array}$$

à ce stade, on peut dire que A est inversible ;
en effet, on voit facilement que le système admet une unique solution à cause de l'aspect triangulaire

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & & + & & = & 4y_1 & + & (-2)y_2 & + & y_3 \\ & + & 2x_2 & + & & = & -7y_1 & + & 5y_2 & + & (-2)y_3 \\ & + & & + & x_3 & = & 3y_1 & + & (-2)y_2 & + & y_3 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rrrcrcrcr} x_1 & & & = & 4y_1 & + & (-2)y_2 & + & y_3 \\ & x_2 & & = & \frac{-7}{2}y_1 & + & \frac{5}{2}y_2 & + & (-1)y_3 \\ & & x_3 & = & 3y_1 & + & (-2)y_2 & + & y_3 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ \frac{-7}{2} & \frac{5}{2} & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Encore une autre façon de présenter le calcul.

$$AX=Y \iff \begin{bmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\-1&4&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix}1&0&-1\\0&2&2\\0&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l}L_2\leftarrow L_2-L_1\\L_3\leftarrow L_3+L_1\end{array}$$

$$\iff \begin{bmatrix}1&0&-1\\0&2&2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\3&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix} \qquad L_3\leftarrow L_3-2L_2$$

à ce stade, on peut dire que A est inversible

$$\iff \begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-2&1\\-7&5&-2\\3&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l}L_1\leftarrow L_1+L_3\\L_2\leftarrow L_2-2L_3\end{array}$$

$$\iff \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-2&1\\\frac{-7}{2}&\frac{5}{2}&-1\\3&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix} \qquad L_2\leftarrow \tfrac{1}{2}L_2$$

On retrouve les calculs faits précédemment :

$$A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\-1&4&6\end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I$$

$$\begin{array}{l}L_2\leftarrow L_2-L_1\\L_3\leftarrow L_3+L_1\end{array}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&2&2\\0&4&5\end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

$$L_3\leftarrow L_3-2L_2$$

$$\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&2&2\\0&0&1\end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\3&-2&1\end{bmatrix}$$

à ce stade, on peut dire que ...

$$\begin{array}{l}L_1\leftarrow L_1+L_3\\L_2\leftarrow L_2-2L_3\end{array}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{bmatrix}4&-2&1\\-7&5&-2\\3&-2&1\end{bmatrix}$$

$$L_2\leftarrow \tfrac{1}{2}L_2$$

$$I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{bmatrix}4&-2&1\\-7/2&5/2&-1\\3&-2&1\end{bmatrix}=A^{-1}$$

IV. Systèmes linéaires

Des exemples

Voici un exemple de système **qui n'est pas** linéaire.

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \cos(x) & & + & z & = & 0 \\ & y & + & z^2 & = & 0 \end{array}\right.$$

62 **Exemple (homogène et échelonné réduit).**
Voici un système linéaire :

$$\mathscr{S} \quad \left\{\begin{array}{cccccc} x & & + & 6z & = & 0 \\ & y & + & 7z & = & 0 \end{array}\right.$$

- L'an dernier, vous avez appris que l'ensemble des triplets vérifiant $\mathscr{S}$ est l'intersection de deux plans, « donc » est une droite. Particularité, cette droite passe par l'origine ; en effet, le triplet $(0,0,0)$ vérifie les deux équations de $\mathscr{S}$.
- L'an dernier, vous avez donné une équation paramétrique de cette droite. Cette équation paramétrique utilise 1 seul paramètre (1, c'est la « dimension » d'une droite).
- Résoudre le système linéaire $\mathscr{S}$, c'est trouver tous les triplets (x, y, z) vérifiant $\mathscr{S}$ et d'en donner une forme paramétrique.
- On a (WHY ?) :

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x & & + & 6z & = & 0 \\ & y & + & 7z & = & 0 \end{array}\right. \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \left[\begin{array}{ccc} x & = & -6\lambda \\ y & = & -7\lambda \\ z & = & \lambda \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions de $\mathscr{S}$ est l'ensemble des triplets de $\mathbb{K}^3$ de la forme $(-6\lambda, -7\lambda, \lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ ou encore l'ensemble :

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid \exists \lambda \in \mathbb{K}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -6 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

63 **Exemple (homogène, quelconque).**
Voici un deuxième système $\mathscr{S}$. On a les équivalences

$$\begin{aligned} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 4x & + & 5y & + & 6z & = & 0 \end{array}\right. &\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ & & (-3)y & + & (-6)z & = & 0 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & & + & (-1)z & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \left[\begin{array}{ccc} x & = & \lambda \\ y & = & -2\lambda \\ z & = & \lambda \end{array}\right. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de $\mathscr{S}$ est l'ensemble des triplets de $\mathbb{K}^3$ de la forme $(\lambda, -2\lambda, \lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$. ou encore l'ensemble :

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid \exists \lambda \in \mathbb{K}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

64 **Question.** Résoudre :

$$\mathscr{S} : \left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & 5x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & & & + & 4x_3 & - & 2x_4 & - & 4x_5 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 7x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

On a les équivalences (WHY ?)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & 5x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & & & + & 4x_3 & - & 2x_4 & - & 4x_5 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 7x_5 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & 5x_5 & = & 0 \\ & & 2x_2 & + & 6x_3 & + & (-4)x_4 & + & (-14)x_5 & = & 0 \\ & & & & & & 2x_4 & + & 12x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

à ce stade, le système est échelonné

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & 5x_5 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & + & (-2)x_4 & + & (-7)x_5 & = & 0 \\ & & & & & & x_4 & + & 6x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

à ce stade, le système est échelonné avec des pivots = 1

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & & - & x_5 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & + & & + & 5x_5 & = & 0 \\ & & & & & & x_4 & + & 6x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & & + & 2x_3 & + & & + & 4x_5 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & + & & + & 5x_5 & = & 0 \\ & & & & & & x_4 & + & 6x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

à ce stade, le système est échelonné réduit (des 0 au-dessus des pivots)

$$\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \left[\begin{array}{rcrcr} x_1 & = & -2\mu & - & 4\lambda \\ x_2 & = & -3\mu & - & 5\lambda \\ x_3 & = & \mu & & \\ x_4 & = & & & -6\lambda \\ x_5 & = & & & \lambda \end{array}\right.$$

$$\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ainsi, les solutions du système $\mathscr{S}$ sont les 5-uplets $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{K}^5$ qui sont de la forme

$$\Big(-2\mu - 4\lambda, \quad -3\mu - 5\lambda, \quad \mu, \quad -6\lambda, \quad \lambda\Big) \qquad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

ou encore de la forme

$$\mu\Big(-2, -3, 1, 0, 0\Big) + \lambda\Big(-4, -5, 0, -6, 1\Big) \qquad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

ou encore qui sont combinaison linéaire de

$$\Big(-2, -3, 1, 0, 0\Big) \qquad \text{et} \qquad \Big(-4, -5, 0, -6, 1\Big)$$

65 **Exemple (avec un second membre).**

Voici un système linéaire $\mathscr{S}\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & -3 \\ 4x & + & 5y & + & 6z & = & 9 \end{array}\right.$

On a les équivalences

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & -3 \\ 4x & + & 5y & + & 6z & = & 9 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & -3 \\ & & (-3)y & + & (-6)z & = & 21 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & -3 \\ & & y & + & 2z & = & -7 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & & + & (-1)z & = & 11 \\ & & y & + & 2z & = & -7 \end{array}\right.$$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \left[\begin{array}{rcrcr} x & = & 11 & + & \lambda \\ y & = & -7 & + & (-2)\lambda \\ z & = & & & \lambda \end{array}\right.$$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ \lambda \end{bmatrix}$$

L'ensemble des solutions de $\mathscr{S}$ est l'ensemble des triplets de $\mathbb{K}^3$ de la forme

$$(11+\lambda,\ -7-2\lambda,\ \lambda) \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{K}$$

ou encore de la forme

$$(11,-7,0) + (\lambda,-2\lambda,\lambda) \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{K}$$

Les définitions

On appelle *système linéaire* de n équations à p inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p$ tout système du type :

$$\mathscr{S} : \begin{cases} a_{1,1}\, x_1 + a_{1,2}\, x_2 + \cdots + a_{1,j}\, x_j + \cdots + a_{1,p}\, x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{i,1}\, x_1 + a_{i,2}\, x_2 + \cdots + a_{i,j}\, x_j + \cdots + a_{i,p}\, x_p = b_i \\ \vdots \\ a_{n,1}\, x_1 + a_{n,2}\, x_2 + \cdots + a_{n,j}\, x_j + \cdots + a_{n,p}\, x_p = b_n \end{cases}$$

avec $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ et $(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$.

- Les $a_{i,j}$ sont appelés *coefficients* du système.
- Le n-uplet $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ est appelé *second membre* du système.
- On appelle *solution du système* tout p-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ vérifiant les n équations de $\mathscr{S}$.
- Le système $\mathscr{S}$ est dit **compatible** s'il admet au moins une solution.
- Lorsque $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, on dit que le système est **homogène** ou que le système est *sans second membre*.
- Le système $\mathscr{S}_0$ obtenu en remplaçant tous les b_i par 0 est appelé *système homogène associé* à $\mathscr{S}$.
- Le système $\mathscr{S}$ s'écrit aussi :

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\, x_j = b_i.$$

- Reprenons le système $\mathscr{S}$. Posons

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \vdots \\ \\ x_p \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

  Le p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ est solution de $\mathscr{S}$ si et seulement si la colonne X vérifie $AX = B$.
- L'égalité $AX = B$ s'appelle *écriture matricielle* du système $\mathscr{S}$.
- La matrice A s'appelle la *matrice du système*.
- Le système homogène associé à $\mathscr{S}$ a pour écriture matricielle $AX = 0$.

66 **Remarques.**

- Un système homogène est toujours compatible, WHY?
- Le système $\mathscr{S}$ est compatible si et seulement si B est combinaison linéaires des colonnes de A.
- En effectuant des opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire (rectangulaire), on ne change pas son ensemble des solutions. On obtient alors un système *équivalent*.

67 **Proposition (Structure de l'ensemble des solutions).**
Considérons un système linéaire $\mathscr{S}$ d'écriture matricielle $AX = B$.
Notons E et E_0 les ensembles des solutions des systèmes $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}_0$ respectivement.

Supposons qu'il existe une solution particulière X_P de $\mathscr{S}$. Alors l'ensemble des solutions de $\mathscr{S}$ est :

$$E \ = \ \left\{X_P + X_H\right\}_{X_H \in E_0}$$

ce que l'on note abusivement $E = X_P + E_0$.

L'algorithme du pivot de Gauss

— Si **tous** les coefficients devant x_1 sont **nuls**, alors l'inconnue x_1 n'intervient pas dans l'écriture du système. On résout alors le système $\widetilde{\mathscr{S}}$, qui a la même écriture que $\mathscr{S}$, mais que l'on voit comme un système à seulement $p-1$ inconnues qui sont $x_2, \dots, x_p$.
Les solutions de $\mathscr{S}$ sont alors les p-uplets :

$$(x_1, x_2, \dots, x_p) \qquad \text{avec } x_1 \in \mathbb{K} \text{ et } (x_2, \dots, x_p) \text{ solution de } \widetilde{\mathscr{S}}$$

— Si **au moins un** des coefficients devant x_1 est **non nul**, alors choisissons-en un, que l'on appelle $\boxed{\textit{pivot}}$.

★ En notant i_0 l'indice de la ligne où se trouve le pivot choisi et en réalisant l'échange de lignes $L_{i_0} \leftrightarrow L_1$, on obtient un système $\widetilde{\mathscr{S}}$ équivalent à $\mathscr{S}$ où le pivot choisi est le coefficient devant x_1 à la première ligne :

$$\widetilde{\mathscr{S}} \left\{ \begin{array}{ccccccccccccc} \boxed{\widetilde{a}_{1,1}}\, x_1 & + & \widetilde{a}_{1,2}\, x_2 & + & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & + & \widetilde{a}_{1,p}\, x_p & = & \widetilde{b}_1 \\ \widetilde{a}_{2,1}\, x_1 & + & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & + & \widetilde{a}_{2,p}\, x_p & = & \widetilde{b}_2 \\ \vdots & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\ \widetilde{a}_{n,1}\, x_1 & + & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & + & \widetilde{a}_{n,p}\, x_p & = & \widetilde{b}_n. \end{array} \right.$$

★ On utilise alors la première ligne pour éliminer l'inconnue x_1 dans les autres. Plus précisément, en réalisant les transvections suivantes :

$$\forall\, i \in [\![2, n]\!], \quad L_i \leftarrow L_i - \frac{\widetilde{a}_{i,1}}{\widetilde{a}_{1,1}} L_1$$

on obtient un système équivalent à $\mathscr{S}$ de la forme ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{cccccccccccc} \widehat{a}_{1,1}\, x_1 & + & \widehat{a}_{1,2}\, x_2 & + & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & + & \widehat{a}_{1,p}\, x_p & = & \widehat{b}_1 \\ & & \widehat{a}_{2,2}\, x_2 & + & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & + & \widehat{a}_{2,p}\, x_p & = & \widehat{b}_2 \\ & & \vdots & & & & & & & \vdots & & \vdots \\ & & \widehat{a}_{n,2}\, x_2 & + & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & + & \widehat{a}_{n,p}\, x_p & = & \widehat{b}_n. \end{array} \right.$$

★ Dans le système obtenu, on voit apparaître :

— une équation linéaire E :

$$\widehat{a}_{1,1}\, x_1 \;+\; \widehat{a}_{1,2}\, x_2 \;+\; \cdots \;\cdots\; + \;\widehat{a}_{1,p}\, x_p \;=\; \widehat{b}_1\,;$$

— un système à $p-1$ inconnues formé par les $n-1$ dernières lignes :

$$\widehat{\mathscr{S}} \left\{ \begin{array}{cccccccc} \widehat{a}_{2,2}\, x_2 & + & \cdots & \cdots & + & \widehat{a}_{2,p}\, x_p & = & \widehat{b}_2 \\ \vdots & & & & & \vdots & & \vdots \\ \widehat{a}_{n,2}\, x_2 & + & \cdots & \cdots & \cdots & \widehat{a}_{n,p}\, x_p & = & \widehat{b}_n. \end{array} \right.$$

La résolution du système $\widehat{\mathscr{S}}$ mène alors à la résolution du système $\mathscr{S}$.
En effet, une p-liste $(x_1, \dots, x_p)$ est solution de $\mathscr{S}$ si et seulement si on a à la fois les deux propriétés suivantes :

— $(x_2, \dots, x_p)$ est solution de $\widehat{\mathscr{S}}$

— $(x_1, \dots, x_p)$ est solution de E

Comme $\widehat{a}_{1,1} \neq 0$, l'ensemble des solutions de $\mathscr{S}$ est donc l'ensemble des p-uplets $(x_1, \dots, x_p)$ vérifiant :

$$x_1 = \frac{1}{\widehat{a}_{1,1}} \big(\widehat{b}_1 - \widehat{a}_{1,2}\, x_2 - \cdots - \widehat{a}_{1,p}\, x_p \big) \quad \text{et} \quad (x_2, \dots, x_p) \text{ est solution de } \widehat{\mathscr{S}}$$

★ Il s'agit désormais de résoudre le système $\widehat{\mathscr{S}}$: pour ce faire, on peut itérer le processus précédent.

Échelonnement

- Voici des exemples de systèmes échelonnés réduits :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & + & 6z & = & 0 \\ & & y & + & 7z & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & & + & 2x_3 & + & & + & 4x_5 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & + & & + & 5x_5 & = & 0 \\ & & & & & & x_4 & + & 6x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

- Voici des exemples de matrices échelonnées réduites :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & a \\ 0 & \mathbf{1} & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & a & 0 & c \\ 0 & \mathbf{1} & b & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & e \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & a \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & b \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & c \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & a & 0 & b \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour la culture (il est totalement inutile d'apprendre cette définition), on dit qu'une matrice est échelonnée réduite lorsque les trois conditions suivantes sont réalisées :

- Si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi.
- Dans chaque ligne non nulle, le pivot (càd le premier coefficient non nul rencontré) est situé à droite du pivot de la ligne précédente. D'où un dessin en « escalier ».
- Chaque pivot vaut 1 et au-dessus d'un pivot, tous les éléments sont nuls.

68 **Théorème.**

- Un système linéaire peut être rendu échelonné (et même échelonné réduit) à l'aide d'opérations élémentaires.
- Une matrice rectangulaire (donc en particulier carrée) peut être rendue échelonnée (et même échelonnée réduite) à l'aide d'opérations élémentaires sur ses lignes.

Preuve. Appliquer l'algorithme du pivot de Gauss pour les systèmes linéaires (et son analogue pour les matrices)

69 **Question.** Résoudre $AX = 0$ où $A \in \mathscr{M}_{4,6}(\mathbb{K})$ est la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 1/2 \\ 0 & 3 & 6 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 3 & 4/3 \end{pmatrix}$

$$A_1 = \begin{pmatrix} . & 1 & 2 & 3 & 3 & 1/2 \\ . & 2 & 4 & 6 & 0 & 2 \\ . & 3 & 6 & 7 & 1 & 2 \\ . & 1 & 2 & 5 & 3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} . & 1 & 2 & 3 & 3 & 1/2 \\ . & . & . & 0 & -6 & 1 \\ . & . & . & -2 & -8 & 1/2 \\ . & . & . & 2 & 0 & 5/6 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} . & 1 & 2 & 3 & 3 & 1/2 \\ . & . & . & 2 & 0 & 5/6 \\ . & . & . & -2 & -8 & 1/2 \\ . & . & . & 0 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} . & 1 & 2 & 3 & 3 & 1/2 \\ . & . & . & 1 & 0 & 5/12 \\ . & . & . & -2 & -8 & 1/2 \\ . & . & . & 0 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} . & 1 & 2 & 3 & 3 & 1/2 \\ . & . & . & 1 & 0 & 5/12 \\ . & . & . & . & -8 & 4/3 \\ . & . & . & . & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} . & 1 & 2 & 3 & 3 & 1/2 \\ . & . & . & 1 & 0 & 5/12 \\ . & . & . & . & 1 & -1/6 \\ . & . & . & . & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} . & 1 & 2 & 3 & 3 & 1/2 \\ . & . & . & 1 & . & 5/12 \\ . & . & . & . & 1 & -1/6 \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

$$A_8 = \begin{pmatrix} . & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ . & . & . & 1 & . & 5/12 \\ . & . & . & . & 1 & -1/6 \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

$$A_9 = \begin{pmatrix} . & 1 & 2 & 0 & 0 & -1/4 \\ . & . & . & 1 & . & 5/12 \\ . & . & . & . & 1 & -1/6 \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

V. Compléments

- On a déjà vu une « caractérisation de l'inversibilité en termes de $AX = Y$ » :

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad \exists!\, X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad AX = Y$$

Ce théorème dit :
$\boxed{\Longrightarrow}$ Si A est inversible, alors pour tout second membre Y, l'équation $AX = Y$ admet une unique solution, à savoir $X = A^{-1}Y$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si **pour tout** second membre Y, l'équation $AX = Y$ admet une unique solution, alors A est inversible.

- On a facilement l'implication suivante (WHY?) :

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \Longrightarrow \quad \exists!\, X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad AX = 0$$

que l'on peut reformuler en (WHY?)

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \Longrightarrow \quad \Big(\forall\, X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad AX = 0 \implies X = 0\Big)$$

Cela dit que :
Si A est inversible, alors l'équation $AX = 0$ admet une unique solution, à savoir $X = 0$.

- L'implication réciproque est vraie, mais c'est un vrai théorème.

70 **Théorème (Caractérisation de l'inversibilité en termes de $AX = 0$)**
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Si l'équation $AX = 0$ admet une unique solution (qui est nécessairement 0), alors A est inversible.

- On en déduit une « caractérisation de l'inversibilité en termes de $AX = 0$ » :

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(\forall\, X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad AX = 0 \implies X = 0\Big)$$

- Plus tard, en 2023, on définira ce qu'est le noyau d'une matrice (rectangulaire non nécessairement carrée) :

$$\mathrm{Ker}\, A \ = \ \Big\{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0\Big\}$$

Le théorème s'énoncera alors :

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Ker}\, A = \left\{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\right\}$$

- **Preuve du théorème.** Par contraposée.
Supposons A non inversible.
Tout d'abord, il existe $\Omega \in \mathscr{E}_n(\mathbb{K})$ tel que $\Omega A = T$ où T est triangulaire supérieure.
Comme A est supposée non-inversible, on sait que T est aussi non-inversible.
Travaillons sur la matrice T.
Comme T est non inversible, il existe un coefficient diagonal nul, posons $j_0 = \min\Big\{j \in [\![1, n]\!] \mid t_{jj} = 0\Big\}$.
Il existe $\Omega' \in \mathscr{E}_n(\mathbb{K})$ tel que $\Omega' T =$

La colonne d'indice j_0 est donc combinaison linéaire des premières colonnes de $\Omega' T$.
Il existe donc une colonne X non nulle telle que $\Omega' T X = 0$.
Puis $\Omega'\Omega A X = 0$. En multipliant par $(\Omega'\Omega)^{-1}$, on obtient $AX = 0$ (où X est une colonne non nulle!).

Autres exercices

71 sol → 42 **Question.** Soit a, b, c deux à deux distincts. Montrer que la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$ est inversible.

72 **Question.**

À quelle condition sur λ, la matrice $A_\lambda = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$ est-elle inversible ?

Matrices Systèmes linéaires

preuve et éléments de correction

50

On va utiliser le principe suivant « Si en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de Z on arrive à faire apparaître la matrice identité I, alors la matrice Z est inversible. Dans ce cas, l'inverse de Z s'obtient en faisant subir à la matrice identité I les mêmes opérations élémentaires. »

$$Z = \begin{bmatrix} . & 7 & 3 \\ 1 & . & 2 \\ -1 & 5 & . \end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & . & 2 \\ . & 7 & 3 \\ -1 & 5 & . \end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & . & 2 \\ . & 7 & 3 \\ . & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow \tfrac{1}{7} L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & . & 2 \\ . & 1 & 3/7 \\ . & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & . & 2 \\ . & 1 & 3/7 \\ . & . & -1/7 \end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/7 & 0 & 0 \\ -5/7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

à ce stade, on peut dire que Z est inversible

$$L_3 \leftarrow -7L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & . & 2 \\ . & 1 & 3/7 \\ . & . & 1 \end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/7 & 0 & 0 \\ 5 & -7 & -7 \end{bmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - \tfrac{3}{7} L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & . & 2 \\ . & 1 & . \\ . & . & 1 \end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \\ 5 & -7 & -7 \end{bmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & . & . \\ . & 1 & . \\ . & . & 1 \end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{bmatrix} -10 & 15 & 14 \\ -2 & 3 & 3 \\ 5 & -7 & -7 \end{bmatrix}$$

D'après la proposition « condition suffisante d'inversibilité et obtention de l'inverse », on en déduit que Z et inversible et $Z^{-1} = \begin{bmatrix} -10 & 15 & 14 \\ -2 & 3 & 3 \\ 5 & -7 & -7 \end{bmatrix}$.

56

Effectuons des opérations élémentaires sur les lignes de V, ce qui ne change pas son caractère inversible.

$$V = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -13 & 2 \\ 2 & -9 & -47 & 16 \\ -4 & 10 & 38 & 1/3 \\ 0 & 1 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$
$$L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -13 & 2 \\ 0 & -3 & -21 & 12 \\ 0 & -2 & -14 & 25/3 \\ 0 & 1 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow \tfrac{-1}{3} L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -13 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & -4 \\ 0 & -2 & -14 & 25/3 \\ 0 & 1 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$$
$$L_4 \leftarrow L_4 - L_2$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -13 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice E obtenue à partir de V à partir d'opérations élémentaires n'est pas inversible (elle est triangulaire supérieure avec au moins un 0 sur la diagonale), donc V n'est pas inversible.

71

Effectuons des opérations élémentaires sur les lignes de cette matrice, ce qui ne change pas son caractère inversible.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$$

Effectuons $L_2 \leftarrow L_2 - aL_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - a^2 L_1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{bmatrix}$$

Comme $b^2 - a^2$ est multiple de $b-a$, en effectuant $L_3 \leftarrow L_3 - (b+a)L_2$, on obtient :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & c^2-a^2-(b+a)(c-a) \end{bmatrix}$$

Le coefficient en bas à droite vaut $c^2 - a^2 - bc + ba - ac + a^2 = (c^2 - ac) - (bc - ba) = (c-a)(c-b)$.
La matrice obtenue est triangulaire supérieure avec sur la diagonale

$$1 \qquad b-a \qquad (c-a)(c-b)$$

Aucun de ces coefficients n'est nul, car a, b, c sont distincts deux à deux.
Donc la matrice finale est inversible.

Bilan : la matrice initiale est inversible.