Matrices Systèmes linéaires

exercices

09exo-Matrices_Systemes.pdf, 25 novembre 2022, 17:56

Matrices et système linéaires

Opérations sur les matrices

101 **Contre-exemple**

Déterminer deux matrices carrées A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telles que :

1. $AB = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{K})}$ et $BA \neq 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{K})}$.
2. $AB = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{K})}$, $BA = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{K})}$ et $A \neq 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{K})}$ et $B \neq 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{K})}$.

102 **Produit matriciel avec la matrice J**

On note $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer JMJ.

103 **Calcul de puissance et Newton**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin\theta \\ -1 & 0 & \cos\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{pmatrix}$ où $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer A^3 puis les puissances de $A + I_3$.

104 **Puissance de la matrice « surdiagonale unité »**

Soit N la matrice de taille n ayant des 1 sur sa sur-diagonale et des 0 ailleurs :

$$\operatorname{coeff}_{i,j}(N) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

Calculer les puissances successives de N.
En déduire que N est nilpotente.

105 $\mathrm{Vect}(A, I)$

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 + 2A - 3I = 0$.
En déduire par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice A^n est combinaison linéaire de A et I.

106 **Matrice colonne, matrice ligne**

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ba & b^2 & bc \\ ca & cb & c^2 \end{pmatrix}$.

Écrire A comme le produit d'une matrice colonne et d'une matrice ligne.
En déduire A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

107 **Calcul de puissances en pagaille**

Calculer les puissances successives des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \ddots & \vdots \\ b & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & b & a \end{pmatrix}.$$

Un peu de raisonnement

108 **Centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$**

Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

109 **Commutant d'une matrice diagonale**

Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont deux à deux distincts. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec D.

110 **Matrice triangulaire commutant avec sa transposée**

On veut montrer qu'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) à coefficients réels commute avec sa transposée si et seulement si elle est diagonale.
Un sens est évident, lequel ?
Pour l'autre sens, on considère une matrice A triangulaire *supérieure* commutant avec sa transposée.
On écrit A par blocs :

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} & A_0 & & v \\ \hline 0 & \cdots & 0 & a_n \end{array}\right).$$

Montrer que v est la colonne nulle.
Puis expliquer comment conclure.

111 **Stabilité des matrices nilpotentes**

On rappelle qu'une matrice carrée est *nilpotente* si l'une de ses puissances est nulle.
Soit A et B deux matrices nilpotentes qui commutent. Montrer que $A+B$ et AB sont également nilpotentes. Que dire si l'on enlève l'hypothèse de commutativité ?

Matrices carrées inversibles

112 **Avec un polynôme annulateur**

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - A$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.
2. Pour $n \geqslant 2$, on considère la matrice carrée A de taille n dont tous les coefficients diagonaux sont nuls et dont tous les autres coefficients valent 1. Est-elle inversible ?
   S'appuyer sur la matrice pleine de 1 et sur le fait que le carré de cette matrice est connu.

113 **Nilpotence et inversibilité**

1. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente.
   En utilisant la formule de Bernoulli, montrer que la matrice $I - N$ est inversible et exprimer son inverse comme polynôme en N (càd comme combinaison linéaire des puissances de N).
2. Soit A la matrice de taille n ayant des 1 sur la diagonale, des -1 sur la sur-diagonale et des 0 ailleurs :

$$\operatorname{coeff} A_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ -1 & \text{si } j = i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

   En utilisant la question précédente, montrer que A est inversible.

114 **Inversibilité et produit**

Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$. On suppose que AB est inversible.
Montrer que A et B sont inversibles.
Que peut-on dire de BA ?

115 Matrice à diagonale dominante

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!], \quad |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

1. Montrer que :

$$\forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \quad AX = 0 \implies X = 0$$

   Une fois le raisonnement lancé, on pourra s'aider d'un raisonnement par l'absurde.

2. Que peut-on dire d'une matrice à diagonale dominante ?

116 Avec le critère $AX = 0$

Soit $M = \left[\begin{array}{c|ccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & N & \\ 0 & & & \end{array}\right] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ et une matrice $N \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.

Montrer que $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $a_1 \neq 0$ et $N \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$.

Utiliser le critère « du noyau nul ».

117 Une mini matrice compagnon

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K})$. Montrer que A est inversible si et seulement si $x \neq 0$.

118 Inversible avec paramètres

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on note $A_{x,y} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & x \\ 1 & 4 & y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Représenter dans le plan l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquelles la matrice $A_{x,y}$ n'est pas inversible.

119 Inversible ou pas ?

Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, calculer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & \bar{z} & \bar{z}^2 \\ z & 1 & \bar{z} \\ z^2 & z & 1 \end{pmatrix} (z \in \mathbb{C}), \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

120 Échelonnement des matrices carrées

Montrer qu'une matrice est inversible si et seulement si elle peut s'écrire comme un produit de matrices d'opérations élémentaires.

Systèmes linéaires

121 Trois, Deux, Un, Zéro

1. Soit $a, b, c \in \mathbb{K}$. Résoudre le système d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} & & 7y & + & 3z & + & 17t & = & a \\ x & + & & & 2z & + & 5t & = & b \\ -x & + & 5y & + & & & 7t & = & c \end{array}\right.$$

2. Pouvez-vous expliquer à l'oral à un camarade pourquoi les calculs précédents montrent que la matrice $Z = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ est inversible ?

122 Valeur propre de J

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
Résoudre le système $\mathcal{S}_\lambda$ suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} (1-\lambda)x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & (1-\lambda)y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & (1-\lambda)z & = & 0 \end{array}\right.$$

123 de Tête ? !

L'un des deux systèmes suivants n'a pas de solution. De tête, déterminer lequel.

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x+3y-z+t & = & 2 \\ 2x+3y+z & = & 4 \\ 2x+3y+2z & = & 3 \\ 2x+3y & = & 5 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} 2x+3y-z+t & = & 2 \\ 2x+3y+z & = & 4 \\ 2x+3y+2z & = & 3 \\ 2x+3y & = & 4 \end{array}\right.$$

124 Système 2-2

Pour quelles valeurs de $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ le système suivant admet-il : aucune solution ? une solution unique ? une infinité de solutions ?

$$\left\{\begin{array}{lcl} ax+by & = & 1 \\ bx+ay & = & 1 \end{array}\right.$$

125 Systèmes à paramètres

Soit $a, b, d, m, p, q, r, s \in \mathbb{R}$ des paramètres.
Résoudre les systèmes suivants, en discutant selon les valeurs des paramètres.

1. $\begin{cases} x+y=s \\ x-y=d \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x+y-z=-1 \\ 5x+2y-2z=a \\ 4x+y-z=b \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+y=1 \\ ax+by=0 \\ a^2x+b^2y=1 \\ a^3x+b^3y=0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} mx+y+z=1 \\ x+my+z=m \\ x+y+mz=1 \\ x+y+z=m \end{cases}$

5. $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ (2a+1)x+3y+(a+2)z=3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x+2y+az=1 \\ 3x+4y+2z=a \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+y+4z+4t=a \\ 3x+y-4z+6t=0 \\ x-4z+t=b \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2y+2z=p \\ -2x+z=q \\ -2x-y=r \\ x-2y+2z=s \end{cases}$

Matrices Systèmes linéaires

corrigés

103

On trouve $A^2 = \begin{pmatrix} -\cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta\sin\theta & -\sin^2\theta & \sin\theta \\ -\cos\theta & -\sin\theta & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = 0$.

Un point important est que I_3 et A commutent, donc on peut utiliser la formule du binôme de Newton.

— $(I_3 + A)^0 = I_3$;

— $(I_3 + A)^1 = I_3 + A$;

— $(I_3 + A)^2 = I_3 + 2A + A^2$;

— $(I_3 + A)^3 = I_3 + 3A + 3A^2 + A^3 = I_3 + 3A + 3A^2$.

Et ainsi de suite : comme $A^3 = 0$, on montre par récurrence que $\forall k \geqslant 3, A^k = 0$.

Continuons le calcul : si $n \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}
(I_3 + A)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k I_3^{n-k} && \text{(binôme de Newton)} \\
&= \binom{n}{0} A^0 + \binom{n}{1} A^1 + \binom{n}{2} A^2 && \text{(car } \forall k \geqslant 3, A^k = 0\text{)} \\
&= I_3 + nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2.
\end{aligned}$$

110

On écrit la matrice par blocs

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} & A_0 & & v \\ \hline 0 & \cdots & 0 & a_n \end{array}\right)$$

On obtient alors

$$AA^\top = \left(\begin{array}{c|c} A_0 A_0^\top & a_n\, v \\ \hline a_n v^\top & a_n^2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A_0^\top A_0 & A_0^\top\, v \\ \hline v^\top A_0 & v^\top v + a_n^2 \end{array}\right) = A^\top A.$$

Cela entraîne que $v^\top\, v = 0$. Ce produit s'interprète comme (la matrice 1×1 dont l'unique coefficient vaut) le scalaire $v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_{n-1}^2$ où $v = (v_1, \ldots, v_{n-1})$. On obtient donc une somme de **réels** positifs de somme nulle, donc tous les réels sont nuls, donc tous les v_i sont nuls, donc $v = 0$.
En recommençant la procédure sur la matrice A_0, qui est bien triangulaire supérieure et commute avec sa transposée, on obtient de proche en proche que A est diagonale.

— Comme A et B sont nilpotentes, on peut trouver $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $A^a = B^b = 0$.
Ainsi, pour tout $k \geqslant a$, on alors $A^k = A^{k-a}A^a = 0$, et, de même pour tout $k \geqslant b$, on a $B^k = 0$.
Ainsi, en posant $p = \min(a, b)$, on a $A^p = 0$ ou $B^p = 0$.
On a alors

$$\begin{aligned}
(AB)^p &= \underbrace{(AB)(AB)\cdots(AB)}_{p \text{ fois}} \\
&= A^p\, B^p && \text{(car } A \text{ et } B \text{ commutent)} \\
&= 0 && \text{car ou bien } p = a \text{ ou bien } p = b
\end{aligned}$$

ce qui montre que AB est nilpotente.
Concernant la somme. Fixons $p \in \mathbb{N}$. Comme A et B commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton :

$$(A+B)^p \;=\; \sum_{i+j=p} \frac{p!}{i!j!} A^i B^j$$

Il suffit donc d'imposer p de sorte que l'implication suivante soit vraie :

$$i + j = p \implies \Big(i \geqslant a \text{ OU } j \geqslant b\Big)$$

Ceci est réalisé pour $p = a+b$. En effet, montrons cette implication en supposant la prémisse $i + j = a + b$, puis en raisonnant par l'absurde. Si on avait $i < a$ **et** $j < b$, alors on aurait $i + j < a + b$, ce qui contredit $i + j = a + b$.
Ainsi, on a $(A + B)^{a+b} = 0$.

— Si A et B ne commutent pas, le résultat ne tient plus.
On vérifie par exemple facilement que $A = E_{1,2}$ et $B \in E_{2,1}$ sont nilpotentes (d'après la règle de multiplication des matrices élémentaires, on a en fait $A^2 = B^2 = 0$).
Pourtant :

- La somme $S = A + B$ vérifie

$$\begin{aligned}
S^2 &= \underbrace{E_{1,2}E_{1,2}}_{=0} + E_{1,2}E_{2,1} + E_{2,1}E_{1,2} + \underbrace{E_{2,1}E_{2,1}}_{=0} \\
&= E_{1,1} + E_{2,2}.
\end{aligned}$$

  On en déduit par récurrence que $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\; S^{2k} = E_{1,1} + E_{2,2} \neq 0$, donc S n'est pas nilpotente.
- Le produit $P = AB = E_{1,1}$ est une matrice diagonale très simple qui vérifie $P^2 = P$, d'où l'on déduit que $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\; P^k = P \neq 0$, donc P n'est pas nilpotente.

1. On a

$$A^2 - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$$

On a donc

$$\begin{cases} A\left(\frac{1}{2}\left(A - I\right)\right) = I \\ \text{et} \\ \left(\frac{1}{2}(A - I)\right) A = I \end{cases}$$

Ainsi, A est inversible et :

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I) = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

2. Cette matrice A est liée à J, la matrice pleine de 1, par la relation $A = J - I$.
Comme on connaît une relation entre les puissances de J (à savoir $J^2 = nJ$), on écrit J en fonction de A, puis on élève au carré.
On a $J = A + I$. En élevant au carré, on a donc $(A + I)^2 = n(A + I)$.
Avec la formule du binôme qui s'applique car A et I commutent, on obtient

$$A^2 + 2A + I = nA + nI \quad \text{d'où} \quad A^2 + (2 - n)A = (n - 1)I$$

Comme $n - 1 \neq 0$, on a les égalités :

$$\begin{cases} A\left(\frac{1}{n-1}\left(A - (2 - n)I\right)\right) = I \\ \text{et} \\ \left(\frac{1}{n-1}(A - (2 - n)I)\right) A = I \end{cases}$$

Ainsi A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{n-1}(A - (2 - n)I)$.
Dessinons A^{-1}.

$$A^{-1} = \frac{1}{n-1} \begin{bmatrix} 2-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2-n & 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 2-n \end{bmatrix}.$$

Donnons deux solutions.

Avec échelonnement.

Rappel. Toute matrice carrée peut être rendue triangulaire supérieure (inversible ou pas...) après opérations élémentaires sur ses lignes. Autrement dit, il existe une matrice $\Omega \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ produit de matrices d'opérations élémentaires et une matrice triangulaire T telle que $\Omega A = T$. Et le caractère inversible de A est le même que celui de T (qui lui est facile à voir, car il suffit d'examiner la diagonale).

Lemme. Soit Ω' de taille $n-1$ **inversible**.

Alors la matrice $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \Omega' & \\ 0 & & & \end{array}\right]$ est inversible d'inverse $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \Omega'^{-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right]$

(faire le produit matriciel par blocs).

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons M inversible.

Utilisons le rappel à la matrice N : il existe une matrice $\Omega' \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$ telle que $\Omega' N = T'$ où T' est triangulaire supérieure de taille $n-1$.

L'idée est d'effectuer les opérations élémentaires correspondant à Ω' sur la matrice M qui est de taille un peu plus grande (donc les opérations élémentaires attaquent aussi la première colonne de M, mais pas la première ligne, donc tout va bien !), ce qui ne change pas son caractère inversible,

on arrive alors à $M^{\text{op.elem.}} = \left[\begin{array}{c|ccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & T' & \\ 0 & & & \end{array}\right]$

Cette matrice $M^{\text{op.elem.}}$ est triangulaire (WHY ?), et elle est inversible (car M l'est). Donc $M^{\text{op.elem.}}$ n'a pas de zéro sur sa diagonale ce qui implique que $a_1 \neq 0$ et que T' n'a pas de 0 sur sa diagonale, donc T' est inversible, donc N l'est !

Remarque. La matrice $M^{\text{op.elem.}}$ est en fait le produit $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \Omega' & \\ 0 & & & \end{array}\right] M$

Bilan : $a_1 \neq 0$ et N est inversible.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $a_1 \neq 0$ et N inversible.

Il existe une matrice Ω' inversible et une matrice triangulaire T' inversible, telles que $\Omega' N = T'$.

On a alors

$$\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \Omega' & \\ 0 & & & \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|ccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & N & \\ 0 & & & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|ccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \Omega' N & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

ce qui s'écrit

$$\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \Omega' & \\ 0 & & & \end{array}\right] M = \left[\begin{array}{c|ccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & T' & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

Comme la matrice à droite est inversible, car elle est triangulaire supérieure avec aucun 0 sur la diagonale ($a_1 \neq 0$ par hypothèse, et il n'y a pas de 0 sur la diagonale de T'), et la matrice à l'extrême gauche aussi (c'est le lemme initial), la matrice M est inversible (WHY ?).

119

Après avoir essayé pour de petites valeurs de n, on montrer que l'inverse de F est la matrice ayant une diagonale de 1, une première sur-diagonale de -2 et une deuxième sur-diagonale de 1 :

$$F' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -2 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le calcul de FF' est très instructif.

1. On échelonne la matrice à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss, sans oublier d'effectuer les opérations élémentaires sur le second membre.

$$A = \begin{bmatrix} . & 7 & 3 & 17 \\ 1 & . & 2 & 5 \\ -1 & 5 & . & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$L_1 \leftrightarrow L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & . & 2 & 5 \\ . & 7 & 3 & 17 \\ -1 & 5 & . & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b \\ a \\ c \end{bmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & . & 2 & 5 \\ . & 7 & 3 & 17 \\ . & 5 & 2 & 12 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b \\ a \\ b+c \end{bmatrix}$$

$L_2 \leftarrow \frac{1}{7}L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & . & 2 & 5 \\ . & 1 & 3/7 & 17/7 \\ . & 5 & 2 & 12 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b \\ 1/7a \\ b+c \end{bmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & . & 2 & 5 \\ . & 1 & 3/7 & 17/7 \\ . & . & -1/7 & -1/7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b \\ 1/7a \\ -5/7a + b + c \end{bmatrix}$$

$L_3 \leftarrow -7L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & . & 2 & 5 \\ . & 1 & 3/7 & 17/7 \\ . & . & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b \\ 1/7a \\ 5a - 7b - 7c \end{bmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{7}L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & . & 2 & 5 \\ . & 1 & . & 2 \\ . & . & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b \\ -2a + 3b + 3c \\ 5a - 7b - 7c \end{bmatrix}$$

$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & . & . & 3 \\ . & 1 & . & 2 \\ . & . & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -10a + 15b + 14c \\ -2a + 3b + 3c \\ 5a - 7b - 7c \end{bmatrix}$$

Effectuer des opérations élémentaires sur les lignes d'un système ne change pas son ensemble solution. On a donc l'équivalence

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} & & 7y & + & 3z & + & 17t & = & a \\ x & + & & & 2z & + & 5t & = & b \\ -x & + & 5y & + & & & 7t & = & c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccl} x & & & + & 3t & = & -10a + 15b + 14c \\ & y & & + & 2t & = & -2a + 3b + 3c \\ & & z & + & t & = & 5a - 7b - 7c \end{array}\right.$$

$$\iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \left[\begin{array}{ccrcr} x & = & -10a + 15b + 14c & + & -3\lambda \\ y & = & -2a + 3b + 3c & + & -2\lambda \\ z & = & 5a - 7b - 7c & + & -\lambda \\ t & = & 0 & + & \lambda \end{array}\right.$$

Bilan : l'ensemble des solutions du système initial est l'ensemble des quadruplets de la forme

$$(-10a + 15b + 14c, \quad -2a + 3b + 3c, \quad 5a - 7b - 7c, \quad 0) \quad + \quad \lambda(-3, -2, -1, 1)$$

où λ parcourt $\mathbb{K}$.

2. On remarque que la matrice $Z = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ est extraite de la matrice A initiale.

   Cette matrice Z se transforme en l'identité via les opérations élémentaires décrites ci-dessus.

   Ainsi (en louchant sur le second membre), on « voit que » (WHY ? !)

$$Z^{-1} = \begin{bmatrix} -10 & 15 & 14 \\ -2 & 3 & 3 \\ 5 & -7 & -7 \end{bmatrix}$$

124

On peut commencer par remarquer que

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

Ainsi, si $a \neq \pm b$, la matrice du système est inversible, donc il a une unique solution (qui est en fait $\begin{pmatrix} \frac{1}{a+b} \\ \frac{1}{a+b} \end{pmatrix}$, mais l'énoncé ne le demande pas).
Il reste alors à traiter les cas restants.
Si $a = -b$, le système est

$$\begin{cases} ax - ay = 1 \\ -ax + ay = 1, \end{cases} \qquad \text{équivalent à} \qquad \begin{cases} ax - ay = 1 \\ ax - ay = -1, \end{cases}$$

évidemment incompatible.
Enfin, si $a = b \neq 0$, les deux équations du système sont $ax + ay = 1$, et l'on obtient une infinité de solutions (qui forment l'ensemble $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{a} - y \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\}$, même si ce n'est pas demandé).

125

Voici les ensembles de solutions.

1. $\left\{\begin{pmatrix}\frac{s+d}{2}\\ \frac{s-d}{2}\end{pmatrix}\right\}$.
2. On a l'équation de compatibilité $3+a+b=0$.

   Si elle est vérifiée, l'ensemble des solutions est $\left\{\begin{pmatrix}b+1\\ z-3b-4\\ z\end{pmatrix}, z\in\mathbb{K}\right\}$; sinon, il est vide.
3. Le système n'est compatible que si $a=1$ et $b=-1$ ou si $a=-1$ et $b=1$.

   Dans ce cas, l'unique solution en est $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.
4. Si $m=1$, le système a pour ensemble de solutions $\left\{\begin{pmatrix}1-y-z\\ y\\ z\end{pmatrix}, (y,z)\in K^2\right\}$.

   Si $m=-2$, le système a une unique solution : $\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$.

   Dans tous les autres cas, le système est incompatible.
5. Si $a=1$, le système a pour ensemble de solutions $\left\{\begin{pmatrix}1-y-z\\ y\\ z\end{pmatrix}, (y,z)\in K^2\right\}$.

   Si $a=-2$, le système est incompatible.

   Dans tous les autres cas, le système a une unique solution : $\begin{pmatrix}\frac{1}{a+2}\\ \frac{1}{a+2}\\ \frac{1}{a+2}\end{pmatrix}$.
6. Si $a=-4$, le système est incompatible. Sinon, il admet une unique solution : $\begin{pmatrix}\frac{3a^2-2a-6}{a+4}\\ \frac{-2a^2+2a+5}{a+4}\\ \frac{a-1}{a+4}\end{pmatrix}$.
7. Si $a+2b=0$, le système a pour ensemble de solutions $\left\{\begin{pmatrix}b+4z-t\\ -3b-8z-3t\\ z\\ t\end{pmatrix}, (z,t)\in\mathbb{K}^2\right\}$.

   Si ce n'est pas le cas, il est incompatible.
8. Si $p=2q-2r$, le système a une unique solution, que l'on peut noter $\begin{pmatrix}\frac{s-2q-2r}{9}\\ \frac{4q-5r-2s}{9}\\ \frac{5q-4r+2s}{9}\end{pmatrix}$.

   Dans le cas contraire, le système est incompatible.