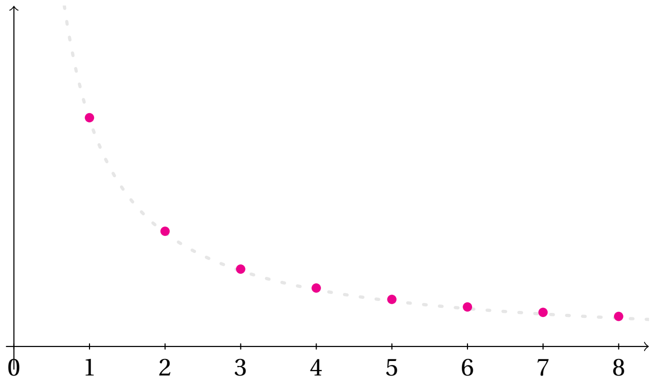
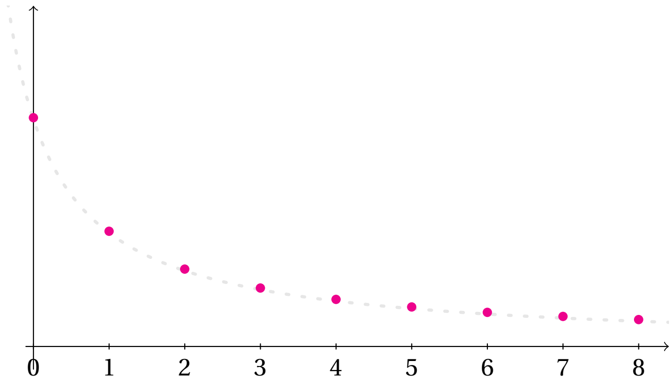
Suites numériques

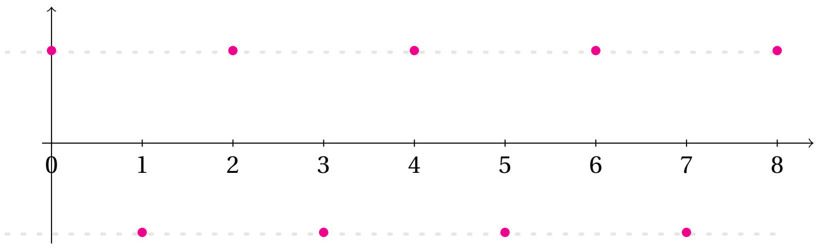
I. Des exemples à graver dans votre tête

- La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ou la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

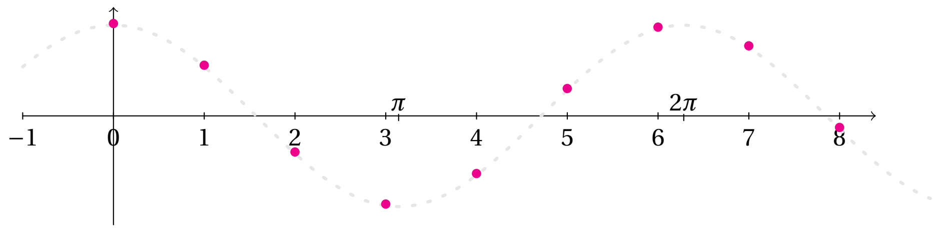




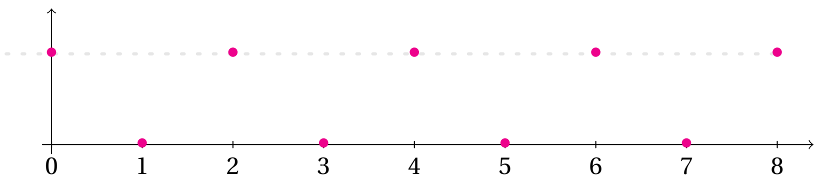
- La suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$



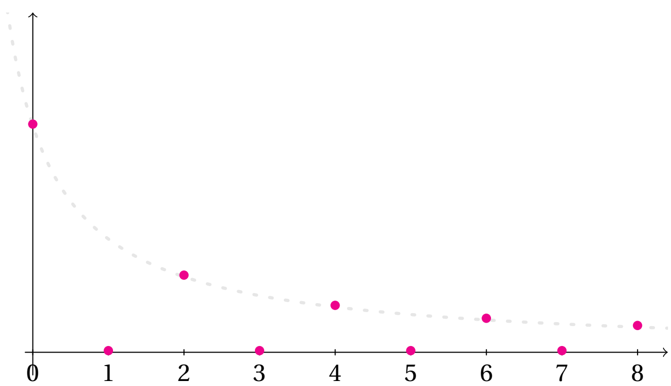
- La suite $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$



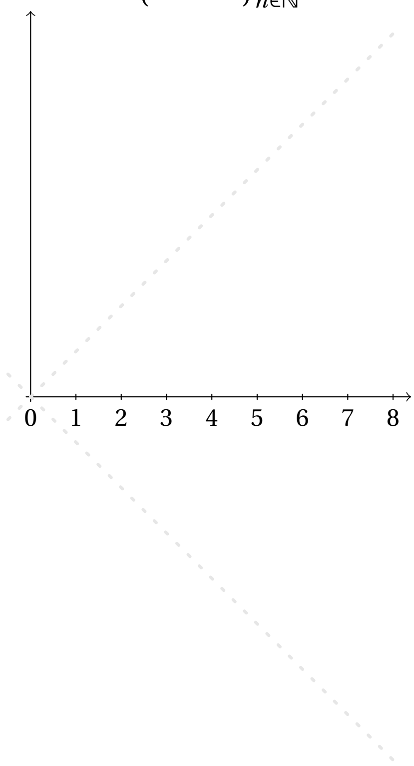
- La suite u de terme général $u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ ou encore $u_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$



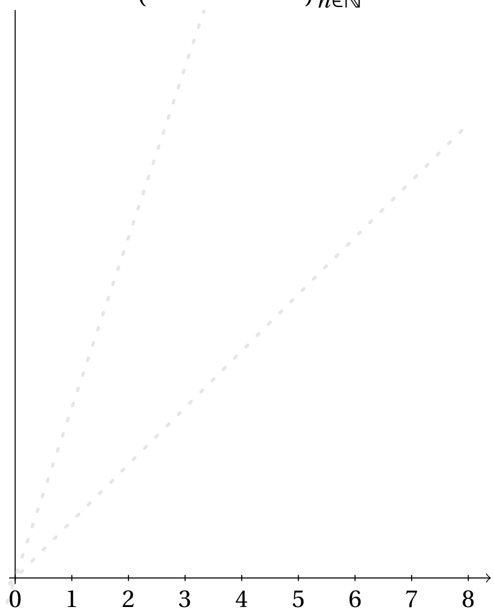
- La suite u de terme général $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ ou encore $u_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}\,\dfrac{1}{n+1}$.



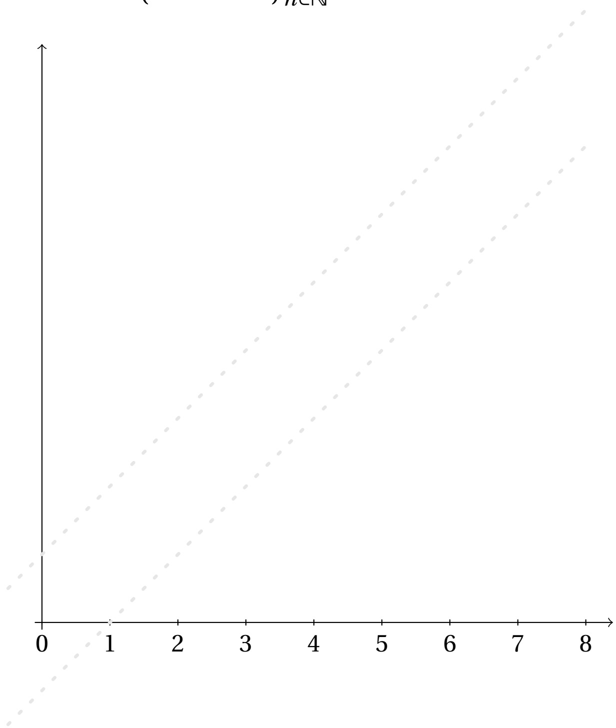
• La suite $\left(n(-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$



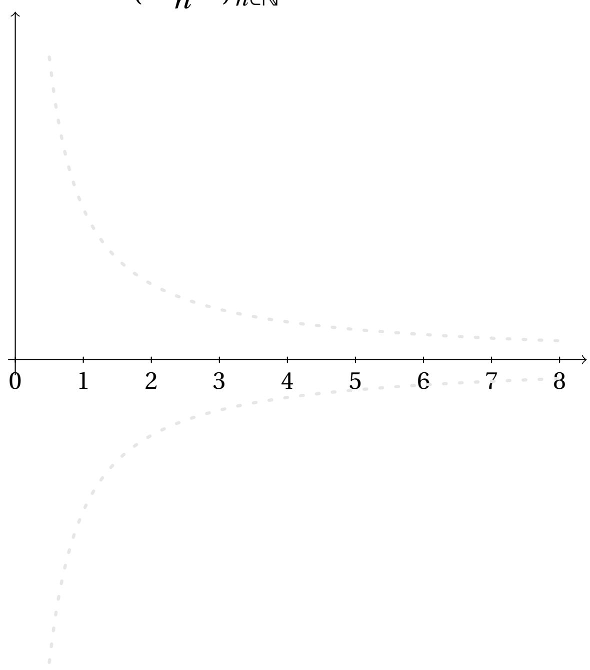
• La suite $\left(n((-1)^n+2)\right)_{n\in\mathbb{N}}$



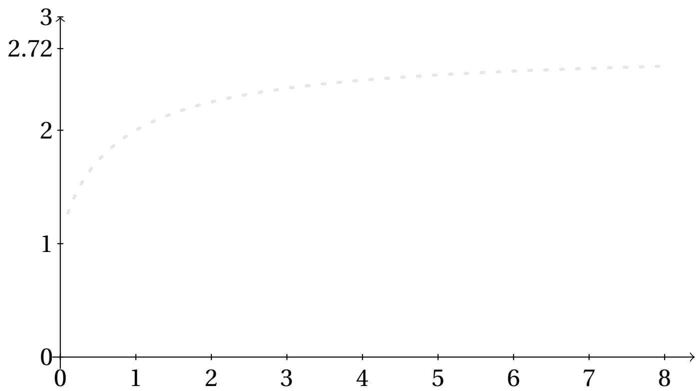
• La suite $\left(n+(-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$



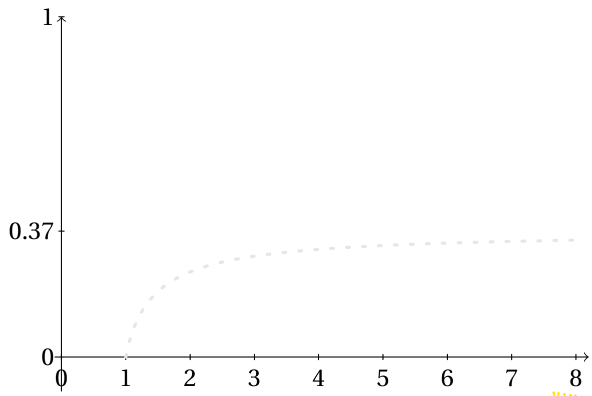
• La suite $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$



• La suite $\left((1+\frac{1}{n})^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$



• La suite $\left((1-\frac{1}{n})^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$



Suite arithmétique, Suite géométrique

- Une suite $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est arithmétique lorsqu'il existe $r \in \mathbb{C}$ tel que son terme général vérifie :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$$

On démontre alors par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr$

- Une suite $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est géométrique lorsqu'il existe $q \in \mathbb{C}$ tel que son terme général vérifie :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q u_n$$

On démontre alors par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 q^n$

Suite arithmético-géométrique

1 **Définition.** Une suite u est arithmético-géométrique lorsque son terme général u_n vérifie une relation du type

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = a u_n + b \qquad \text{avec } a \neq 1 \text{ et } b \in \mathbb{C}.$$

2 **Proposition.**
Pour une suite u arithmético-géométrique comme ci-dessus, on a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (u_0 - \gamma) a^n + \gamma \qquad \text{où } \gamma \text{ est l'unique complexe tel que } \gamma = a\gamma + b$$

3 **Question.** Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -\frac{1}{3} u_n + 4 \end{cases}$ Donner une expression de u_n.

sol → 32

Suite récurrente linéaire d'ordre 2

4 **Définition.**
Une suite u est *récurrente linéaire d'ordre* 2 lorsque son terme général u_n vérifie une relation du type

$$\bigstar_{b,c} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n = 0 \qquad \text{avec } b, c \in \mathbb{C}$$

- L'équation $x^2 + bx + c = 0$ va jouer un rôle important, on la note $\text{ÉC}_{b,c}$.
  C'est l'équation caractéristique associée à la suite u.
- Il faut aussi voir la relation $\bigstar_{b,c}$ comme une relation du type :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \beta u_{n+1} + \gamma u_n \qquad \text{avec } \beta, \gamma \in \mathbb{C}$$

- On pourrait supposer $c \neq 0$, car si c est nul, $u_{n+2} = \beta u_{n+1}$ et on est ramené à une suite géométrique.
  Dans ce cas, 0 n'est pas racine de $\text{ÉC}_{b,c}$.

5 **Théorème (cas complexe).**
Soit u une suite *complexe* vérifiant la relation $\bigstar_{b,c}$ où $b, c \in \mathbb{C}$.
Notons Δ le discriminant de l'$\text{ÉC}_{b,c}$ de u, à savoir $x^2 + bx + c = 0$.

— Cas $\Delta \neq 0$. Notons z_1 et z_2 les deux solutions complexes distinctes de $\text{ÉC}_{b,c}$.
Il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \;=\; \lambda\, z_1^n + \mu\, z_2^n$$

— Cas $\Delta = 0$. Notons z_0 l'unique solution de $\text{ÉC}_{b,c}$ *que l'on suppose différente de* 0.
Il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \;=\; \lambda\, z_0^n \;+\; \mu\, n z_0^n$$

- Ce théorème ne couvre pas tous les cas : il manque le cas où $\text{ÉC}_{b,c}$ admet la solution double 0. Mais ce cas est facile à traiter : il s'agit du cas où $b = c = 0$, donc du cas des suites u vérifiant $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 0$. Une telle suite est entièrement déterminée par son zéroième et premier terme.
- Le théorème se reformule en disant
  — Si $\text{ÉC}_{b,c}$ admet deux solutions distinctes $z_1 \neq z_2$, alors la suite u s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des deux suites $(z_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
  — Si $\text{ÉC}_{b,c}$ admet une solution double *non nulle*, alors la suite u s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des deux suites $(z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- La preuve repose sur trois lemmes essentiels :
  Lemme de la racine. Si z est racine de $\text{ÉC}_{b,c}$, alors la suite $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\bigstar_{b,c}$.

  Lemme d'unicité. Si u et v sont deux suites vérifiant $\bigstar_{b,c}$ et telles que $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$, alors elles sont égales.

  Lemme de stabilité. Si u et v sont deux suites vérifiant $\bigstar_{b,c}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ deux scalaires, alors la suite $\lambda \cdot u + \mu \cdot v$ vérifie $\bigstar_{b,c}$.

6 **Théorème (cas réel).**
Soit u une suite *réelle* vérifiant la relation $\bigstar_{b,c}$ où $b, c \in \mathbb{R}$.
Notons Δ le discriminant de l'$\text{ÉC}_{b,c}$ de u, à savoir $x^2 + bx + c = 0$.

— Cas $\Delta > 0$. Notons x_1 et x_2 les deux solutions réelles distinctes de $\text{ÉC}_{b,c}$.
Il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \;=\; \lambda\, x_1^n + \mu\, x_2^n$$

— Cas $\Delta = 0$. Notons x_0 l'unique solution de $\text{ÉC}_{b,c}$ *que l'on suppose différente de* 0.
Il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \;=\; \lambda\, x_0^n \;+\; \mu\, n x_0^n$$

— Cas $\Delta < 0$. Notons $z = r e^{i\theta}$ l'une des deux solutions complexes conjuguées de $\text{ÉC}_{b,c}$.
Il existe un unique couple $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \;=\; A\, r^n \cos(n\theta) \;+\; B\, r^n \sin(n\theta)$$

7 **Question.** Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$ Déterminer u_n en fonction de n.

sol → 32

Monotonie, Bornes

L'ensemble des suites à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
Il est muni des lois $+$ et $\cdot$ définies par :

$$u+v=(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \lambda\cdot u=\lambda u_n$$

Il est également muni d'une loi $\times$ définie par $u\times v=(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Lorsque $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, on a accès à la relation d'ordre usuelle $\leqslant$. Lorsque $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, on n'a pas accès à $\leqslant$.

8 **Définition.** Soit u une suite **réelle**.
On dit que u est

— *croissante* lorsque $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_n\leqslant u_{n+1}$.

— *croissante à partir d'un certain rang* lorsque ....

— *stationnaire* lorsque ....

- Une suite u est croissante si et seulement si la suite $-u$ est décroissante.
- Une suite est *monotone* lorsqu'elle est ou bien croissante, ou bien décroissante.
- Une suite u est *strictement croissante* lorsque $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_n<u_{n+1}$.
- Exemple ?

9 **Définition.** Soit u une suite **réelle**. On dit que u est

— *majorée* lorsque $\exists\, M\in\mathbb{R},\ \forall\, n\in\mathbb{N},\ u_n\leqslant M$

— *minorée* lorsque $\exists\, m\in\mathbb{R},\ \forall\, n\in\mathbb{N},\ u_n\geqslant m$

— *bornée* lorsque u est majorée et minorée, ou encore lorsque $\exists\, K\in\mathbb{R},\quad \forall\, n\in\mathbb{N},\quad |u_n|\leqslant K$

10 **Lemme.**
Si une suite est majorée à partir d'un certain rang, alors elle est majorée.

- C'est une des premières apparitions d'un grand principe dans l'étude des suites : on peut souvent se concentrer sur ce qui se passe à partir d'un certain rang car « avant un certain rang », il n'y a qu'un nombre fini de cas à tester.

11 **Question.** Soit f définie sur $]0,+\infty[$ par $f: x\mapsto x+\ln x$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, prouver que l'équation $x+\ln x=n$ possède une unique solution que l'on notera x_n.
Calculer x_1.
Étudier la monotonie de (x_n).

12 **Question.** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0=a\in\mathbb{R} \\ \forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n^2+1\end{cases}$
Montrer que u est monotone.

13 **Question.** Soit $(S_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de terme général $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$. En utilisant que $\dfrac{1}{k^2}\leqslant\dfrac{1}{k(k-1)}$ pour $k\geqslant 2$, montrer que la suite S est majorée.

II. Limites

Suite convergente

14 **Définition.** Soit u une suite réelle.

— Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que u *tend vers* ℓ et on note $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

— On dit que u *converge* lorsque

$$\exists \ell \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

— On dit que u *diverge* lorsque u ne converge pas.

15 **Exemple.**

- On a $\dfrac{1}{n} \to 0$.
- La suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
- Une suite qui tend vers π ....
- Une suite qui tend vers π sans être monotone ....
- Une suite qui tend vers π sans être monotone en étant toujours supérieure à π ....

16 preuve **Proposition (Unicité de la limite).**
Soit u une suite et $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ tels que $u_n \to \ell$ et $u_n \to \ell'$. Alors $\ell = \ell'$.

17 **Proposition (limite nulle).** Soit u une suite et $\ell \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence :

$$u_n \to \ell \quad \Longleftrightarrow \quad |u_n - \ell| \to 0$$

- Pour la preuve :
  L'assertion de gauche est $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$
  L'assertion de droite est $\forall \varepsilon' > 0, \exists N' \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N', \Big||u_n - \ell| - 0\Big| \leqslant \varepsilon'$
- Si u est convergente, alors la suite $|u|$ est convergente. Précisément : $u_n \to \ell \implies |u_n| \to |\ell|$
  L'assertion de gauche est $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$
  L'assertion de droite est $\forall \varepsilon' > 0, \exists N' \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N', \Big||u_n| - |\ell|\Big| \leqslant \varepsilon'$
  Comme $\Big||u_n| - |\ell|\Big| \leqslant |u_n - \ell|$ (WHY ?), l'assertion de gauche implique celle de droite.

  Attention, la réciproque est fausse : ....
- Si u est convergente, alors la suite $\lfloor u \rfloor$ n'est pas nécessairement convergente.
  Précisément : $\cancel{u_n \to \ell \implies \lfloor u_n \rfloor \to \lfloor \ell \rfloor}$ Par exemple ....

18 **Proposition (CV $\Rightarrow$ bornée).**
Toute suite convergente est bornée.
La réciproque est fausse, par exemple la suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée mais ne converge pas.

19 **Proposition (caractère asymptotique de la limite).**
Soit u et v deux suites coïncidant à partir d'un certain rang et $\ell \in \mathbb{R}$.
Si $u_n \to \ell$ alors $v_n \to \ell$.

20 **Proposition (Passage à la limite dans les inégalités larges).**
Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $u' = (u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Soit ℓ et ℓ' deux réels.
On a l'implication suivante :

$$\begin{cases} u \text{ converge vers } \ell \\ u' \text{ converge vers } \ell' \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u'_n \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \ell \leqslant \ell'$$

- On a mieux :

$$\begin{cases} u \text{ converge vers } \ell \\ u' \text{ converge vers } \ell' \\ \text{à partir d'un certain rang} \quad u_n \leqslant u'_n \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \ell \leqslant \ell'$$

  Cas particulier :

$$\begin{cases} u \text{ converge vers } \ell \\ \text{à partir d'un certain rang} \quad u_n \leqslant 2022 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \ell \leqslant 2022$$

- Attention, Attention, Attention : $\begin{cases} u \text{ converge vers } \ell \\ u' \text{ converge vers } \ell' \\ \text{àpcr},\ u_n < u'_n \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \ell < \ell'$

  C'est un phénomène fondamental en analyse : les inégalités larges sont plus stables que les inégalités strictes. Il est bon d'en prendre conscience et de considérer les inégalités larges comme le cas « par défaut », et d'avoir des scrupules à chaque fois qu'on écrit une inégalité stricte.

- Pour utiliser le « passage à la limite », il faut avoir l'existence des limites !
  Sur une copie, on écrira souvent la phrase suivante : « En passant à la limite (licite, car chaque limite existe), on obtient ... ».

- **Preuve à apprendre.** Montrons que $\ell \leqslant \ell'$, c'est-à-dire que $\ell - \ell' \leqslant 0$.
  C'est équivalent à montrer (WHY, ce n'est pas du tout une évidence) :

$$\forall\, \varepsilon' > 0,\ \ell - \ell' \leqslant \varepsilon' \qquad \text{ou encore WHY?} \qquad \forall\, \varepsilon > 0,\ \ell - \ell' \leqslant 2\varepsilon$$

  Soit $\varepsilon > 0$.
  Comme $u_n \to \ell$, il existe N tel que $\quad \forall\, n \geqslant N, \quad \ell - \varepsilon \leqslant u_n$.
  Comme $u'_n \to \ell$, il existe N' tel que $\quad \forall\, n \geqslant N', \quad u'_n \leqslant \ell' + \varepsilon$.
  Par hypothèse $u_n \leqslant u'_n$, donc :

$$\forall\, n \geqslant \max(N, N'), \quad \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant u'_n \leqslant \ell' + \varepsilon$$

  En oubliant les termes du milieu, on a $\ell - \varepsilon \ \leqslant\ \ell' + \varepsilon$. D'où $\ell - \ell' \leqslant 2\varepsilon$.
  Bilan. On a prouvé

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \ell - \ell' \leqslant 2\varepsilon$$

  D'où (WHY?) $\ell - \ell' \leqslant 0$, puis $\ell \leqslant \ell'$.

21 **Proposition (antipassage à la limite dans les inégalités strictes).**
Soit u une suite telle que $u_n \to \ell$.
Si $\ell > 0$, alors à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont strictement positifs.

Limite infinie

22 **Définition.**
Soit u une suite **réelle**.

— On dit que u tend vers $+\infty$ et on note $u_n \to +\infty$ ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ lorsque

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant A$$

— On dit que u tend vers $-\infty$ et on note $u_n \to -\infty$ ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ lorsque

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant A$$

23 **Définition (Nature d'une suite).**
Une suite est ou bien convergente ou bien divergente.
Donner sa nature, c'est dire si elle est convergente ou divergente.

24 **Exemples.**

- On a $n^2 \to +\infty$.
- Une suite divergente admettant une limite ....
- Une suite qui tend vers $+\infty$ sans être croissante ....
- Une suite sans limite ....
- Une suite sans limite et non bornée ....

Limite et suite extraite

25 **Définition.**
Soit u une suite.
Une suite extraite de u est une suite v du type $v_n = u_{\varphi(n)}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.

26 **Proposition.**

— Si u admet une limite (finie ou infinie), alors toute suite extraite de u admet une limite (qui est la même que celle de u).

— Si u admet une limite L (finie ou infinie), alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) admettent une limite, qui vaut L.

— Si (u_{2n}) n'admet pas de limite **ou** si (u_{2n+1}) n'admet pas de limite, alors u n'a pas de limite.

— Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) admettent une limite différente, alors la suite u n'a pas de limite.

27 **Proposition.** Soit $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = L$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = L$, alors u admet une limite qui vaut L.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{3n} = L$ ...., alors u admet une limite qui vaut L.

III. Opérations sur les limites

Pour donner de façon plus concises les propriétés de la limite par rapport aux opérations algébriques, il est pratique d'étendre un peu l'ensemble des nombres réels en travaillant avec l'ensemble $\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$. On a

$+$	$-\infty$	$\ell'\in\mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**X**
$\ell\in\mathbb{R}$	$-\infty$	$\ell+\ell'$	$+\infty$
$+\infty$	**X**	$+\infty$	$+\infty$

$\times$	$-\infty$	$\ell'<0$	0	$\ell'>0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**X**	$-\infty$	$-\infty$
$\ell<0$	$+\infty$	$\ell\ell'$	0	$\ell\ell'$	$-\infty$
0	**X**	0	0	0	**X**
$\ell>0$	$-\infty$	$\ell\ell'$	0	$\ell\ell'$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**X**	$+\infty$	$+\infty$

28 **Proposition (limites finies ou infinies)** Soit u et u' deux suites, $\lambda\in\mathbb{R}$ et $\boxed{L, L'\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}}$.

- **loi** $\cdot$

$$u_n\to L \qquad\Longrightarrow\qquad \lambda u_n\to\begin{cases}\lambda L & \text{si } \lambda\neq 0\\ 0 & \text{si } \lambda=0\end{cases}$$

En multipliant par un scalaire une suite-ayant-une-limite, on obtient une suite ayant une limite.

- **loi** $+$

$$\begin{cases}u_n\to L\\ u'_n\to L'\\ L+L' \text{ existe}\end{cases}\qquad\Longrightarrow\qquad u_n+u'_n\to L+L'$$

La limite de la-somme-de-deux-suites-ayant-une-limite existe, sauf dans le cas $(+\infty)+(-\infty)$.

- **loi** $\times$

$$\begin{cases}u_n\to L\\ u'_n\to L'\\ LL' \text{ existe}\end{cases}\qquad\Longrightarrow\qquad u_nu'_n\to LL'$$

La limite du produit-de-deux-suites-ayant-une-limite existe, sauf dans le cas $0\times(\pm\infty)$.

- **Cas particulier des suites convergentes.** Soit u et u' deux suites, $\lambda\in\mathbb{R}$ et $\boxed{\ell,\ell'\in\mathbb{R}}$.

- **loi** $\cdot$

$$u_n\to\ell \qquad\Longrightarrow\qquad \lambda u_n\to\lambda\ell$$

En multipliant par un scalaire une suite convergente, on obtient une suite convergente.

- **loi** $+$

$$\begin{cases}u_n\to\ell\\ u'_n\to\ell'\end{cases}\qquad\Longrightarrow\qquad u_n+u'_n\to\ell+\ell'$$

La somme de deux suites convergentes est une suite convergente, et la limite de la somme est la somme des limites.

- **loi** $\times$

$$\begin{cases}u_n\to\ell\\ u'_n\to\ell'\end{cases}\qquad\Longrightarrow\qquad u_nu'_n\to\ell\ell'$$

Le produit de deux suites convergentes est une suite convergente, et la limite du produit est le produit des limites.

- On en déduit :

$$\lambda\cdot\mathrm{CV}=\mathrm{CV}\qquad \mathrm{CV}+\mathrm{CV}=\mathrm{CV}\qquad \mathrm{CV}\times\mathrm{CV}=\mathrm{CV}$$

$$\xcancel{\lambda\cdot\mathrm{DV}=\mathrm{DV}}\qquad \xcancel{\mathrm{DV}+\mathrm{DV}=\mathrm{DV}}\qquad \xcancel{\mathrm{DV}\times\mathrm{DV}=\mathrm{DV}}$$

Et enfin $\mathrm{CV}+\mathrm{DV}=\ldots$

29 **Lemme très pratique.**

— Le produit d'une suite bornée par une suite qui tend vers 0 est une suite qui tend vers 0.

— La somme d'une suite bornée et d'une suite qui tend vers $+\infty$ est une suite qui tend vers $+\infty$.

- Ce lemme est très utilisé dans la pratique, et en plus, il permet de prouver toutes les propriétés d'opérations de la page précédente.

30 **Proposition (inverse).**

— Si $\begin{cases} u_n \to 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0 \end{cases}$ alors $\dfrac{1}{u_n} \to +\infty$.

— Si $u_n \to +\infty$, alors $\dfrac{1}{u_n} \to 0$.

— Si $u_n \to \ell \neq 0$, alors $\dfrac{1}{u_n} \to \dfrac{1}{\ell}$.

31 **Principe (Passage à la limite dans les égalités).**
Si chaque suite intervenant dans une égalité admet une limite (finie ou infinie), on peut passer à la limite dans l'égalité en utilisant les règles opératoires usuelles et en déduire, si cela a du sens, une égalité d'éléments de $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

32 **Question.** Soit u une suite à termes strictement positifs, et convergente, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+2}\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$

Déterminer la limite de u.

33 **Proposition (composition de limites du type suite/fonction).**
Soit $(u_n)_{\in\mathbb{R}}$ une suite réelle.
Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle.
Soit $\ell \in \mathbb{R}$ un élément de I ou bien une borne de I.
Soit $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

$$\text{Si } \begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell \\ \lim\limits_{t \to \ell} \varphi(t) = L \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lim_{n \to +\infty} \varphi(u_n) = L$$

34 **Corollaire (image d'une suite convergente par une fonction continue).**
L'image d'une suite convergente par une fonction continue est une suite convergente.

En maths :
Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$.
Soit $\ell \in I$.

$$\text{Si } \begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell \\ \varphi \text{ continue en } \ell \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lim_{n \to +\infty} \varphi(u_n) = \varphi(\ell)$$

35 **Question.** Déterminer les limites de :

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \qquad b_n = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^n \qquad c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad d_n = \left(n + \frac{1}{n}\right)^3 \qquad e_n = \left(n + \frac{1}{n}\right)^n$$

IV. Théorèmes fondamentaux d'existence de limites

Théorème de la limite monotone

Voici un théorème que je nomme souvent abusivement « LE théorème d'existence de limite ».
Il est vraiment très puissant.

36 **Théorème de la limite monotone.**

♡ *Une suite monotone possède une limite (finie ou infinie).*

Précisément,

- Une suite croissante majorée converge. De plus, la suite est majorée par sa limite.
- Une suite croissante NON majorée tend vers $+\infty$.

Résultats analogues avec « décroissante » :

- Une suite décroissante minorée converge. De plus, la suite est minorée par sa limite.
- Une suite décroissante NON minorée tend vers $-\infty$.

37 **Question.**

Soit $(H_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de terme général $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

- Montrer que la suite H est croissante.
- Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$.
- Que peut-on en déduire sur la limite de H ?

Théorèmes d'existence de limite avec valeur de la limite

38 **Théorème des Gendarmes.** Soit u, g, d trois suites et $\ell \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \forall\, n \in \mathbb{N},\ g_n \leqslant u_n \leqslant d_n \quad \text{(ou encore àpcr)} \\ g_n \to \ell \\ d_n \to \ell \end{cases} \implies \quad \text{la limite de } u \text{ existe et vaut } \ell$$

39 **Théorème de majoration/minoration**

$$\begin{cases} \forall\, n \in \mathbb{N},\ g_n \leqslant u_n \quad \text{(ou encore àpcr)} \\ g_n \to +\infty \end{cases} \implies \quad \text{la limite de } u \text{ existe et vaut } +\infty$$

$$\begin{cases} \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant d_n \quad \text{(ou encore àpcr)} \\ d_n \to -\infty \end{cases} \implies \quad \text{la limite de } u \text{ existe et vaut } -\infty$$

40 **Proposition (corollaire du th. des Gendarmes)**
On a :

$$\begin{cases} \text{àpcr, } |u_n - \ell| \leqslant w_n \\ w_n \to 0 \end{cases} \implies \quad u_n \to \ell$$

41 **Question.** Montrer l'implication

$$\begin{cases} \text{àpcr } |a_n - b_n| \leqslant w_n \\ w_n \to 0 \\ b_n \to \ell \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad a_n \to \ell$$

42 **Proposition (Suite géométrique).** Soit $q \in \mathbb{R}$.

— **Limite.**

$$\text{La suite } (q^n)_{n\in\mathbb{N}} \begin{cases} \text{n'a pas de limite} & \text{si } q \leqslant -1 \\ \text{tend vers } 0 & \text{si } -1 < q < 1 \\ \text{est constante égale à } 1 & \text{si } q = 1 \\ \text{tend vers } +\infty & \text{si } q > 1 \end{cases}$$

En particulier, la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 ssi $q \in \,]-1,1[$.

— **Nature.**

La suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi $(q \in \,]-1,1[$ ou $q = 1)$

La suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge ssi $(q \leqslant -1$ ou $q > 1)$

V. Suites adjacentes

43 **Lemme.** Soit u et v deux suites.

$$\begin{cases} u \text{ est croissante} \\ v \text{ est décroissante} \\ v-u \text{ positive} \end{cases} \implies u \text{ et } v \text{ convergent}$$

44 sol → 33 **Question.** Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right) \qquad \text{et} \qquad v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)u_n$$

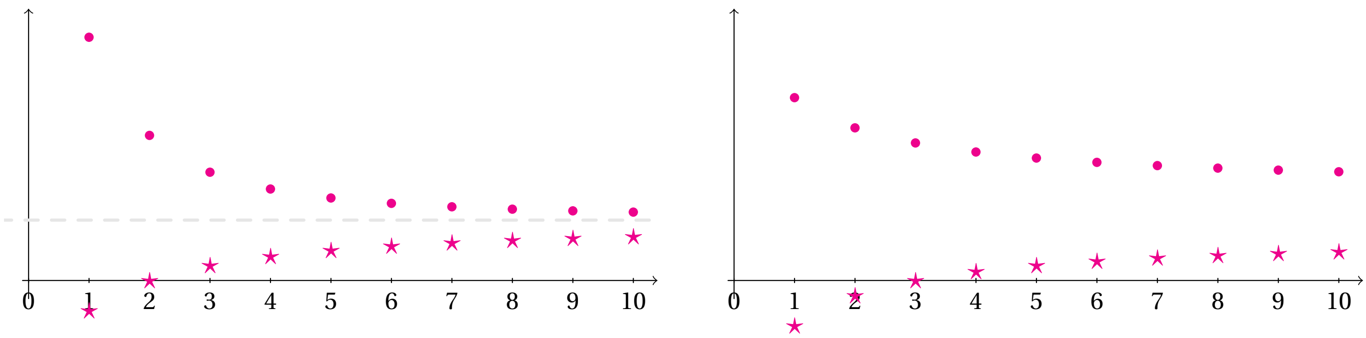
En reprenant les mêmes idées que la preuve du lemme, montrer que les suites u et v convergent.

45 **Définition.** Deux suites sont adjacentes lorsque

— l'une est croissante

— l'autre est décroissante

— leur différence tend vers 0



46 **Théorème (convergence des suites adjacentes).** Soit u et v deux suites.

$$\begin{cases} u \text{ est croissante} \\ v \text{ est décroissante} \\ v-u \text{ tend vers } 0 \end{cases} \implies \begin{cases} u \text{ et } v \text{ converge vers } \ell \in \mathbb{R} \\ \forall\, p,q \in \mathbb{N},\ u_p \leqslant \ell \leqslant v_q \end{cases}$$

- On peut retenir un énoncé un peu moins précis, mais intéressant :

  ♡ *Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.*

47 sol → 34 **Question.** Soit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites définies par :

$$C_n = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+n} \qquad\qquad D_n = \sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k} = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+n}$$

Montrer que C et D sont adjacentes.

48 **Définition (Approximation décimale).**
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Le nombre décimal $r_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ vérifie $\quad r_n \leqslant x < r_n + \dfrac{1}{10^n}$.
Ce nombre décimal r_n est appelé *approximation décimale par défaut* de x à la précision 10^{-n}.
La suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de *rationnels*, croissante, qui converge vers le réel x.

- Avec les notations de la définition précédente, le nombre $r_n + 10^{-n}$ est appelé *approximation décimale par excès* de x à la précision 10^{-n}.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors il existe une suite *d'irrationnels* qui converge vers x.
  En effet, considérons le réel $x' = x - \sqrt{2}$. Alors sa suite $(r'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des approximations décimales converge vers $x - \sqrt{2}$. Par opérations, la suite $(r'_n + \sqrt{2})_{n\in\mathbb{N}}$ est une *suite d'irrationnels* qui converge vers x.
- Voici un tableau donnant, pour quelques constantes usuelles, les valeurs décimales approchées à 10^{-3} près par défaut et par excès :

	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	π	e	ln(2)
par défaut à 10^{-3} près	1,000	1,414	1,732	3,141	2,718	0,693
par excès à 10^{-3} près	1,001	1,415	1,733	3,142	2,719	0,694

49 **Théorème des segments emboîtés.**
Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de segments non vides $I_n = [a_n, b_n]$ tels que
— $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} \subseteq I_n$
— la longueur $\ell_n = b_n - a_n$ de I_n vérifie $\ell_n \to 0$.

Alors les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers un même point c, qui est l'unique point appartenant à tous les intervalles $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{c\}$.

- L'énoncé est plutôt à comprendre qu'à apprendre. Il se reformule en une seule phrase :
  L'intersection d'une suite décroissante de segments non vides dont la longueur tend vers 0 *est un singleton.*
- **Preuve.**
  — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+1} \subset I_n$, donc $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$.
  Donc la suite (a_n) est croissante et la suite (b_n) est décroissante.
  — Par hypothèse $b_n - a_n \to 0$.

  On en déduit que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
  Ainsi, elles convergent vers une même limite.
  Notons c leur limite commune.

  — On a (WHY?) $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant c \leqslant b_n \quad$ c'est-à-dire $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ c \in I_n$
  Donc $c \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$.
  — Pour l'autre inclusion, prenons $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$.
  On a alors $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant x \leqslant b_n$.
  Passons à la limite dans les inégalités larges (licite, car chaque terme admet une limite), on obtient $c \leqslant x \leqslant c$, d'où $x = c$.
  On peut aussi utiliser le théorème des Gendarmes : les deux suites des membres extrêmes convergente vers la même limite c donc il en est de même de la suite au milieu ; comme cette suite est *constante* égale à x, on obtient l'égalité entre x et c.

  Bilan : $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{c\}$

VI. Extension des notions aux suites à valeurs complexes

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On définit :

— la *partie réelle* de u, notée $\operatorname{Re} u$, la suite de terme général $\operatorname{Re} u_n$;

— la *partie imaginaire* de u, notée $\operatorname{Im} u$, la suite de terme général $\operatorname{Im} u_n$;

— la suite *conjuguée de* u, notée $\overline{u}$, la suite de terme général $\overline{u_n}$;

— la suite *module de* u, notée $|u|$, la suite de terme général $|u_n|$.

50 **Définition.**

— Une suite complexe u est *bornée* lorsque la suite *réelle* module de u est majorée, c'est-à-dire lorsque : $\exists K \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant K$.

— Une suite complexe u *converge* lorsqu'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ telle que la suite *réelle* module de $u - \ell$ tend vers 0.

$$\exists \ell \in \mathbb{C}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

51 **Proposition.** Soit u une suite complexe.

— **Unicité de la limite.** S'il existe $\ell, \ell' \in \mathbb{C}$ tels que $u_n \to \ell$ et $u_n \to \ell'$ alors $\ell = \ell'$.

— **Passage au module.** Si u converge vers $\ell \in \mathbb{C}$, alors $|u|$ converge vers $|\ell|$.

Si la suite u converge vers ℓ, la suite réelle « module de u » converge vers « module de ℓ ».

— **CV⇒ borné.** Si u converge, alors u est bornée.

- Pour la preuve de l'unicité de la limite, on peut utiliser un raisonnement par l'absurde et utiliser l'inégalité triangulaire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\ell - \ell'| \leqslant |u_n - \ell| + |u_n - \ell'|$$

pour écrire à partir d'un certain rang $|\ell - \ell'| \leqslant \varepsilon + \varepsilon$ avec ε bien choisi, par exemple $\varepsilon = \dfrac{|\ell - \ell'|}{3}$; et ensuite aboutir à une absurdité.

- Pour la preuve de l'unicité de la limite, on peut s'appuyer sur les résultats démontrés sur les suites réelles. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant |\ell - \ell'| \leqslant |u_n - \ell| + |u_n - \ell'|$$

Comme les suites *réelles* de terme général $|u_n - \ell|$ et $|u_n - \ell'|$ tendent vers 0, par passage à la limite dans les inégalités larges (licite), on en déduit $0 \leqslant |\ell - \ell'| \leqslant 0$, d'où $\ell = \ell'$.

- L'énoncé de passage au module sera généralisé en Spé dans les espaces vectoriels normés. Pour la preuve, on utilise la seconde inégalité triangulaire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Big| |u_n| - |\ell| \Big| \leqslant |u_n - \ell|$$

Comme la suite *réelle* de terme général $|u_n - \ell|$ tend vers 0, le théorème des Gendarmes appliqué aux suites réelles permet d'obtenir que la suite *réelle* de terme général $|u_n| - |\ell|$ tend vers 0, donc $|u_n| \to |\ell|$.

- Pour la preuve de « CV⇒ borné », on peut utiliser le passage au module en disant :

Comme u converge, la suite *réelle* $|u|$ converge, donc est bornée (on sait déjà que toute suite réelle convergente est bornée).

En particulier, la suite réelle $|u|$ est majorée.

Par définition 50, on en déduit que la suite complexe u est bornée.

52 **Proposition.** Soit u une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$.

— La suite *complexe* u est bornée si et seulement si les suites *réelles* $\operatorname{Re} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont bornées.

— La suite *complexe* u converge si et seulement si les suites *réelles* $\operatorname{Re} u$ et $\operatorname{Im} u$ convergent. Précisément, pour $\ell \in \mathbb{C}$, on a l'équivalence :

$$u_n \to \ell \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Big(\operatorname{Re} u_n \to \operatorname{Re} \ell \ \text{ et } \ \operatorname{Im} u_n \to \operatorname{Im} \ell\Big)$$

- Par exemple, la suite u définie par $u_n = 1 + n^2\mathrm{i}$ ne converge pas (donc diverge) car la suite réelle $\operatorname{Im} u$ diverge (en effet, $\operatorname{Im} u$ est la suite $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$).

- La suite u définie par $u_n = \left(3 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^n}\right) + \left(7 + \dfrac{1}{\ln n}\right)\mathrm{i}$ converge vers $3 + 7\mathrm{i}$ car

  — la suite *réelle*, partie réelle de u, converge vers 3

  — la suite *réelle*, partie imaginaire de u, converge vers 7

- Le deuxième point de l'énoncé permet de démontrer facilement que les opérations sur les limites finies se généralisent aux suites complexes.

  Précisément, si u et u' sont deux suites complexes tendant respectivement vers $\ell, \ell' \in \mathbb{C}$,

  ⋆ la suite $u + u'$ tend vers $\ell + \ell'$. En effet, la suite *réelle* $\operatorname{Re}(u + u')$ vaut $\operatorname{Re} u + \operatorname{Re} u'$ et tend (par opérations sur les limites de suites réelles) vers $\operatorname{Re} \ell + \operatorname{Re} \ell'$ qui vaut $\operatorname{Re}(\ell + \ell')$. Même argument pour la partie imaginaire. On a donc

  $$\operatorname{Re}(u_n + u'_n) \to \operatorname{Re}(\ell + \ell') \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im}(u_n + u'_n) \to \operatorname{Im}(\ell + \ell')$$

  et la proposition précédente permet de conclure.

  ⋆ la suite uu' tend vers $\ell\ell'$. En effet, la suite *réelle* $\operatorname{Re}(uu')$ vaut $\operatorname{Re} u \operatorname{Re} u' - \operatorname{Im} u \operatorname{Im} u'$ et tend (par opérations sur les limites de suites réelles) vers $\operatorname{Re} \ell \operatorname{Re} \ell' - \operatorname{Im} \ell \operatorname{Im} \ell'$ qui vaut $\operatorname{Re}(\ell\ell')$. Même argument pour la suite $\operatorname{Im}(uu') = \operatorname{Re} u \operatorname{Im} u' + \operatorname{Re} u' \operatorname{Im} u$. On a donc

  $$\operatorname{Re}(u_n u'_n) \to \operatorname{Re}(\ell\ell') \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im}(u_n u'_n) \to \operatorname{Im}(\ell\ell')$$

  et la proposition précédente permet de conclure.

- Attention, il n'y a pas de notion de suite complexe tendant vers $\pm\infty$.

- Pour résumer, on peut garder à l'esprit qu'une bonne partie des notions et propriétés valables sur les suites réelles se généralisent aux suites complexes, **sauf celles qui font intervenir des inégalités**.

  Ainsi, à propos d'une suite complexe, on n'utilisera surtout **pas** :

  — ~~la notion de suite monotone ;~~
  — ~~la notion de suite majorée et/ou minorée ;~~
  — ~~la notion de suite divergeant vers $+\infty$ ou $-\infty$;~~
  — ~~le théorème d'encadrement ;~~
  — ~~les suites adjacentes.~~

53 **Proposition (Suite géométrique).** Soit $a \in \mathbb{C}$.

— La suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\begin{cases} \text{est nulle à partir du rang 1} & \text{si } a = 0 \\ \text{tend vers } 0 & \text{si le module de } a \text{ est} < 1 \\ \text{est constante égale à } 1 & \text{si } a = 1 \\ \text{n'a pas de limite} & \text{sinon} \end{cases}$

En particulier, la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 ssi $|a| < 1$.

— **Nature.**
La suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi ($|a| < 1$ ou $a = 1$)

La suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge sinon.

VII. Suite récurrente

Retour sur le mode de définition d'une suite

- Une suite peut être définie
  — de manière explicite ; par exemple la suite u de terme général $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
  — de manière implicite ; par exemple la suite u dont le terme général u_n est l'unique réel $x \in [0,1]$ tel que $x^n + x - 1 = 0$.
  — par récurrence ; par exemple la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (n+1)\, u_n. \end{cases}$

- On pourrait être tenté de dire qu'en posant $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$, on définit une suite.

  Mais il n'en est rien !

  Contemplez $\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{u_n - 1} \end{cases}$ Pour une telle suite, on aurait $u_1 = 2$, puis $u_2 = 1$, puis $u_3 = \dfrac{1}{0}\ldots$

  Autre exemple, $\begin{cases} u_0 = 9 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} - 2 \end{cases}$. On aurait $u_1 = 1$, puis $u_2 = -1$, puis $u_3 = \sqrt{-1} - 2\ldots$

54 **Théorème (définition d'une suite par récurrence).**
Soit E un ensemble non vide et $f : E \to E$ une application.
Pour tout $a \in E$, il existe une unique suite $u \in E^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

Une telle suite est dite *définie par récurrence.*

- Une notion importante pour l'étude de ce genre de suites est celle de partie stable.
  On dit que $X \subset E$ est une partie stable par f lorsque $\forall\, x \in X,\ f(x) \in X$.
- Pour définir une suite par récurrence à partir d'une application f, on cherche une partie X du domaine de définition de f qui soit stable par f et qui contienne le premier terme.
- On peut étendre le théorème précédent de la façon suivante. Étant donné $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de E dans E, alors pour tout $a \in E$, il existe une unique suite telle que $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f_n(u_n). \end{cases}$

  Typiquement, la suite $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{n + u_n}{n+1} \end{cases}$ rentre dans ce cadre.

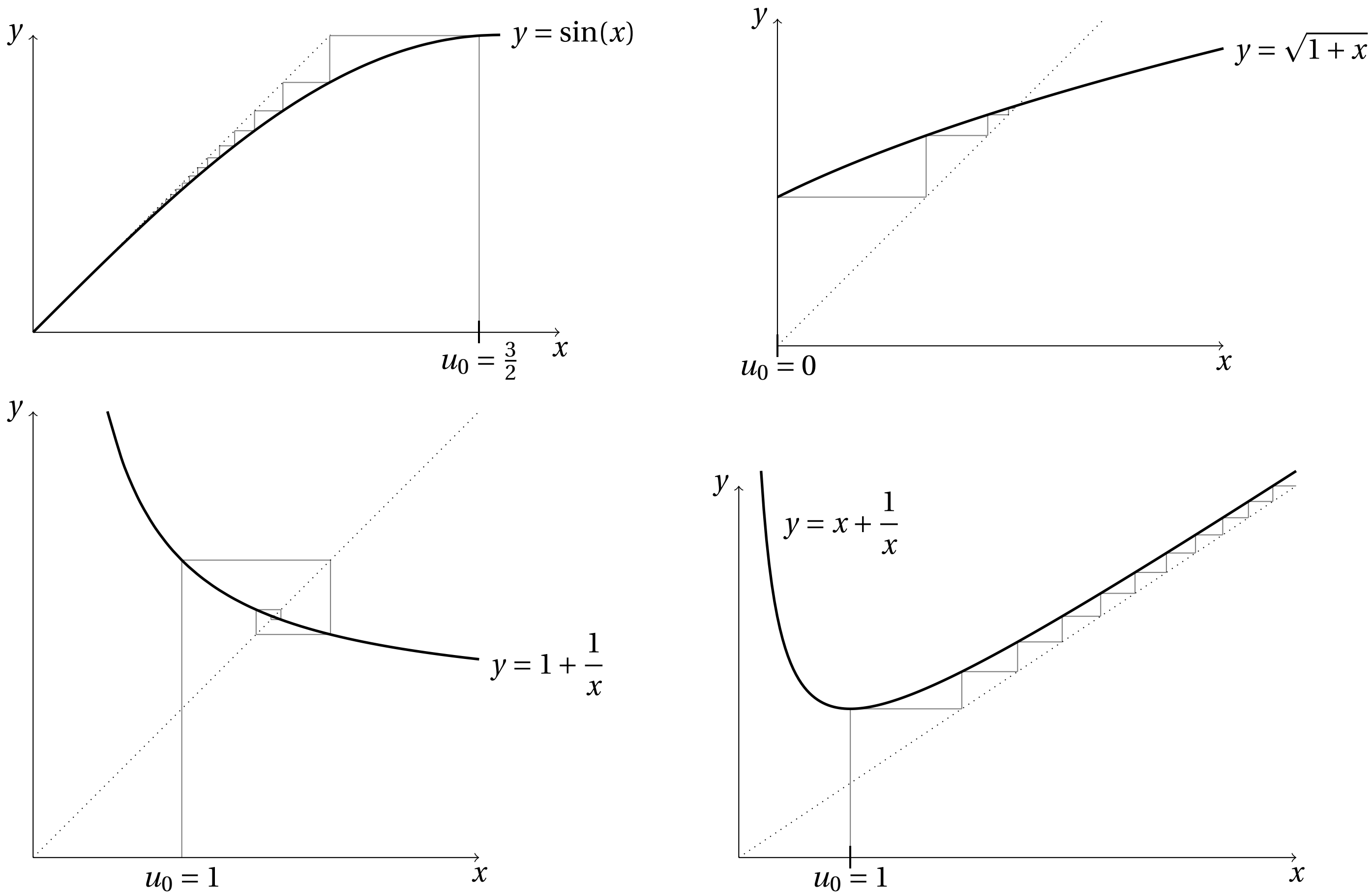
55 **Proposition.**
Soit f une fonction réelle de la variable réelle.
Soit J un intervalle **stable** par f.
Une suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in J \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

est bien définie et est dite *récurrente d'ordre* 1.

- Si u est une suite vérifiant une relation $u_{n+1} = f(u_n)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = (\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}})(u_0)$
- Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont encore des suites récurrentes d'ordre 1, mais associées à la fonction $f \circ f$.
- En revanche, une suite extraite quelconque d'une suite récurrente d'ordre 1 n'est pas en général une suite récurrente d'ordre 1.

56 **Question.**
Voici quatre dessins. Donner la suite mise en jeu, et conjecturer sa nature.



57 **Question.** Justifier l'existence de la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1 + u_n) \end{cases}$

Puis étudier la monotonie de u, en déduire sa nature.

58 **Question.**

Soit u une suite définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = n \sin^2(u_n) \end{cases}$

Étudier la nature de u.

59 **Proposition à ne pas apprendre, mais à redémontrer dans chaque cas particulier.**

Soit f une fonction réelle de la variable réelle et J un intervalle stable par f.

Soit u la suite $\begin{cases} u_0 \in J \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Voici trois situations non exhaustives.

i) **Si $f(x) - x$ est de signe constant.**

Si $\forall\, x \in J,\ x \leqslant f(x)$, alors u est croissante.

Si $\forall\, x \in J,\ f(x) \leqslant x$, alors u est décroissante.

Autrement dit,

si $\varphi : x \longmapsto f(x) - x$ est de signe constant sur J, alors u est monotone (croissante si φ est positive et décroissante sinon).

ii) **Si f est croissante.**

Si f est croissante sur J, alors u est monotone et son sens de variation est donné par la position de u_1 par rapport à u_0.

Autrement dit,

si f croissante sur J et si $u_0 \leqslant u_1$, alors u est croissante.
si $u_0 \geqslant u_1$, alors u est décroissante.

iii) **Si f est décroissante.**

Si f est décroissante sur J, alors les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont montones de sens de variation contraire. Le sens de variation de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ dépend de la position de u_2 par rapport à u_0.

Autrement dit,

si f décroissante sur J et si $u_0 \leqslant u_2$, alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
si $u_0 \geqslant u_2$, alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

iv) **Cas f quelconque.**

À étudier au cas par cas.

60 **Proposition (cas des suites convergentes)**

Soit f une fonction réelle de la variable réelle et J un intervalle stable par f.

Soit u la suite $\begin{cases} u_0 \in J \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Si J est un intervalle **fermé** et si u converge vers ℓ, alors $\ell \in J$.

Si de plus, f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.

- Un intervalle fermé est défini par des inégalités **larges**. Il est du type $[a, b]$ ou $]-\infty, b]$ ou $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, +\infty[$.

VIII. Un peu d'analyse asymptotique

Croissances comparées des suites tendant vers $+\infty$

61 **Théorème (croissances comparées)**
Soit $\alpha, \beta > 0$ et $a > 1$.
Les suites ci-dessous tendent vers $+\infty$

$$(\ln n)^\beta \qquad n^\alpha \qquad a^n \qquad n! \qquad n^n$$

et on a :

- La preuve des croissances comparées pour les suites repose soit sur la preuve faite pour les fonctions, soit sur une preuve indépendante qui utilise le lemme suivant, appelé *lemme de d'Alembert pour les suites* :

  Lemme de d'Alembert pour les suites. On a

$$\left\{\begin{array}{l} u \text{ une suite strictement positive} \\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \quad \textbf{avec } \ell < 1 \end{array}\right. \implies u_n \to 0$$

- Soit v une suite telle que $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ ne dépend pas de n. Disons $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = q$.
  Une telle suite s'appelle une suite géométrique !
  Si $q \in \,]-1,1[$, alors $v_n \to 0$.
  Ceci est facile. La lemme de d'Alembert est en quelque sorte une généralisation de cette remarque facile.

62 **Proposition.** Soit $q \in \mathbb{R}$.

— **Limite.**

$$\text{La suite } (nq^n)_{n\in\mathbb{N}} \left\{\begin{array}{rl} \text{n'a pas de limite} & \text{si } q \leqslant -1 \\ \text{tend vers } 0 & \text{si } -1 < q < 1 \\ \text{tend vers } +\infty & \text{si } q \geqslant 1 \end{array}\right.$$

En particulier, la suite $(nq^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 ssi $q \in \,]-1,1[$.

— **Nature.**
La suite $(nq^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi $q \in \,]-1,1[$.

La suite $(nq^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge ssi ($q \leqslant -1$ ou $q \geqslant 1$)

Relation de comparaison

Les suites sont à valeurs réelles ou complexes.

63 **Définition.** Étant donné deux suites u et v, on dit que :

- u est *dominée* par v lorsqu'il existe une suite b *bornée* telle que $u_n = b_n v_n$ àpcr ; on note $u_n = \mathrm{O}(v_n)$.
- u est *négligeable* devant v lorsqu'il existe une suite ε *tendant vers* 0 telle que $u_n = \varepsilon_n v_n$ àpcr ; on note $u_n = \mathrm{o}(v_n)$.
- u est *équivalente* à v lorsqu'il existe une suite α *tendant vers* 1 telle que $u_n = \alpha_n v_n$ àpcr ; ou encore lorsque $u_n - v_n = \mathrm{o}(v_n)$; on note $u_n \sim v_n$.

- L'écriture $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ se lit « u_n est un grand Ô de v_n, au voisinage de $+\infty$ » ou « u_n est dominée par v_n, au voisinage de $+\infty$ »
- L'écriture $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ se lit « u_n est un petit Ô de v_n, au voisinage de $+\infty$ » ou « u_n est négligeable devant v_n, au voisinage de $+\infty$ »
-

Les caractérisations suivantes donnent les moyens pratiques pour démontrer de telles relations.

64 **Proposition ⋆ (faisant presque office de définition).** Soit u et v deux suites. On suppose que la suite v ne s'annule pas àpcr.

⋆ $u_n = \mathrm{O}(v_n) \iff \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée

⋆ $u_n = \mathrm{o}(v_n) \iff \dfrac{u_n}{v_n} \to 0$

⋆ $u_n \sim v_n \iff \dfrac{u_n}{v_n} \to 1$

- On a $n^3 = \mathrm{o}(n^5)$. On a aussi $n^3 = \mathrm{o}(7n^5)$. On a $n^3 = \mathrm{O}(7n^3)$.
- On a $\dfrac{1}{n^5} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.
- On a $\qquad u_n = \mathrm{o}(1) \iff \dots$
- Des exemples.

$$u_n = n^5 + 2^n \qquad u_n = n^5 + 2^n + 7 \qquad u_n = \frac{1}{n^5} + \frac{1}{2^n} \qquad u_n = \frac{1}{n^5} + \frac{1}{2^n} + 7$$

65 **Warning.**

L'égalité $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ signifie que la suite u *appartient* à l'*ensemble* des suites négligeables devant v.

Autrement dit, l'**égalité** « $= \mathrm{o}(v_n)$ » est une **notation** pour signifier une **appartenance à un ensemble** (l'ensemble des suites négligeables devant v).

Cette remarque doit vous faire comprendre que : $\cancel{\begin{cases} u_n = \mathrm{o}(v_n) \\ u'_n = \mathrm{o}(v_n) \end{cases} \implies u_n = u'_n}$

En effet,

$$\begin{cases} u_n = \mathrm{o}(v_n) \\ u'_n = \mathrm{o}(v_n) \end{cases} \quad \text{signifie} \quad \begin{cases} u \in \{\text{suites négligeables devant } v\} \\ u' \in \{\text{suites négligeables devant } v\} \end{cases}$$

Donc aucune raison pour que $u = u'$, ni même que $u_n = u'_n$ au voisinage de $+\infty$.

66

Proposition (lien entre o et ∼)

♠ On a $b_n = o(a_n) \implies a_n + b_n \sim a_n$ — Passer d'un petit ô à un ∼

Ce que l'on peut résumer abusivement en $a_n + o(a_n) \sim a_n$

♡ On a $\begin{cases} u_n = \beta v_n + o(v_n) \\ \beta \neq 0 \end{cases} \implies u_n \sim \beta v_n$ — Trouver un ∼ à partir d'un petit ô

♢ On a $u_n \sim v_n \implies u_n = v_n + o(v_n)$ — Passer d'un ∼ à un petit ô

♣ On a $\begin{cases} r_n = o(v_n) \\ v_n \sim v'_n \end{cases} \implies r_n = o(v'_n)$ — Transformer un petit ô

67

Proposition (propriétés immédiates)
Soit u et v deux suites.

(i) $\begin{cases} u \text{ converge vers } \ell \\ \ell \neq 0 \end{cases} \implies u_n \underset{+\infty}{\sim} \ell$

(ii) $u_n \underset{+\infty}{\sim} 0 \iff$ àpcr $u_n = 0$

En écrivant $u_n \sim 0$, ...

(iii) $\begin{cases} v \text{ est bornée} \\ u_n \to +\infty \end{cases} \implies u_n + v_n \sim u_n$ En particulier, $\begin{cases} v \text{ converge} \\ u_n \to +\infty \end{cases} \implies u_n + v_n \sim u_n$

(iv) Si deux suites sont équivalentes et si l'une possède une limite (finie ou pas), l'autre possède la même limite :

$$\begin{cases} u_n \sim v_n \\ v_n \to L \end{cases} \implies u_n \to L$$

(v) En général, $u_n \not\sim u_{n+1}$ (bien que, lorsque cela a du sens, on a $\lim u_n = \lim u_{n+1}$)

Penser à $u_n =$ ....

(vi) **Partage de non nullité** $\begin{cases} u_n \sim v_n \\ v_n \neq 0 \text{ àpcr} \end{cases} \implies u_n \neq 0$ àpcr

(vii) **Partage de signe** $\begin{cases} u_n \sim v_n \\ v_n \geqslant 0 \text{ àpcr} \end{cases} \implies u_n \geqslant 0$ àpcr

Les deux propositions suivantes n'est pas à apprendre, mais à comprendre.
On s'en servira comme une « boîte à outils ».

68 **Proposition (boîte à outils - règles de calcul avec o)**

(1) **Transitivité**

$$\begin{cases} u_n = o(v_n) \\ v_n = o(w_n) \end{cases} \implies u_n = o(w_n)$$

Si une suite u est négligeable devant une suite v, elle-même négligeable devant une suite w, alors u est négligeable devant w.

(2) **Somme**

$$\begin{cases} u_n = o(w_n) \\ u'_n = o(w_n) \end{cases} \implies u_n + u'_n = o(w_n)$$

La somme de deux suites négligeables devant w est négligeable devant w.

(3) **Multiplication par un scalaire**

$$u_n = o(w_n) \implies \lambda u_n = o(w_n)$$

La multiplication par un scalaire d'une suite négligeable devant w est négligeable devant w.

(4) **Multiplication par une suite** (s_n)

$$u_n = o(v_n) \implies u_n s_n = o(v_n s_n)$$

La relation de négligeabilité est compatible avec la multiplication des suites.

(5) **Produit**

$$\begin{cases} u_n = o(v_n) \\ u'_n = o(v'_n) \end{cases} \implies u_n u'_n = o(v_n v'_n)$$

(6) **Passage à l'inverse**

$$\begin{cases} u_n = o(v_n) \\ (v_n \neq 0 \text{ àpcr}) \\ u_n \neq 0 \text{ àpcr} \end{cases} \implies \frac{1}{v_n} = o\left(\frac{1}{u_n}\right)$$

(7) **Simplification par une constante multiplicative**

$$u_n = o(\mu v_n) \implies u_n = o(v_n)$$

« Le petit ô absorbe les constantes multiplicatives ».

69

Proposition (boîte à outils - règles de calcul avec $\sim$)

(1) **Transitivité**

$$\left\{\begin{array}{l} u_n \sim v_n \\ v_n \sim w_n \end{array}\right. \implies u_n \sim w_n$$

(2) **On ne peut pas sommer des équivalents !**

$$\cancel{\left\{\begin{array}{l} u_n \sim v_n \\ u'_n \sim v'_n \end{array}\right. \implies u_n+u'_n \sim v_n+v'_n}$$

Ni même ajouter une suite (s_n)

$$\cancel{u_n \sim v_n \implies u_n + s_n \sim v_n + s_n}$$

Penser à $s_n = -u_n$

Ni même ajouter une constante

$$\cancel{u_n \sim v_n \implies u_n + \ell \sim v_n + \ell}$$

Penser à $u_n = -\ell + \frac{1}{n}$ et $v_n = -\ell + \frac{1}{n^2}$

(3) **Multiplication par un scalaire** λ

$$u_n \sim v_n \implies \lambda u_n \sim \lambda v_n$$

(4) **Multiplication par une suite** (s_n)

$$u_n \sim v_n \implies s_n u_n \sim s_n v_n$$

(5) **Produit**

$$\left\{\begin{array}{l} u_n \sim v_n \\ u'_n \sim v'_n \end{array}\right. \implies u_n u'_n \sim v_n v'_n$$

(6) **Passage à l'inverse**

$$\left\{\begin{array}{l} u_n \sim v_n \\ v_n \neq 0 \text{ àpcr} \end{array}\right. \implies \frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{v_n}$$

(7) **NON simplification par une constante multiplicative**

$$\cancel{u_n \sim \mu v_n \implies u_n \sim v_n}$$

(8) **Élévation à une puissance fixe (indépendante de** n**)**

$$\left\{\begin{array}{l} u_n \sim v_n \\ v_n > 0 \text{ àpcr} \end{array}\right. \implies u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$$

(9) **On ne peut pas élever à une puissance dépendant de** n

$$\cancel{\left\{\begin{array}{l} u_n \sim v_n \\ v_n > 0 \text{ àpcr} \end{array}\right. \implies u_n^{\alpha_n} \sim v_n^{\alpha_n}}$$

Penser à ....

IX. Compléments

Caractérisation séquentielle

70 **Proposition (caractérisation séquentielle de la borne sup).**
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Soit $s \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence

$$s = \sup A \iff \begin{cases} s \text{ est un majorant de } A : & \forall a \in A,\ a \leqslant s \\ s \text{ est la limite d'une suite d'éléments de } A : & \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}},\ a_n \to s \end{cases}$$

71 **Proposition (caractérisation séquentielle de la densité).**
Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
La partie A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout réel est limite d'une suite d'éléments de A.

Théorème de Cesàro

72 **Théorème.** Soit u une suite.
Soit v la suite de terme général $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ (ainsi v_n est la moyenne des n premiers termes de la suite u).
Si u converge vers ℓ, alors v converge vers ℓ.

- Pour démontrer ce théorème, on ne peut pas utiliser les règles opératoires. Il faut donc *revenir* à la définition avec les ε. Ce qui est en fait une preuve un peu difficile pour un élève !
- **Schéma de la preuve.**
  Étape 1 : on suppose $\ell = 0$.
  Supposons que la suite u converge vers 0.
  Montrons que la suite v converge vers 0, c'est-à-dire montrons que
  $$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad |v_n| \leqslant \varepsilon$$
  On commence donc par fixer $\varepsilon > 0$.
  — Justifier l'existence de $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\quad \forall n \geqslant N, \quad |v_n| \leqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{N} |u_k| + \dfrac{\varepsilon}{2}$
  — Justifier l'existence de $N' \in \mathbb{N}^*$ tel que $\quad \forall n \geqslant N', \quad \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{N} |u_k| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}.$
  — Conclure.
  Étape 2 : on suppose ℓ quelconque.
- Montrer que la réciproque du théorème de Césaro n'est pas vraie en prenant $u_n = (-1)^n$.

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Ce théorème est largement hors-programme, mais vous pouvez lire la preuve !
Voilà ce qu'il raconte :

De toute suite bornée, on peut extraire une suite convergente.

Idée de la preuve.

— Procéder par *dichotomie* en construisant par récurrence une suite de segments $I_n = [a_n, b_n]$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite u ait une infinité de termes dans I_n et $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$.

— Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Ensuite, notant λ la limite commune, construire $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $u_{\varphi(n)} \to \lambda$.

Notation.
Si $I = [a, b]$ est un segment, on notera $\mathrm{Long}(I) = b - a$ sa longueur.
Soit $c = \frac{a+b}{2}$ le milieu de I.
On pose $g(I) = [a, c]$ (« la moitié gauche de I ») et $d(I) = [c, d]$ (« la moitié droite de I »).
On a :

— $g(I) \subset I$ et $d(I) \subset I$;

— on a $\mathrm{Long}(g(I)) = \mathrm{Long}(d(I)) = \dfrac{\mathrm{Long}(I)}{2}$.

Preuve. Soit u une suite bornée. Désignons par m un minorant et par M un majorant de u.

⋆ Construction de la suite de segments $I_n = [a_n, b_n]$.

  — Pour cela on commence par poser $I_0 = [m, M]$. Le segment I_0 vérifie bien la propriété souhaitée, car il contient tous les termes de la suite.

  — Pour $n \in \mathbb{N}$, supposons construit un segment $I_n = [a_n, b_n]$ contenant une infinité de termes de la suite.
  Puisque $I_n = g(I_n) \cup d(I_n)$, au moins l'un des segments $g(I_n)$ ou $d(I_n)$ contient une infinité de termes de u.
  Posons alors :

$$I_{n+1} = \begin{cases} g(I_n) & \text{si } g(I_n) \text{ contient une infinité de termes de } u\,; \\ d(I_n) & \text{sinon.} \end{cases}$$

  Il s'ensuit que I_{n+1} contient une infinité de termes de u.

Remarquons que l'on a $I_{n+1} \subset I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, car I_{n+1} vaut $g(I_n)$ ou $d(I_n)$.

⋆ Notons $I_n = [a_n, b_n]$ et montrons que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

  — Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $I_{n+1} \subset I_n$, on a $a_n \leqslant a_{n+1}$ et $b_{n+1} \leqslant b_n$.
  La suite a est donc croissante et la suite b décroissante.

  — Soit $n \in \mathbb{N}$.
  On a $\mathrm{Long}(I_{n+1}) = \dfrac{\mathrm{Long}(I_n)}{2}$ (WHY ?).
  On en déduit (WHY ?), $\mathrm{Long}(I_n) = \dfrac{\mathrm{Long}(I_0)}{2^n}$, d'où $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} \to 0$.

Cela prouve que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Notons λ la limite commune.

⋆ Construisons par récurrence une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{\varphi(n)} \in I_n.$$

  — On pose $\varphi(0) = 0$. On a évidemment $u_{\varphi(0)} \in I_0$.

— Pour $n \in \mathbb{N}$, supposons avoir défini $\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(n-1)$ vérifiant :

$$\varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(n-1) \quad \text{et} \quad \forall\, p \in [\![0, n-1]\!], \quad u_{\varphi(p)} \in I_p.$$

Comme l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_n\}$ est infini, il n'est pas majoré et donc contient des éléments strictement supérieurs à $\varphi(n-1)$. Choisissons l'un de ces éléments comme valeur de $\varphi(n)$. On a alors :

$$\varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(n-1) < \varphi(n) \quad \text{et} \quad \forall\, p \in [\![0, n]\!], \quad u_{\varphi(p)} \in I_p.$$

On a ainsi défini une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante vérifiant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{\varphi(n)} \in I_n.$$

Ainsi, par définition de la suite (I_n), on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n.$$

Comme les suites (a_n) et (b_n) ont même limite λ, on obtient $u_{\varphi(n)} \to \lambda$ d'après le théorème des Gendarmes.

On a bien trouvé une suite extraite de u qui converge !

Suites numériques

preuve et éléments de correction

3

Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n + 4 \end{cases}$

En posant $\gamma = 3$, on a les deux égalités :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= -\dfrac{1}{3}u_n + 4 \\ \gamma &= -\dfrac{1}{3}\gamma + 4 \end{cases}$$

Par différence, on obtient

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - \gamma = -\frac{1}{3}(u_n - \gamma)$$

Ainsi, la suite $(u_n - \gamma)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.
D'où

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n - \gamma = (u_0 - \gamma)\left(\frac{-1}{3}\right)^n$$

Comme $u_0 = 1$ et $\gamma = 3$, on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -2\left(\frac{-1}{3}\right)^n + 3$$

7

Soit u définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$

L'équation caractéristique de la suite u est $x^2 - x - 1 = 0$.
Le discriminant est > 0 ; les racines sont $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $s = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
D'après le théorème, il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$u = \lambda \cdot (r^n) + \mu \cdot (s^n)$$

ou encore tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \lambda r^n + \mu s^n$$

On peut déterminer ce couple à l'aide des termes initiaux.
On obtient le système :

$$\begin{cases} u_0 = \lambda r^0 + \mu s^0 \\ u_1 = \lambda r^1 + \mu s^1 \end{cases} \qquad \text{qui s'écrit matriciellement} \qquad \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

La matrice carrée est inversible d'inverse $\dfrac{1}{s-r}\begin{pmatrix} s & -1 \\ -r & 1 \end{pmatrix}$. D'où

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \frac{1}{s-r}\begin{pmatrix} s & -1 \\ -r & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

Ici $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$. Donc on a

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \frac{1}{s-r}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculons ! On a $s - r = \frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = -\sqrt{5}$.

D'où

$$\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{-1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$$

BILAN. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r^n + \mu s^n \qquad \text{avec } \lambda = \tfrac{1}{\sqrt{5}},\ \mu = \tfrac{-1}{\sqrt{5}} \text{ et } r = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2},\ s = \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \tfrac{-1}{\sqrt{5}}\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

16

Montrons que $\ell = \ell'$ en montrant que $|\ell - \ell'| = 0$ et ceci en montrant que $\quad \forall \varepsilon > 0, \quad |\ell - \ell'| \leqslant \varepsilon$.
Soit $\varepsilon > 0$.
Comme $u_n \to \ell$, il existe un rang N à partir duquel on a $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Comme $u_n \to \ell'$, il existe un rang N' à partir duquel on a $|u_n - \ell'| \leqslant \varepsilon$.
Donc àpcr (le maximum de N et N'), on a d'après l'inégalité triangulaire :

$$|\ell - \ell'| = \Big|(u_n - \ell) - (u_n - \ell')\Big| \leqslant |u_n - \ell| + |u_n - \ell'| \leqslant 2\varepsilon$$

On a donc $|\ell - \ell'| \leqslant 2\varepsilon$.

44

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \qquad \text{et} \qquad v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)u_n$$

Montrons que les suites u et v convergent.
On procède en deux temps.
Premier temps.

- Montrons que u est croissante.
  Comme la suite est à termes strictement positifs, cela revient à montrer que $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a
  $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant 1$$
  ce qui conclut.
- Montrons que v est décroissante.
  Comme la suite est à termes strictement positifs, cela revient à montrer que $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant 1$
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  On a
  $$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{(1+\frac{1}{n+1})u_{n+1}}{(1+\frac{1}{n})u_n}\\ &= \frac{\frac{n+2}{n+1}u_{n+1}}{\frac{n+1}{n}u_n}\\ &= \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\,\frac{u_{n+1}}{u_n}\\ &= \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\,\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

Le dénominateur vaut $n^4+4n^3+6n^2+4n+1$.
Et le numérateur vaut

$$n(n+2)\big((n+1)^2+1\big) \;=\; (n^2+2n)(n^2+2n+2) \;=\; n^4+4n^3+6n^2+4n$$

On a donc $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant 1$.

- Montrons que la suite $v-u$ est positive.
  On a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n - u_n = \frac{1}{n} u_n \geqslant 0$$

Deuxième temps.
D'après le troisième point précédent, la suite $v-u$ est positive, donc on a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leqslant v_n$$

De plus, u est croissante, et v est décroissante, donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_1 \leqslant u_n \qquad \text{et} \qquad v_n \leqslant v_1$$

On a donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leqslant v_1 \qquad \text{et} \qquad v_n \leqslant u_1$$

Ainsi la suite u est croissante et majorée (par v_1) et la suite v est décroissante et minorée (par u_1).
D'après le théorème de la limite monotone, ces deux suites convergent.

Variante du deuxième temps.
On a $v_n - u_n = \dfrac{1}{n} u_n$.

— La suite u est bornée (elle est minorée par son premier terme, car croissante ; et elle est majorée par v_0 car $u_n \leqslant v_n$ et $v_n \leqslant v_0$ par décroissance de v),

— On a $\dfrac{1}{n} \to 0$

Par un petit résultat de cours, on en déduit que $\dfrac{1}{n} u_n \to 0$.
Autrement dit $v_n - u_n \to 0$. Et c'était le dernier point qu'il manquait pour montrer que u et v sont adjacentes.
On conclut en invoquant le fait que deux suites adjacentes convergent.

47

Soit (C_n) et (D_n) définies par

$$C_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+n} \qquad\qquad D_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+n}$$

— Montrons que la suite C est croissante.
On a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad C_{n+1} - C_n = \ldots$$

D'où la croissance de la suite.

— Montrons que la suite D est décroissante.
On a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad D_{n+1} - D_n \;\; =$$

D'où la décroissance de la suite.

— Montrons que la suite $D-C$ tend vers 0.
On a

$$D_n - C_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$