Espaces vectoriels

Algèbre linéaire, épisode 1

I. Espace vectoriel : exemple et définition

Des exemples à graver dans votre tête

Ici, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni des lois $+$ et $\times$ usuelles.

1

Proposition – Les espaces vectoriels de référence –
Munis des lois $+$ et $\cdot$ usuelles rappelées ci-dessous, les ensembles suivants sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels :

(1) $\mathbb{K}^n$: l'ensemble des n-uplets à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Un habitant de $\mathbb{K}^n$ est souvent noté $x = (x_1, \dots, x_n)$ ou encore $x = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
Un tel habitant est défini par la donnée de ...... scalaires.
Les lois $+$ et $\cdot$ sont définies par

$$\lambda\cdot x + \mu\cdot y \;=\; (\lambda x_1 + \mu y_1, \dots, \lambda x_n + \mu y_n) \;=\; (\lambda x_i + \mu y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$$

(2) $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Un habitant de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est noté $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}$ ou encore $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$
Un tel habitant est défini par la donnée de ...... scalaires.
Les lois $+$ et $\cdot$ sont définies par

$$\lambda\cdot A + \mu\cdot B \;=\; \begin{bmatrix} \lambda a_{11} + \mu b_{11} & \cdots & \cdots & \lambda a_{1p} + \mu b_{1p} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda a_{n1} + \mu b_{n1} & \cdots & \cdots & \lambda a_{np} + \mu b_{np} \end{bmatrix} \;=\; (\lambda a_{ij} + \mu b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$$

(3) $\mathbb{K}[X]$: l'ensemble des polynômes formels à coefficients dans $\mathbb{K}$ en l'indéterminée X.
Un habitant de $\mathbb{K}[X]$ est noté $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ où $p \in \mathbb{N}$.
Un tel habitant est défini par la donnée d'un nombre fini de scalaires.
Les lois $+$ et $\cdot$ sont définies par

$$\lambda\cdot P + \mu\cdot Q \;=\; \sum_{k=0}^{\max(p,q)} (\lambda a_k + \mu b_k) X^k$$

(4) $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$: l'ensemble des suites à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Un habitant de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est noté $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou encore $u = (u_0, u_1, u_2, \cdots)$, voire $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ n & \longmapsto & u_n \end{array}$
Un tel habitant est défini par la donnée d'un .... de scalaires.
Les lois $+$ et $\cdot$ sont définies par

$$\lambda\cdot u + \mu\cdot v \;=\; (\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

(5) $\mathbb{K}^I$: l'ensemble des fonctions de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{K}$ (où $I \subset \mathbb{R}$ est le plus souvent un intervalle)
Un habitant de $\mathbb{K}^I$ est noté $f : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$, voire très rarement $f = \big(f(x)\big)_{x\in I}$.
Un tel habitant est défini par la donnée .... de scalaires.
Les lois $+$ et $\cdot$ sont définies par

$$\lambda\cdot f + \mu\cdot g : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \lambda f(x) + \mu g(x) \end{array}$$

Définition d'un espace vectoriel

Ici, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni des lois $+$ et $\times$ usuelles.

2 **Définition (à lire, mais à ne pas apprendre)**

Soit E un ensemble muni de deux lois :

$$\begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda\cdot x \end{array}$$

On dit que $(E,+,\cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (ou un $\mathbb{K}$-espace vectoriel) lorsque les 8 conditions suivantes sont vérifiées :

(i) La loi $+$ est commutative : $\forall x,y\in E,\ x+y=y+x$

(ii) La loi $+$ est associative : $\forall x,y,z\in E,\ (x+y)+z=x+(y+z)$

(iii) La loi $+$ possède un élément neutre 0_E : $\forall x\in E,\ 0_E+x=x$

(iv) Tout élément de E admet un symétrique pour la loi $+$: $\forall x\in E,\ \exists x'\in E,\ x+x'=0_E$

(v) La loi $\cdot$ est distributive sur l'addition $+$ des vecteurs : $\forall \lambda\in\mathbb{K},\ \forall x,y\in E,\ \lambda\cdot(x+y)=\lambda\cdot x+\lambda\cdot y$

(vi) La loi $\cdot$ est distributive sur l'addition $+$ des scalaires : $\forall \lambda,\mu\in\mathbb{K},\ \forall x\in E,\ (\lambda+\mu)\cdot x=\lambda\cdot x+\mu\cdot x$

(vii) La loi $\cdot$ est compatible avec la multiplication $\times$ des scalaires : $\forall \lambda,\mu\in\mathbb{K},\ \forall x\in E,\ (\lambda\times\mu)\cdot x=\lambda\cdot(\mu\cdot x)$

(viii) La loi $\cdot$ est neutralisée par le scalaire 1 de $\mathbb{K}$: $\forall x\in E,\ 1\cdot x=x$

L'élément 0_E s'appelle le *vecteur nul*.

Les éléments de $\mathbb{K}$ s'appellent des scalaires.

Les éléments de E s'appellent des vecteurs.

La loi $+$ est une loi *interne*. La loi $\cdot$ est une loi *externe*.

- Dans (iv), un tel élément x' est unique. Il s'appelle l'opposé de x et est noté $-x$.
  Preuve : supposons qu'il existe x' et $x''\in E$ tels que $x+x'=0_E$ et $x+x''=0_E$.
  Alors en considérant $x+x'+x''$, on a les deux égalités :

$$\begin{aligned} x+x'+x'' &= (x+x')+x'' = 0_E+x'' = x'' \\ x+x'+x'' &= (x+x'')+x' = 0_E+x' = x' \end{aligned} \qquad \text{d'où } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

  En fait, les 4 premiers points (i) à (iv) traduisent le fait que $(E,+)$ est un groupe commutatif.

- On est maintenant en mesure de faire la preuve de la proposition précédente, page 2.
  Pour chaque espace E, il faudrait faire les 8 vérifications. On va s'en dispenser !

- L'ensemble $\mathbb{K}$ lui-même, muni de son addition et de sa multiplication, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
  Ainsi, $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
  Et, $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

- L'ensemble $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel si on le munit de son addition et de la loi externe : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\lambda,z) & \longmapsto & \lambda z \end{array}$

- **Un exemple général.**
  En fait, il existe un cadre général qui englobe à la fois les exemples (1), (2), (4), (5) (tous sauf celui des polynômes).
  Soit Ω un ensemble quelconque (non nécessairement muni de lois).
  Considérons $E=\mathbb{K}^\Omega$: l'ensemble des applications définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{K}$.
  Les lois $+$ et $\cdot$ sont définies par

$$\lambda\cdot f+\mu\cdot g:\ \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \omega & \longmapsto & \lambda f(\omega)+\mu g(\omega) \end{array}$$

3 **Proposition (règle de calculs).**

— Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $v \in E$, on a

$$(a) \quad 0_{\mathbb{K}} \cdot v = 0_E \qquad (b) \quad \lambda \cdot 0_E = 0_E \qquad (c) \quad (-1) \cdot v = -v$$

— Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $v \in E$, on a :

$$\lambda \cdot v = 0_E \implies \left(\lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } v = 0_E\right)$$

- **Preuve de** (a)**,** (b) **et** (c)

(a) On a $0_{\mathbb{K}} \cdot v = (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}) \cdot v$ d'après ......

$= 0_{\mathbb{K}} \cdot v + 0_{\mathbb{K}} \cdot v$ d'après ......

En ajoutant l'opposé de $0_{\mathbb{K}} \cdot v$ de part et d'autre de l'égalité, on obtient ......

(b) On a $\lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot (0_E + 0_E)$ d'après ......

$= \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E$ d'après ......

En ajoutant l'opposé de $\lambda \cdot 0_E$ de part et d'autre de l'égalité, on obtient ......

(c) On cherche à montrer que $(-1) \cdot v$ est l'opposé de v pour la loi $+$.

On a $v + (-1) \cdot v = 1 \cdot v + (-1) \cdot v$ d'après ......

$= 0_{\mathbb{K}} \cdot v$ d'après ......

$= 0_E$ d'après ......

- **Preuve de la propriété « produit scalaire-vecteur nul »**

Supposons $\lambda \cdot v = 0_E$ et $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$. Montrons que ......

On a $v = 1 \cdot v$ d'après ......

$= \left(\lambda \frac{1}{\lambda}\right) \cdot v$ car ......

$= \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot v)$ d'après ......

$= \frac{1}{\lambda} \cdot 0_E$ car ......

$= 0_E$ d'après ......

4 **Définition (combinaison linéaire).**

Soit $s \in \mathbb{N}$ et $(v_1, \ldots, v_s)$ une famille de vecteurs de E.

Soit $w \in E$.

On dit que w est *combinaison linéaire* des vecteurs de la famille $(v_1, \ldots, v_s)$ lorsque il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{K}$ tel que $w = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_s v_s$.

- Si $s = 0$, alors la famille est vide. Il est bon de retenir qu'un vecteur qui est combinaison linéaire de la famille vide est égal *au* vecteur nul.
- Une combinaison linéaire est toujours une somme *finie*.
- Par exemple, la fonction exponentielle est combinaison linéaire des fonctions ch et sh.

5 **Question.** Plaçons-nous dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

La fonction constante égale à 1, notée ici $\mathbb{1}$, est-elle combinaison linéaire des fonctions cosinus et sinus ?

II. Sous-espace vectoriel

6 **Proposition (caractérisation d'un sous-espace vectoriel)**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit F une partie de E.
On dit que F est un sous-espace vectoriel de E lorsque :

— $0_E \in F$

— F est stable par combinaison linéaire $\quad \forall\, v, w \in F, \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot v + \mu \cdot w \in F$

- La stabilité par combinaison linéaire est équivalente à demander la stabilité pour la loi $+$ et pour la loi $\cdot$

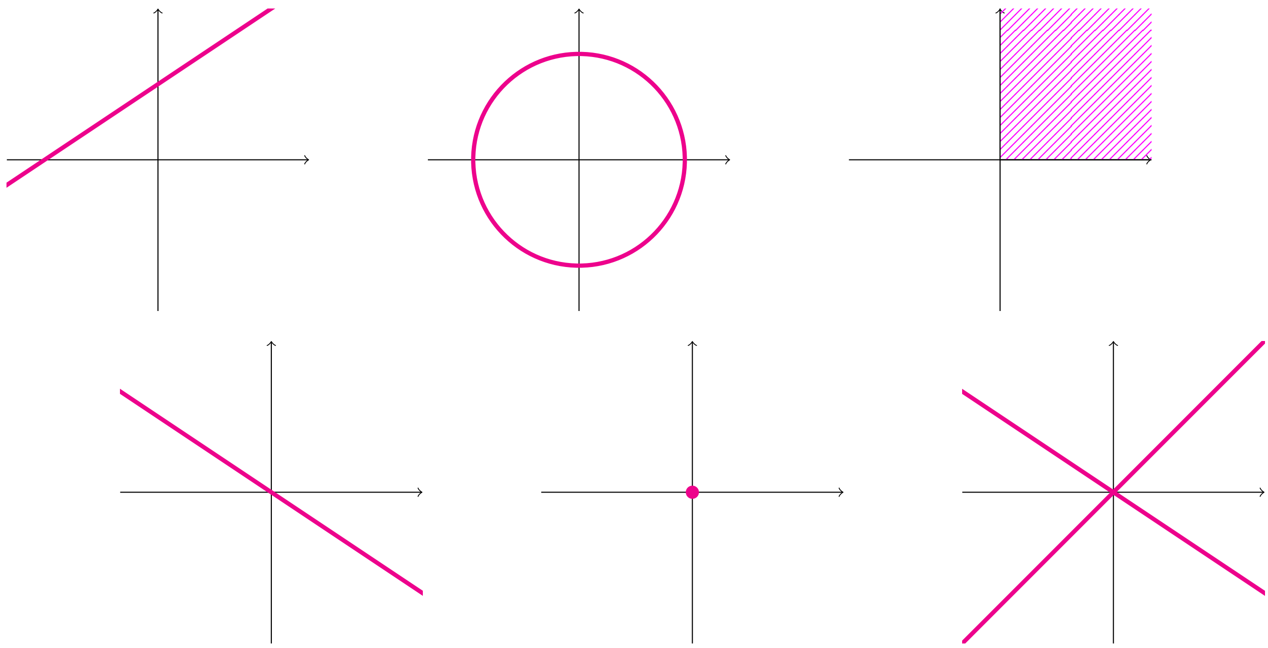
$$\forall\, v, w \in F, \quad v + w \in F \qquad \text{et} \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall\, v \in F, \quad \lambda \cdot v \in F$$

- Les parties $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E, appelés sous-espaces vectoriels triviaux de E.
- On obtient une définition équivalente (WHY ?) en remplaçant l'axiome « $0_E \in F$ » par l'axiome « $F \neq \varnothing$ ».
- Soit $v_0 \in E$ *non nul*. Le singleton $F = \{v_0\}$ N'est PAS un sous-espace vectoriel de E. WHY ?
- Comme $\mathbb{K}$ est infini, un sous-espace vectoriel F d'un $\mathbb{K}$ espace-vectoriel E est un ensemble $\begin{cases} \text{fini} & \text{si } \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{infini} & \text{sinon} \end{cases}$

  Un sous-espace vectoriel a fortement tendance à être un ensemble infini !
- Attention à ne pas oublier de vérifier dans sa tête que F est une partie de E (càd $F \subset E$) avant de vouloir montrer que c'est un sous-espace vectoriel de E. Ainsi, la définition doit être retenue sous la forme :

$$\begin{cases} F \subset E \\ 0_E \in F \\ F \text{ est stable par combinaison linéaire} \end{cases} \quad \overset{\text{déf.}}{\Longrightarrow} \quad F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E$$

7 **Exemple fondamental : le plan $\mathbb{R}^2$**
Voici des parties de $E = \mathbb{R}^2$. Lesquelles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?



8 **Exemples chez les matrices.**
Voici des parties de $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Lesquelles sont des sous-espaces vectoriels de E ?

$$\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \qquad \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) \qquad \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \qquad \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K}) \qquad \mathscr{T}_n^-(\mathbb{K}) \qquad \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$$

9 **Exemples chez les colonnes.** Soit $E = \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'ensemble $F_A = \left\{X \in E \mid AX = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

10 **Exemples chez les suites.** Soit $b, c \in \mathbb{K}$. L'ensemble $F_{b,c} = \left\{u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0_{\mathbb{K}}\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

11 **Proposition.** Soit F un sous-espace vectoriel de E.
Alors les lois $+$ et $\cdot$ de E induisent sur F des lois :

$$\begin{array}{ccc} F \times F & \longrightarrow & F \\ (v, w) & \longmapsto & v + w \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times F & \longrightarrow & F \\ (\lambda, v) & \longmapsto & \lambda \cdot v \end{array}$$

Muni de ces lois induites, le sous-espace vectoriel F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- La preuve de cette proposition est omise, mais pas compliquée.
  Il faut retenir la chose extrêmement utile :

  ♡ *Un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel est lui-même un espace vectoriel.*

  C'est quasiment toujours à l'aide de ce résultat que l'on montrera qu'un objet est un espace vectoriel : en le voyant comme un sous-espace vectoriel d'un espace de référence.
- Expliquez la phrase suivante :

  L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène est un espace vectoriel.

12 **Question.** Montrer que l'ensemble H des matrices de trace nulle est un espace vectoriel.
En maths. Soit $H = \left\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{tr}(M) = 0\right\}$; montrer que H est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Opérations ensemblistes sur les sous-espaces vectoriels

Replongeons-nous dans le chapitre « Ensembles et applications » du début d'année.
Quelles sont les opérations utilisées pour deux parties A et B baignant dans un ensemble Ω ?

13 **Proposition (Intersection).**
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
L'intersection $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

- En français :

  L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E, donc est un espace vectoriel.

  On en déduit aisément par récurrence que l'intersection d'un nombre *fini* de sev de E est un sev de E.
- Plus généralement, une intersection (quelconque) de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.
- **Warning 1.** En général, la réunion $F \cup G$ N'est PAS un sous-espace vectoriel de E.
  Soit $N = \left\{(x, y) \in \mathbb{K}^2 \mid xy = 0\right\}$.

  — La partie N s'écrit $F \cup G$ où F sont les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^2$ suivants :

  $$F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\right\} \qquad \text{et} \qquad G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\right\}$$

  — La partie N n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^2$; en effet :
- **Warning 2.** Le complémentaire $\overline{F}$ N'est JAMAIS un sous-espace vectoriel de E. WHY ?

Somme de deux sous-espaces vectoriels

14 **Définition.**
Soit F, G deux sous-espaces vectoriels de E.
On définit la somme de F et G, notée $F+G$, comme étant la **partie** de E :

$$F+G \;=\; \left\{v \in E \mid \exists (v_F, v_G) \in F\times G,\ v = v_F + v_G\right\}$$

Dit autrement, un élément de $F+G$ est un élément de E qui s'écrit comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G.

- On a $F \subset F+G$. Prouvons-le. Soit $v_F \in F$. On a $v_F = \underbrace{v_F}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$, donc $v_F \in F+G$.
- On peut retenir que $F+G$ contient F et contient G.
- On a $F+\{0_E\} = \ldots \qquad F+E = \ldots \qquad F+F = \ldots$

15 **Proposition.**
Soit F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

i) La partie $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

ii) Soit $W \subset E$.
$$\left\{\begin{array}{l} W \text{ sous-espace vectoriel de } E \\ F\subset W \text{ et } G \subset W \end{array}\right. \quad\Longrightarrow\quad F+G\subset W$$

- Le premier point dit :

  La somme de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E, donc en particulier est un espace vectoriel.
- Le second point dit :

  L'espace vectoriel $F+G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant à la fois F et G

  où « plus petit » est à comprendre « au sens de l'inclusion ».
- On peut renverser la vapeur est mettre sur le devant de la scène W. L'énoncé dit alors que :

  Si W est un sous-espace vectoriel de E contenant F et G, alors W est plus grand que $F+G$.
- Le second point peut aussi s'écrire :

$$\left\{\begin{array}{l} W \text{ stable par combinaison linéaire} \\ F\subset W \text{ et } G \subset W \end{array}\right. \quad\Longrightarrow\quad F+G\subset W$$

  En effet, si on a les hypothèses de gauche, alors W contient 0_E (car $0_E \in F$ et $F \subset W$), et le fait qu'il soit stable par combinaison linéaire assure le fait que c'est un sous-espace vectoriel de E et on ramené à l'énoncé initial.
- **Warning 3.**

  Pas de Loi de Morgan avec la somme et l'intersection d'espaces vectoriels $\cancel{C\cap(A+B) \;=\; C\cap A + C\cap B}$

  En revanche, on a toujours l'inclusion suivante $H\cap(F+G) \;\supset\; H\cap F \;+\; H\cap G$

  Pour en revenir au contre-exemple, dans $E=\mathbb{K}^2$, prendre $A = \ldots$

16 **Question.** Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) + \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.

Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

17 **Définition.**
Soit F, G deux sous-espaces vectoriels de E.
On dit que F et G sont *en somme directe* lorsque tout vecteur de $F+G$ s'écrit de manière **unique** comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.
Autrement dit, F et G sont en somme directe lorsque :

$$\diamondsuit \qquad \forall\, v_F, w_F \in F, \quad \forall\, v_G, w_G \in G, \qquad v_F + v_G = w_F + w_G \quad \Longrightarrow \quad (v_F = w_F \quad \text{et} \quad v_G = w_G)$$

- Lorsque F et G sont en somme directe, leur somme $F+G$ se note $F \oplus G$.
  Ainsi, $F \oplus G$ est donc une *notation* signalant 2 choses :
  - la notation <u>désigne</u> le sous-espace vectoriel $F+G$
  - la notation <u>signale</u> que l'écriture d'un vecteur de $F+G$ en somme ...etc. ... est unique.

18 **Proposition.**
Soit F, G deux sous-espaces vectoriels de E.
On a les équivalences suivantes :

i) les sous-espaces vectoriels F et G sont en somme directe
ii) la décomposition du *vecteur nul* en somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique, c'est-à-dire

$$\heartsuit \qquad \forall\, v_F \in F, \quad \forall\, v_G \in G, \qquad v_F + v_G = 0_E \quad \Longrightarrow \quad \big(v_F = 0_E \quad \text{et} \quad v_G = 0_E\big)$$

19 **Question.** Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont en somme directe.

20 **Proposition (caractérisation pour $\boxed{\text{deux}}$ sous-espaces)**
On a l'équivalence

$$F \text{ et } G \text{ sont en somme directe} \qquad \Longleftrightarrow \qquad F \cap G = \{0_E\}$$

- On peut redémontrer avec ce critère que $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont en somme directe. En effet, une matrice à la fois symétrique et antisymétrique est nécessairement la matrice nulle. WHY ?
- Dans $E = \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$, le sous-espace vectoriel C des fonctions constantes, et le sous-espace vectoriel N des fonctions nulles en zéro sont en somme directe, car une fonction constante et nulle en 0 est nécessairement la fonction nulle.
- Dans $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, les sous-espaces vectoriels $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ sont-ils en somme directe ?

21 **Attention. Warning. Achtung.**
Il ne faut pas confondre la somme directe $\oplus$ (chez les espaces vectoriels) et l'union disjointe $\bigsqcup$ (chez les ensembles)

$$v \in F \oplus G \quad \text{N'implique PAS que} \quad v \in F \text{ ou } v \in G$$

Une matrice quelconque n'est **pas** soit symétrique soit antisymétrique.

En revanche, une matrice quelconque s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Sous-espaces supplémentaires

22 **Définition (sous-espaces supplémentaires).**
Soit F, G deux sous-espaces vectoriels de E.
On dit que F et G sont supplémentaires dans E lorsque $E = F \oplus G$, c'est-à-dire lorsque :

— la somme de F et G est égale à E

— la somme de F et G est directe

- On dit que G est **un** supplémentaire de F. On dit aussi que F est **un** supplémentaire de G.
- En maths, la définition s'écrit :

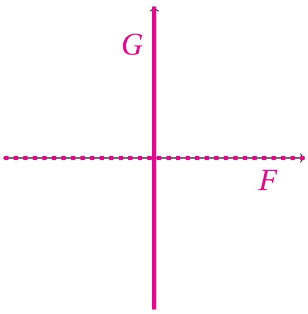
$$F \text{ et } G \text{ supplémentaires dans } E \qquad \text{lorsque} \qquad \begin{cases} F + G = E \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$$

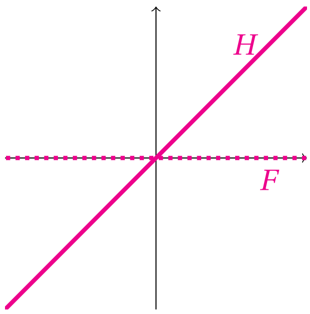
Autrement dit :

F et G supplémentaires dans E $\iff$ tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G

Comme on voit « il **existe** une écriture » et « une écriture **unique** », on peut penser à un raisonnement par analyse-synthèse pour montrer que deux sev sont supplémentaires.

- Il n'y a pas unicité du supplémentaire. On fera donc attention à ne jamais parler **du** supplémentaire d'un sous-espace vectoriel, mais bien d'**un** supplémentaire.
Par exemple, dans $E = \mathbb{K}^2$, on a $\mathbb{K}^2 = F \oplus G$ où $F = \left\{(x, y) \in \mathbb{K}^2 \mid y = 0\right\}$ et $G = \left\{(x, y) \in \mathbb{K}^2 \mid x = 0\right\}$.
On a aussi $\mathbb{K}^2 = F \oplus H$ où $H = \left\{(x, y) \in \mathbb{K}^2 \mid x = y\right\}$.
Ainsi, G et H sont des supplémentaires de F.





23 **Question.** Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Posons $H = \{M \in E \mid \text{tr}(M) = 0\}$ et $D = \text{Vect}(I)$.
Montrer que H et D sont supplémentaires dans E.

24 **Question.** Soit E l'espace vectoriel des fonctions dérivables en 0.
sol → 20
Montrer que $F = \left\{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\right\}$ et $G = \left\{x \mapsto ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}\right\}$ sont supplémentaires dans E.

Sous-espace vectoriel « engendré par... »

25 **Exemple introductif.**
Considérons $\mathscr{A}_3(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de taille 3.

— C'est un espace vectoriel, n'est-ce pas ?

— **Fait.** Il existe une famille de matrices antisymétriques telle que toute matrice antisymétrique s'écrive comme combinaison linéaire des matrices de cette famille.

Preuve. Considérons la famille $\left(\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{C}\right)$.

Vérifions qu'une matrice antisymétrique est combinaison linéaire de ces matrices.

Soit $M \in \mathscr{A}_3(\mathbb{K})$. Alors, d'après le cours sur les matrices, il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ tels que $M = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{bmatrix}$

Ainsi, $M = \alpha A + \beta B + \gamma C$.

— Le fait précédent énoncé « en français » s'écrit « en maths » sous la forme suivante :

$$\mathscr{A}_3(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}(A, B, C)$$

Cela se prononce :
« $\mathscr{A}_3(\mathbb{K})$ est l'espace vectoriel engendré par les vecteurs A, B, C ».
ou encore
« la famille (A, B, C) est une famille génératrice de $\mathscr{A}_3(\mathbb{K})$ ».

26 **Proposition-Définition.**
Soit $v_1, \ldots, v_s$ des vecteurs de E.

— L'ensemble des vecteurs qui sont combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_s$ est un sous-espace vectoriel de E.

— Cet ensemble est noté $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_s)$.

— Cet ensemble $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_s)$ est appelé *le sous-espace vectoriel de E engendré par $v_1, \ldots, v_s$* ou encore *l'espace vectoriel engendré par $v_1, \ldots, v_s$*.

— On dit que $(v_1, \ldots, v_s)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_s)$.

— En mathématiques :

$$\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_s) \;=\; \left\{ w \in E \mid \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{K},\; w = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_s v_s \right\}$$

- Un constat immédiat : chaque vecteur v_i est dans $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_s)$.
  Mais il n'est pas vrai qu'un habitant de $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_s)$ est un v_i.
  Un habitant de $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_s)$ est une combinaison linéaire des v_i.
- **Vocabulaire.**
  Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E.

  ♡ $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ se prononce **« l'espace vectoriel engendré par la famille $\mathscr{F}$ »**.

  La phrase « *$\mathscr{F}$ est une famille génératrice de* $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ » est une tautologie.

- **Preuve.** Montrons que $\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_s)$ est un sous-espace vectoriel de E.
  - Comme $v_1,\dots,v_s \in E$, on a $\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_s) \subset E$ car E est sable par combinaison linéaire.
  - On a $0_E \in \mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_s)$.
  - Montrons que $\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_s)$ est stable par combinaison linéaire.

  ⋆ Première preuve à comprendre.
  Soit w et $w' \in \mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_s)$ et montrons qu'une combinaion linéaire de w et w' est dans $\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_s)$.
  Par définition de w, le vecteur w est combinaison linéaire de $v_1,\dots,v_s$.
  De la même manière, le vecteur w' est combinaison linéaire de $v_1,\dots,v_s$.
  Par conséquent, une combinaison linéaire de w et w' est une combinaison linéaire de $v_1,\dots,v_s$.

  ⋆ Si vous n'êtes pas convaincu par la première preuve en français, écrivons-la en maths.
  Soit $w, w' \in \mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_s)$. Soit $\mu, \mu' \in \mathbb{K}$. Montrons que $\mu w + \mu' w' \in \mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_s)$.
  Par définition, w s'écrit $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_s v_s$ et w' s'écrit $\lambda'_1 v_1 + \cdots + \lambda'_s v_s$.
  « Calculons » :
  $$\mu w + \mu' w' \;=\; \mu\big(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_s v_s\big) + \mu'\big(\lambda'_1 v_1 + \cdots + \lambda'_s v_s\big) \;=\; (\mu\lambda_1 + \mu'\lambda'_1) v_1 + \cdots + (\mu\lambda_s + \mu'\lambda'_s) v_s$$
  Donc $\mu w + \mu' w' \in \mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_s)$.

27 **Question.** Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des matrices circulantes de taille 3, i.e. $\mathscr{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \;\middle|\; (a,b,c) \in \mathbb{K}^3 \right\}$

Montrer que $\mathscr{C}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

28 **Proposition (propriété de** Vect)
Soit $v_1,\dots,v_s \in E$. On a :
$$\begin{cases} F \text{ sous-espace vectoriel de } E \\ v_1,\dots,v_s \in F \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_s) \subset F$$

- **Preuve détaillée que doit faire un élève.** Supposons F sous-espace vectoriel de E contenant $v_1,\dots,v_s$.
  Montrons l'inclusion $\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_s) \subset F$.
  Soit $w \in \mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_s)$.
  Alors par définition, il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_s \in \mathbb{K}$ tel que $w = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_s v_s$.
  Or $v_1,\dots,v_s \in F$ et F est stable par combinaison linéaire (car F est un sous-espace vectoriel de E).
  Donc $w \in F$.
- **Preuve ensembliste.** Supposons F sous-espace vectoriel de E contenant $v_1,\dots,v_s$.
  Comme $v_1,\dots,v_s \in F$, toutes les combinaisons linéaires de $v_1,\dots,v_s$ sont dans F (car F est stable par combinaison linéaire en tant que sous-espace vectoriel de E).
  Par définition de Vect, la phrase précédente s'écrit en maths $\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_s) \subset F$.
- Ce résultat dit que
  ♡ *L'espace vectoriel* $\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_s)$ *est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $v_1,\dots,v_s$.*
  où « plus petit » est à comprendre « au sens de l'inclusion ».
- On peut renverser la vapeur est mettre sur le devant de la scène F. L'énoncé dit alors que :
  Si F est un sous-espace vectoriel de E contenant $v_1,\dots,v_s$, alors il est plus grand que $\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_s)$.
- L'implication peut aussi se reformuler :
  $$\begin{cases} F \text{ stable par combinaison linéaire} \\ v_1,\dots,v_s \in F \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_s) \subset F$$
  En effet, si on a les hypothèses de gauche, alors F est en particulier non vide (donc contient nécessairement 0_E) et le fait qu'il soit stable par combinaison linéaire assure le fait que c'est un sous-espace vectoriel de E et on ramené à l'énoncé initial.

29 **Proposition.**
Soit $v_1, \ldots, v_s \in E$ et $w_1, \ldots, w_t \in E$.

— **Inclusion de deux « Vect »**

$$\mathrm{Vect}(v_1,\ldots,v_s) \subset \mathrm{Vect}(w_1,\ldots,w_t) \iff \text{chaque } v_i \text{ est combinaison linéaire de } w_1,\ldots,w_t$$

— **Égalité de deux « Vect »**

$$\mathrm{Vect}(v_1,\ldots,v_s) = \mathrm{Vect}(w_1,\ldots,w_t) \iff \begin{cases} \text{chaque } v_i \text{ est combinaison linéaire de } w_1,\ldots,w_t \\ \text{chaque } w_j \text{ est combinaison linéaire de } v_1,\ldots,v_s \end{cases}$$

— **Somme de deux « Vect »**

$$\mathrm{Vect}(v_1,\ldots,v_s) + \mathrm{Vect}(w_1,\ldots,w_t) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

30 **Proposition (manipulation sur un « Vect »)**
Soit $v_1, \ldots, v_s \in E$ et $w \in E$.

— **Inclusion**
Sans aucune hypothèse, on a $\mathrm{Vect}(v_1,\ldots,v_s) \subset \mathrm{Vect}(v_1,\ldots,v_s,w)$

— **Ôter/Ajouter un vecteur**
Si w est combinaison linéaire de $v_1,\ldots,v_s$, alors $\mathrm{Vect}(v_1,\ldots,v_s,w) = \mathrm{Vect}(v_1,\ldots,v_s)$
On peut retirer/ajouter un vecteur qui est combinaison linéaire d'autres vecteurs.

— **Multiplier par un scalaire non nul**
En remplaçant le vecteur v_1 par αv_1 avec $\alpha \neq 0$, on ne change pas l'espace vectoriel engendré par $v_1,\ldots,v_s$. Autrement dit :

$$\mathrm{Vect}(v_1,\ldots,v_s) = \mathrm{Vect}(\alpha v_1,\ldots,v_s)$$

— **Opération de combinaison linéaire**
En remplaçant le vecteur v_1 par v_1' où $v_1' = v_1 + \text{une-combinaison-linéaire-de-}v_2,\ldots,v_s$ on ne change pas l'espace vectoriel engendré par $v_1,\ldots,v_s$. Autrement dit :

$$\mathrm{Vect}(v_1,\ldots,v_s) = \mathrm{Vect}(v_1', v_2,\ldots,v_s)$$

- Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on a l'égalité $\mathrm{Vect}(\mathrm{ch},\mathrm{sh}) = \mathrm{Vect}(x \mapsto \mathrm{e}^x,\, x \mapsto \mathrm{e}^{-x})$.
- Considérons la famille de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ suivante

$$\mathcal{F} = (E_{11}+I,\ E_{22}+I,\ E_{12}+I,\ E_{21}+I)$$

On souhaite montrer que $\mathcal{M}_2(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. On a (WHY?) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_2(\mathbb{K}) &= \mathrm{Vect}(E_{11},\ E_{22},\ E_{12},\ E_{21}) \\
&= \mathrm{Vect}(E_{11},\ E_{22},\ E_{12},\ E_{21},\ I) \\
&= \mathrm{Vect}(E_{11}+I,\ E_{22}+I,\ E_{12}+I,\ E_{21}+I,\ I) \\
&= \mathrm{Vect}(E_{11}+I,\ E_{22}+I,\ E_{12}+I,\ E_{21}+I)
\end{aligned}$$

III. Familles de vecteurs

Famille libre, famille liée

31 **Définition (relation de liaison)**
Soit $v_1, \dots, v_s$ des vecteurs de E.
Une *relation de liaison* entre $v_1, \dots, v_s$ est une égalité de la forme

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_s v_s = 0_E \qquad \text{où } \lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{K}.$$

La relation de liaison correspondant à $\lambda_1 = \cdots = \lambda_s = 0_{\mathbb{K}}$ est appelée *relation de liaison triviale.*

32 **Définition (famille libre)**
Soit $v_1, \dots, v_s$ des vecteurs de E.
La famille $(v_1, \dots, v_s)$ est dite

— *libre* lorsque la seule relation de liaison entre les v_i est la relation triviale, càd lorsque :

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{K}, \qquad \Big(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_s v_s = 0_E \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_s = 0_{\mathbb{K}}\Big)$$

— *liée* dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsqu'il existe une relation de liaison non triviale entre les v_i, càd :

il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ *non tous nuls* tels que $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_s v_s = 0_E$

- **Attention.**
« $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ non tous nuls » signifie ....

« $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ tous non nuls » signifie ....

- **Vocabulaire.**
Pour dire que la *famille* $(v_1, \dots, v_s)$ est *libre*,
on peut dire que les vecteurs $v_1, \dots, v_s$ sont linéairement indépendants.

- **Avec le vecteur nul, on est lié.**
Une famille qui contient le vecteur nul est *liée*.

33 **Proposition (exemples fondamentaux)**

— Notons $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n$. La famille $\big(e_1, \dots, e_n\big)$ est une famille libre de $\mathbb{K}^n$.

— La famille $\big(E_{i,j}\big)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ est une famille libre de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

34 **Question.**
sol → 21

1. Montrer que la famille $\mathscr{F} = \big((1,2,3), (4,5,6)\big)$ de $\mathbb{K}^3$ est libre.
2. Montrer que la famille $\mathscr{F} = \big((1,2,3), (4,5,6), (7,8,9)\big)$ de $\mathbb{K}^3$ est liée.

35 **Question.**
sol → 23

1. Montrer que la famille $(\cos, \sin, \mathbb{1})$ est libre.
2. La famille $(\cos^2, \sin^2, \mathbb{1})$ est-elle libre ?

36 **Proposition (colinéarité).**
Soit $x, y \in E$ deux vecteurs. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) Les deux vecteurs sont multiples d'un même troisième :

$$\exists z \in E, \quad \exists \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad (x = \alpha z \quad \text{et} \quad y = \beta z).$$

(ii) L'un des vecteurs est multiple de l'autre :

$$(\exists \lambda \in \mathbb{K},\ x = \lambda y) \qquad \text{ou} \qquad (\exists \mu \in \mathbb{K},\ y = \mu x)$$

Dans ce cas, on dit que x et y sont colinéaires.

- Le « ou » dans la deuxième assertion est rendu nécessaire par le cas où l'un des vecteurs est nul et pas l'autre.
  Si $x \neq 0_E$ et $y = 0_E$, on peut en effet trouver $\mu \in K$ tel que $y = \mu x$ (il suffit de prendre $\mu = 0$), mais on ne peut pas trouver $\lambda \in$ K tel que $x = \lambda y$.
- **Preuve.**
  Supposons (i). Alors il existe $z \in E$ et $\alpha, \beta \in K$ tels que $x = \alpha z$ et $y = \beta z$.
  - Cas $\alpha \neq 0$.
    Alors $z = \frac{1}{\alpha} x$. Et alors $y = \beta(\frac{1}{\alpha} x) = \frac{\beta}{\alpha} x$.
  - Cas $\alpha = 0$.
    Alors $x = 0_E$. Et alors $x = 0_{\mathbb{K}}\, y$.

  Dans les deux cas, l'un des deux vecteurs est multiple de l'autre. D'où (ii).

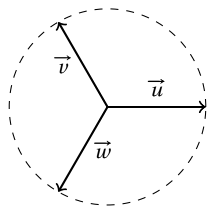
  Supposons (ii). Il y a deux cas à distinguer car on suppose « truc » **ou** « machin ».
  Cas où il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda y$.
  Alors on peut poser $z = y$ pour obtenir (i) (à vous de vérifier).
  L'autre cas est similaire.

37 **Proposition (liberté des petites familles).**

0. La famille vide () est libre.
1. Soit $x \in E$. Alors la famille à **un** vecteur (x) est libre si et seulement si $x \neq 0_E$.
2. Soit $x, y \in E$. Alors la famille à **deux** vecteurs (x, y) est libre si et seulement si les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

- Ces résultats ne s'étendent pas pour des familles plus grandes.

  Par exemple, dans le dessin suivant, on vérifie que deux des trois vecteurs ne sont jamais colinéaires et, pourtant, la famille est liée, car $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$.



38 **Proposition (famille liée).**
Une famille est liée si et seulement si un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.

- Il est important de comprendre que la proposition précédente ne dit pas que tout vecteur est combinaison linéaire des autres. Par exemple, la famille

$$\Big((1,0,0),\ (0,1,0),\ (1,0,1),\ (0,0,1)\Big)$$

est liée car le 3ème vecteur est combinaison linéaire des 1er et 4ème, mais le 2ème n'est pas combinaison linéaire des trois autres.

39 **Question.** Soit $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$.

i) A-t-on

$$\Big(\forall x \in \mathbb{R}, \quad a\cos^2 x + b\sin^2 x + c \;=\; a'\cos^2 x + b'\sin^2 x + c'\Big) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \end{cases}$$

ii) A-t-on

$$\Big(\forall x \in \mathbb{R}, \quad a\cos^2 x + b\sin^2 x \;=\; a'\cos^2 x + b'\sin^2 x\Big) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

iii) A-t-on

$$\Big(\forall x \in \mathbb{R}, \quad a(x-2) + b(x-3) + c(x-4) \;=\; a'(x-2) + b'(x-3) + c'(x-4)\Big) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \end{cases}$$

40 **Proposition (principe d'identification).**
Si la famille $(v_1, \ldots, v_s)$ est libre, alors on peut procéder à l'identification.

Autrement dit, en présence d'une égalité du type :

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_s v_s \;=\; \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_s v_s$$

on peut en déduire que $\forall\, i,\ \lambda_i = \mu_i$, **pourvu que la famille** $(v_1, \ldots, v_s)$ **soit libre**.

Famille génératrice

41 **Définition.**
Soit F un sous-espace vectoriel de E.
Soit $\mathscr{V} = (v_1, \ldots, v_s)$ une famille de vecteurs $\boxed{\text{de } F.}$

La famille $\mathscr{V}$ est une famille génératrice de F lorsque tout vecteur de F s'écrit comme combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_s$.

- La phrase précédente s'écrit $F \subset \mathrm{Vect}(\mathscr{V})$.
  Mais comme $\mathrm{Vect}(\mathscr{V}) \subset F$ (WHY), on a aussi la définition alternative suivante :

  La famille $\mathscr{V}$ est une famille génératrice de F lorsque $F = \mathrm{Vect}(\mathscr{V})$.

- Avec cette définition, on a la phrase tautologique suivante :

  ♡ *Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E.*
  Alors $\mathscr{F}$ est une famille génératrice du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$.

- Soit F un sev de E. Lorsque l'on demande de déterminer une famille génératrice de F, il s'agit de trouver une famille $\mathscr{G}$ telle que $F = \mathrm{Vect}(\mathscr{G})$.
  En particulier, $\mathscr{G}$ est donc constituée de vecteurs de F !

42 sol → 24 **Question.** Soit $G = \{X \in \mathscr{M}_{5,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0\}$ où $A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 6 \end{bmatrix}$.

Déterminer une famille génératrice de G.

43 sol → 24 **Question.** Déterminer une famille génératrice de $H = \Big\{A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K}) \mid \mathrm{tr}(A) = 0\Big\}$.

44 **Proposition.**
Soit $(v_1,\dots,v_s)$ une famille de vecteurs de E.

— **Caractérisation de la liberté par l'unicité de l'écriture**

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si la famille $(v_1,\dots,v_s)$ est libre, alors tout vecteur combinaison linéaire de $v_1,\dots,v_s$ possède une unique écriture comme combinaison linéaire de $v_1,\dots,v_s$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si tout vecteur combinaison linéaire de $v_1,\dots,v_s$ possède une unique écriture comme combinaison linéaire de $v_1,\dots,v_s$, alors la famille $(v_1,\dots,v_s)$ est libre.

— **Caractérisation de l'aspect générateur par l'existence de l'écriture**

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si la famille $(v_1,\dots,v_s)$ est génératrice de E, alors tout vecteur de E possède une écriture comme combinaison linéaire de $v_1,\dots,v_s$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si tout vecteur de E possède une écriture comme combinaison linéaire de $v_1,\dots,v_s$, alors la famille $(v_1,\dots,v_s)$ est génératrice de E.

45 **Définition.** Une base de E est une famille libre et génératrice (sous-entendu génératrice de E).

46 **Proposition.**
Soit $\mathscr{B}$ une famille de vecteurs de E.

$$\mathscr{B} \text{ est une base de } E \iff \begin{array}{l}\text{tout vecteur de } E \text{ possède une unique écriture}\\ \text{comme combinaison linéaire de vecteurs de } \mathscr{B}\end{array}$$

Dans ce cas, en notant $\mathscr{B}=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_d)$,

$$\forall\, v\in E,\quad \exists!\gamma_1,\dots,\gamma_d\in\mathbb{K},\quad v=\gamma_1\varepsilon_1+\cdots+\gamma_d\varepsilon_d$$

Les scalaires γ_k sont uniques, dépendent de v, et s'appellent les coordonnées du vecteur v dans la base $\mathscr{B}$.

- J'ai choisi la lettre d pour le nombre de vecteurs de $\mathscr{B}$. Pourquoi à votre avis ? Souvent, on prend la lettre n.
- Il est d'usage d'écrire les coordonnées de v sous la forme d'une matrice colonne.
  On note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)$ la matrice colonne des coordonnées de v dans la base $\mathscr{B}$.

47 **Proposition (base usuelle de nos espaces vectoriels de référence)**

— La famille $\big(e_1,\dots,e_n\big)$, notée encore $\big(e_i\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$, est une base de $\mathbb{K}^n$.
Cette base est appelée la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Elle comporte .... vecteurs.

— La famille $\big(E_{1,1},E_{1,2},\dots,E_{n,p}\big)$, notée encore $\big(E_{i,j}\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$, est une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Cette base est appelée la base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Elle comporte .... vecteurs.

48 **Question.** Considérons les 3 vecteurs de $\mathbb{K}^3$ suivants :

$$v_1 = (1,1,1), \quad v_2 = (1,2,4), \quad v_3 = (1,3,9),$$

Montrer que la famille (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{K}^3$.

49 **Question.** Soit $G = \{X \in \mathscr{M}_{5,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0\}$ où $A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 6 \end{bmatrix}$. Déterminer une base de G.

50 **Question.** Déterminer une base de $H = \left\{A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K}) \mid \operatorname{tr}(A) = 0\right\}$.

51 **Théorème.**
Soit $b, c \in \mathbb{C}$.
L'ensemble $F_{b,c} = \left\{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0_{\mathbb{C}}\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
Notons Δ le discriminant de l'équation caractéristique $x^2 + bx + c = 0$ notée $\text{ÉC}_{b,c}$.

- Cas $\Delta \neq 0$. Notons z_1 et z_2 les deux solutions complexes distinctes de $\text{ÉC}_{b,c}$.
  Alors la famille $\left((z_1^n)_{n\in\mathbb{N}},\ (z_2^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est une base de $F_{b,c}$.
- Cas $\Delta = 0$. Notons z_0 l'unique solution de $\text{ÉC}_{b,c}$ *que l'on suppose différente de* 0.
  Aors la famille $\left((z_0^n)_{n\in\mathbb{N}},\ (nz_0^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est une base de $F_{b,c}$.

IV. Sous-famille, sur-famille, concaténation

- Trouver une famille de $\mathbb{K}^3$ libre mais non génératrice.
- Trouver une famille de $\mathbb{K}^3$ génératrice mais non libre.

52 **Proposition (sous-famille d'une famille libre)**

— Soit $v_1, \ldots, v_s$ des vecteurs de E.
Si la famille $(v_1, \ldots, v_s)$ est libre, alors $\quad \forall\, i \in [\![1, s]\!], \quad (v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_s) \quad$ est libre

♡ *En retirant un vecteur à une famille libre, la famille reste libre.*

— Plus généralement, en retirant des vecteurs à une famille libre, la famille reste libre.

♡ *Une sous-famille d'une famille libre est une famille libre.*

53 **Proposition (sur-famille d'une famille génératrice)**

— Soit $v_1, \ldots, v_s$ des vecteurs de E.
Si la famille $(v_1, \ldots, v_s)$ est génératrice de E, alors

$$\forall\, w \in E, \quad (v_1, \ldots, v_s, w) \quad \text{est génératrice de } E$$

♡ *En ajoutant un vecteur à une famille génératrice, la famille reste génératrice.*

— Plus généralement, en ajoutant des vecteurs à une famille génératrice, la famille reste génératrice.

♡ *Une sur-famille d'une famille génératrice est une famille génératrice.*

- Plus tard, nous verrons les résultats suivants :
  — Toute famille libre peut être *complétée* en une base.
  — De toute famille génératrice, on peut *extraire* une base.

54 **Proposition (famille génératrice de la somme).**
Soit F, G deux sous-espaces vectoriels de E.
On obtient une famille génératrice de $F+G$ en concaténant une famille génératrice de F et une famille génératrice de G.
Autrement dit, si $F = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_r)$ et $G = \mathrm{Vect}(g_1, \ldots, g_s)$ alors $F + G = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_s)$.

55 **Proposition (concaténation de bases)**
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E admettant des bases *ayant un nombre fini de vecteurs.*

— Si la concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de E, alors F et G sont supplémentaires dans E.

— Si F et G sont supplémentaires dans E, alors la concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de E.

- En abrégé :

$$F \oplus G = E \quad \Longleftrightarrow \quad \mathscr{B}_F \vee \mathscr{B}_G \text{ est une } \textit{base} \text{ de } E$$

- Que devient cet énoncé en remplaçant « base de E » par « famille génératrice de E » ?
- Que devient cet énoncé en remplaçant « base de E » par « famille libre de E » ?

Espaces vectoriels

Algèbre linéaire, épisode 1

preuve et éléments de correction

Première preuve : par analyse-synthèse

On fixe $\varphi \in E$. Montrons que φ s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction de F et d'une fonction de G.

Analyse. Supposons qu'il existe $f, g \in E$ tels que

$$\begin{cases} i) & f \in F & f(0) = f'(0) = 0 \\ ii) & g \in G & g \text{ s'écrit } x \longmapsto ax + b \\ iii) & \varphi = f + g & \end{cases}$$

En évaluant $iii)$ en 0, on a $\varphi(0) = f(0) + g(0)$, d'où $\varphi(0) = g(0) = b$.

Alors :

$$\varphi'(0) = f'(0) + g'(0) = f'(0) = a$$

On a alors

$$\begin{cases} b & = & \varphi(0) \\ a & = & \varphi'(0) \end{cases}$$

On peut alors trouver a et b en fonction des données.
On trouve $a = \varphi'(0)$ et $b = \varphi(0)$.
Ainsi $g : x \longmapsto \varphi'(0)x + \varphi(0)$ et $f = \varphi - g$ s'expriment en fonction de φ.

Synthèse. On pose $g : x \longmapsto \varphi'(0)x + \varphi(0)$ et $f = \varphi - g$.
Vérifions que

$$\begin{cases} i) & f \in F & f(0) = f'(0) = 0 \\ ii) & g \in G & g \text{ s'écrit } x \longmapsto ax + b \\ iii) & \varphi = f + g & \end{cases}$$

► $i)$ Vérifions que $f \in F$.
▷ $f(0) = 0$; en effet, on a $f(0) = \varphi(0) - g(0) = \varphi(0) - \varphi(0) = 0$.
▷ $f'(0) = 0$; en effet, évaluons f' en 0 sachant que $f' = \varphi' - g'$. On a $f'(0) = \varphi'(0) - g'(0) = \varphi'(0) - \varphi'(0) = 0$.

► $ii)$ Vérifions que $g \in G$. C'est évident

► $iii)$ Vérifions que $\varphi = f + g$. C'est évident

Deuxième preuve

Montrons que

$$\begin{cases} ① & F + G & = & E \text{ et} \\ ② & F \cap G & = & \{0_E\} \end{cases}$$

① Montrons l'inclusion non triviale, à savoir $E \subset F + G$.
Soit $\varphi \in E$.
Montrons que φ peut s'écrire comme la somme d'une fonction de F et d'une fonction de G.

On pose $g : x \longmapsto \varphi'(0)x + \varphi(0)$ et $f = \varphi - g$.

Vérifions que

$$\begin{cases} i) & f \in F \\ ii) & g \in G \\ iii) & \varphi = f + g \end{cases}$$

▶ i) Vérifions que $f \in F$.
▷ $f(0) = 0$; en effet, on a $f(0) = \varphi(0) - g(0) = \varphi(0) - \varphi(0) = 0$.
▷ $f'(0) = 0$; en effet, évaluons f' en 0 sachant que $f' = \varphi' - g'$. On a $f'(0) = \varphi'(0) - g'(0) = \varphi'(0) - \varphi'(0) = 0$.

▶ ii) Vérifions que $g \in G$. C'est évident

▶ iii) Vérifions que $\varphi = f + g$. C'est évident

On a donc prouvé qu'il existe $f \in F$ et $g \in G$ tels que $\varphi = f + g$ (êtes-vous convaincu ?).

② Soit $\varphi \in F \cap G$ c'est-à-dire $\begin{cases} \varphi \in F & \text{donc } \varphi(0) = 0 \text{ et } \varphi'(0) = 0 \\ \varphi \in G & \text{donc } \varphi \text{ s'écrit } x \longmapsto ax + b \end{cases}$

Montrons que φ est la fonction nulle.

Évaluons φ et φ' en 0 à l'aide de l'expression venant de $\varphi \in G$.
On a $\varphi(0) = b$ et $\varphi'(0) = a$.
En exploitant que $\varphi \in F$, on trouve $a = 0$ puis $b = 0$.
En reprenant l'expression de φ, on en déduit que φ est la fonction nulle.

34

1. Montrons que la famille $\mathscr{F} = \Big((1,2,3),(4,5,6)\Big)$ de $\mathbb{K}^3$ est libre.

   Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tels que
   $$\alpha(1,2,3) \;+\; \beta(4,5,6) = 0_{\mathbb{K}^3}$$
   Et montrons que $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.
   Par identification des coordonnées :
   $$\begin{cases} \alpha \times 1 & + & \beta \times 4 & = & 0 \\ \alpha \times 2 & + & \beta \times 5 & = & 0 \\ \alpha \times 3 & + & \beta \times 6 & = & 0 \end{cases}$$
   ce qui peut s'écrire matriciellement :
   $$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
   Effectuons des opérations élémentaires sur les lignes de ce système homogène ce qui ne change pas l'ensemble des ses solutions.
   Effectuons $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$: On obtient :
   $$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -3 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
   Visuellement :
   $$\begin{cases} \alpha & + & 4\beta & = & 0 \\ & & -3\beta & = & 0 \\ & & -6\beta & = & 0 \end{cases}$$
   En examinant la ligne 2 (ou la ligne 3 d'ailleurs), on obtient $\beta = 0$.

Puis en reportant dans la ligne 1, on obtient $\alpha = 0$.

Remarque (pour ceux qui ont tout compris).
Reprenons le début de la preuve et simplifions-la un chouilla.
Par identification des **deux premières** coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \alpha \times 1 & + & \beta \times 4 & = & 0 \\ \alpha \times 2 & + & \beta \times 5 & = & 0 \end{array}\right.$$

ce qui peut s'écrire matriciellement :

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On a ici une matrice **carrée** de taille 2, qui est inversible, car le déterminant vaut $1 \times 5 - 2 \times 4$ et est différent de 0.
Par conséquent, le système a une unique solution, et c'est la solution nulle.
Donc $\alpha = 0$ et $\beta = 0$, ce qu'il fallait démontrer !
C'est dingue, non ?

2. Montrons que la famille $\mathscr{F} = \Big((1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)\Big)$ de $\mathbb{K}^3$ est liée.
Il s'agit de trouver $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ **non tous nuls** tels que

$$\alpha(1,2,3) \ + \ \beta(4,5,6) \ + \ \gamma(7,8,9) = 0_{\mathbb{K}^3}$$

Si on a l'oeil, on voit que $\alpha = 1$, $\beta = -2$ et $\gamma = 1$ conviennent.
Et la preuve est terminée !

Sinon, on fait la preuve suivante. On suppose qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ vérifiant

$$\alpha(1,2,3) \ + \ \beta(4,5,6) \ + \ \gamma(7,8,9) = 0_{\mathbb{K}^3}$$

Et on voit quelles conditions cela impose.
Par identification des coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha \times 1 & + & \beta \times 4 & + & \gamma \times 7 & = & 0 \\ \alpha \times 2 & + & \beta \times 5 & + & \gamma \times 8 & = & 0 \\ \alpha \times 3 & + & \beta \times 6 & + & \gamma \times 9 & = & 0 \end{array}\right.$$

ce qui peut s'écrire matriciellement :

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Effectuons $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$: On obtient :

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 3 & -6 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Effectuons $L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2$ et $L_3 \leftarrow -\frac{1}{6}L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Effectuons $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La phase de descente est terminée. Remontons !

Effectuons $L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On obtient le système

$$\begin{cases} \alpha & & - & \gamma & = & 0 \\ & \beta & + & 2\gamma & = & 0 \end{cases}$$

On voit qu'en prenant γ quelconque, $\beta = -2\gamma$ et $\alpha = \gamma$, on obtient une relation de liaison.

Il suffit donc de prendre γ non nul (par exemple égal à 1) pour obtenir une relation de liaison **non triviale**.

Bilan : $\gamma = 1$, $\beta = -2$ et $\alpha = 1$ est un témoin du fait que la famille est liée.

35

1. Montrons que la famille $(\cos, \sin, \mathbb{1})$ est libre.

   Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha \cos + \beta \sin + \gamma \mathbb{1} = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$$

   L'égalité précédente est une égalité de fonctions. On obtient donc les égalités de nombres réels :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \alpha \cos(x) + \beta \sin(x) + \gamma \mathbb{1}(x) = 0$$

   En évaluant en 0, en $\frac{\pi}{2}$, en π, on obtient :

$$\begin{cases} \alpha \cos(0) & + & \beta \sin(0) & + & \gamma \mathbb{1}(0) & = & 0 \\ \alpha \cos(\frac{\pi}{2}) & + & \beta \sin(\frac{\pi}{2}) & + & \gamma \mathbb{1}(\frac{\pi}{2}) & = & 0 \\ \alpha \cos(\pi) & + & \beta \sin(\pi) & + & \gamma \mathbb{1}(\pi) & = & 0 \end{cases}$$

   d'où

$$\begin{cases} \alpha \times 1 & + & \beta \times 0 & + & \gamma \times 1 & = & 0 \\ \alpha \times 0 & + & \beta \times 1 & + & \gamma \times 1 & = & 0 \\ \alpha \times (-1) & + & \beta \times 0 & + & \gamma \times 1 & = & 0 \end{cases}$$

   C'est-à-dire matriciellement :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   Appliquons l'algorithme du pivot de Gauss.

   Effectuons $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   La matrice est inversible (triangulaire supérieure avec aucun 0 sur la diagonale), donc

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. la famille est liée car il existe une relation de liaison non triviale entre ces trois fonctions, à savoir $\cos^2 + \sin^2 - \mathbb{1} = 0$ (au moins un des coefficients est non nul, ici ils le sont tous en fait).

42

Déterminons une famille génératrice de G.
On a les équivalences (WHY?)

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_5 \end{bmatrix} \in G \iff \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & & + & 2x_3 & + & & + & 4x_5 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & + & & + & 5x_5 & = & 0 \\ & & & & & & x_4 & + & 6x_5 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \left| \begin{array}{ccccc} x_1 & = & -2\mu & - & 4\lambda \\ x_2 & = & -3\mu & - & 5\lambda \\ x_3 & = & \mu & & \\ x_4 & = & & & -6\lambda \\ x_5 & = & & & \lambda \end{array} \right.$$

$$\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\iff X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Ces équivalences montrent l'égalité d'espaces vectoriels : $G = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

Ainsi, une famille génératrice de G est la famille $\left(\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

43

Le cas $n = 3$

$\boxed{\subset / \text{Analyse}}$

Soit $A \in H$ que l'on écrit $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

Comme $\operatorname{tr}(A)=0$, un des coefficients de la diagonale de A s'exprime en fonction des autres. Par exemple, i s'exprime en fonction de a et e :

$$i=-a-e$$

Reprenons l'écriture initiale de A et remplaçons i par l'expression précédente. Il y a donc $9-1=8$ lettres utilisées. On doit donc dégager ces 8 lettres pour faire apparaître 8 matrices. On a :

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & -a-e \end{bmatrix} \\
&= a\begin{bmatrix} 1 & . & . \\ . & . & . \\ . & . & -1 \end{bmatrix} + e\begin{bmatrix} . & . & . \\ . & 1 & . \\ . & . & -1 \end{bmatrix} \\
&\quad +b\begin{bmatrix} . & 1 & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} . & . & 1 \\ . & . & . \\ . & . & . \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} . & . & . \\ 1 & . & . \\ . & . & . \end{bmatrix} + f\begin{bmatrix} . & . & . \\ . & . & 1 \\ . & . & . \end{bmatrix} + g\begin{bmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ 1 & . & . \end{bmatrix} + h\begin{bmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & 1 & . \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi, A est combinaison linéaires des 8 matrices de la famille :

$$\mathscr{F} = \Big((E_{ii}-E_{33})_{i\in[\![1,2]\!]}, \quad (E_{ij})_{i\neq j} \Big)$$

Autrement dit,

$$H \subset \operatorname{Vect}(\mathscr{F})$$

$\boxed{\supset/\text{Synthèse}}$ Montrons que $H \supset \operatorname{Vect}(\mathscr{F})$.
Comme H est un espace vectoriel, il suffit de montrer que les matrices de $\mathscr{F}$ sont dans H.
Il est évident que la trace des matrices $E_{ii}-E_{33}$ est nulle, tout comme celle des matrices E_{ij} avec $i\neq j$!!

Bilan. On a montré l'égalité $H=\operatorname{Vect}(\mathscr{F})$.
Donc $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de H.

Le cas n quelconque

$\boxed{\subset/\text{Analyse}}$
Soit $A\in H$ que l'on écrit $A=\sum_{i,j} a_{ij}E_{ij}$.
Comme $\operatorname{tr}(A)=0$, un des coefficients de la diagonale de A s'exprime en fonction des autres. Par exemple, $a_{n,n}$ s'exprime en fonction des précédents :

$$a_{n,n}=-a_{11}-a_{22}-\cdots-a_{n-1,n-1}$$

Reprenons l'écriture initiale de A et remplaçons $a_{n,n}$ par l'expression précédente. Il y a donc n^2-1 lettres utilisées (tous les a_{ij} sauf a_{nn}). On doit donc dégager ces n^2-1 lettres pour faire apparaître n^2-1 matrices.

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}E_i i + \sum_{i\neq j} a_{ij}E_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{\boxed{n-1}} a_{ii}E_{ii} + \Big(-a_{11}-a_{22}-\cdots-a_{n-1,n-1}\Big)E_{nn} + \sum_{i\neq j} a_{ij}E_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{\boxed{n-1}} a_{ii}(E_{ii}-E_{nn}) + \sum_{i\neq j} a_{ij}E_{ij}
\end{aligned}$$

Ainsi, A est combinaison linéaires des matrices de la famille

$$\mathscr{F} = \Big((E_{ii} - E_{nn})_{i \in [\![1,n-1]\!]}, \quad (E_{ij})_{i \neq j} \Big)$$

Autrement dit,

$$H \subset \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$$

$\boxed{\supset/\text{Synthèse}}$ Montrons que $H \supset \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$.
Comme H est un espace vectoriel, il suffit de montrer que les matrices de $\mathscr{F}$ sont dans H.
Il est évident que la trace des matrices $E_{ii} - E_{nn}$ est nulle, tout comme celle des matrices E_{ij} avec $i \neq j$!!

Bilan. On a montré l'égalité $H = \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$.
Donc $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de H.