Polynômes

exercices

14exo-Polynomes.pdf, 24 février 2023, 11:14

Coefficients, degré, équations

101 Inversibles de $\mathbb{K}[X]$

Déterminer les éléments de $\mathbb{K}[X]$ qui possèdent un inverse pour la multiplication.

102 Équations — à l'oral en TD

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que

(i) $P(2X) = P(X) - 1$

(ii) $P(X^2) = (X^2+1)P$.

(iii) $P \circ P = P$.

(iv) $\exists Q \in \mathbb{K}[X],\ Q^2 = XP^2$.

103 Formule de Vandermonde

Soit $n, p, q \in \mathbb{N}$. L'objectif est de montrer l'égalité :

$$\sum_{i+j=n} \binom{p}{i}\binom{q}{j} = \binom{p+q}{n}$$

où la somme porte sur les $i, j \in [\![0, n]\!]$ de somme n.

1. Que dit cette formule pour $p = 4$, $q = 5$ et $n = 6$?
2. En considérant les trois polynômes $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$ définis par :

   $$A = (X+1)^p \qquad B = (X+1)^q \qquad C = (X+1)^{p+q}$$

   montrer l'égalité de Vandermonde.
3. À l'aide de la formule de Vandermonde, montrer que

   $$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i}^2 = \binom{2m}{m}$$

104 Polynômes de Tchebychev de 2ème espèce — seul

On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$P_0 = 1, \qquad P_1 = -2X \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = -2XP_{n+1} - 2(n+1)P_n.$$

1. Calculer P_2, P_3 et P_4.
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré et le coefficient dominant de P_n.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que P_n a une parité et la déterminer.
4. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{2n+1}(0)$.
5. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{2n}(0)$.

105 Espaces supplémentaires

1. On pose $E = \mathbb{K}[X]$ et :

   $$F = \Big\{P \in E \mid P(1-X) = P(X)\Big\} \qquad G = \Big\{P \in E \mid P(1-X) = -P(X)\Big\}$$

   En considérant $\varphi : P \mapsto P(1-X)$ (on précisera la définition de φ), montrer sans effort que $E = F \oplus G$.
2. Soit $E = \mathbb{K}[X]$. On considère $H = \{P \in E \mid P(3) = 0\}$ et $D = \mathrm{Vect}(X^0)$.
   Montrer que $E = H \oplus D$.
3. On pose $E = \mathbb{K}_{n+1}[X]$. On considère $H = \mathbb{K}_n[X]$ et $D = \mathrm{Vect}\Big((X-19)^{n+1}\Big)$
   Montrer que $E = H \oplus D$. On pourra s'aider de la formule de Taylor.

106 Infaisable ?

Soit $n \in \mathbb{N}$ et P et Q deux polynômes distincts de degré n à coefficients réels. Montrer :

$$\deg\left(P^3 - Q^3\right) \geqslant 2n.$$

Le résultat reste-t-il vrai si P et Q sont à coefficients complexes ?

Divisibilité et division euclidienne

107 Des entiers aux polynômes

Soit $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. On note r le reste de la division euclidienne de a par b.
Montrer que le reste de la division euclidienne de X^a par $X^b - 1$ est X^r.

108 Divisibilité

Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$. Montrer l'équivalence $b \mid a \iff X^b - 1 \mid X^a - 1$.

109 Division euclidienne et racines

Soit $P = X^4 + 6X^3 + 10X^2 + 3X - 6$.

1. Effectuer la division euclidienne de P par $X^2 + 3X$.
2. En déduire l'ensemble des racines de P.

110 Un classique

Soit $(p, q, r) \in \mathbb{N}^3$. On souhaite montrer que $X^2 + X + 1$ divise $X^{3p+2} + X^{3q+1} + X^{3r}$.

1. **Première preuve.** Montrer le résultat annoncé.
2. **À la main.** Dans cette question, on s'interdit d'invoquer $\mathbb{C}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $X^{3n} - 1 = (X^3 - 1)Q_n$. En déduire le résultat annoncé.

111 CNS

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ pour que le polynôme $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$.

112 Autre CNS

À quelle condition nécessaire et suffisante sur a et $b \in \mathbb{C}$, le polynôme $B = X^2 - bX + 1$ divise $A = X^4 - X + a$?

113 La routine — seul

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de A par B dans chacun des cas suivants :

(i) $A = X^n$ et $B = X^2 - 3X + 2$

(ii) $A = X^n$ et $B = (X - 1)^2$

(iii) $A = (X \sin t + \cos t)^n$ et $B = X^2 + 1$, où t est un réel.

114 Reste

Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver le reste de la division euclidienne de $(X + 1)^n$ par $X^2 + 1$. On exprimera la réponse en fonction du cosinus et du sinus.

115 Joli !

1. Soit $P, A, B \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $A - B$ divise $P \circ A - P \circ B$.
2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P - X$ divise $P \circ P - X$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z^2 + 3z + 1)^2 + 3z^2 + 8z + 4 = 0$.

Polynômes VERSUS Fonctions polynomiales

116 Le Quizz de Madame Tête

1. Donner un exemple de fonction **non** polynomiale $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ \varphi(n) = 0$$
2. Donner un exemple de fonction **non** polynomiale $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ \psi(n) = n$$
3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ P(n) = n^3 - n^2 + 1$$
Que vaut $P(\pi)$?
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ f(n) = n^3 - n^2 + 1$$
Que peut-on dire sur $f(\pi)$? Construire une telle fonction f **non** polynomiale.
5. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad P\big((-1)^{\lfloor t \rfloor}\big) \ = \ Q\big((-1)^{\lfloor t \rfloor}\big)$$
A-t-on $P = Q$?
6. Même question avec :
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad P\big(\cos(t) + 4\big) \ = \ Q\big(\cos(t) + 4\big)$$
7. Même question avec :
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad P\big((-1)^{\lfloor t \rfloor} + t\big) \ = \ Q\big((-1)^{\lfloor t \rfloor} + t\big)$$

117 Le logarithme n'est pas un polynôme

Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que
$$\exists\, A > 0,\ \forall\, x \geqslant A,\ \ P(x) = \ln(x)$$

Penser à l'équation différentielle $xy' = 1$ vérifiée par le log.

118 Fonctions non polynomiales

Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

(i) $P(k) = \frac{1}{k}$ (ii) $P(k) = \sqrt{k^2 + 1}$ (iii) $P(k) = 2^k$

119 Interpolation de Lagrange

Soit $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ distincts.

1. Rappeler pourquoi si $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$ vérifient $\forall\, i \in [\![0, n]\!], P(x_i) = Q(x_i)$, alors $P = Q$.
2. (a) Construire un polynôme de degré n ayant $x_1, \ldots, x_n$ comme racines.
   (b) Construire un polynôme L_0 de degré n ayant $x_1, \ldots, x_n$ comme racines et tel que $L_0(x_0) = 1$.
   (c) Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Construire un polynôme L_i de degré n tel que $L_i(x_i) = 1$ et ayant les éléments de la famille $(x_j)_{j \in [\![0,n]\!] \setminus \{i\}}$ comme racines.
   (d) Soit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que
   $$\forall i \in [\![0, n]\!], P(x_i) = a_i. \qquad (\mathcal{IL})$$
   On dit que le polynôme P a été obtenu par *interpolation de Lagrange*.
3. Déduire de ce qui précède qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ vérifiant $(\mathcal{IL})$.
4. **Application.** Soit $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $\forall k \in [\![1, n]\!], P(k) = \frac{1}{k}$. Montrer que $P(-1) = n$.

Polynôme dérivé

120 **Conditions sur des polynômes, avec dérivation**

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que

(i) $P = P'$ (ii) $(P')^2 = 4P$

121 **Équations avec P et P'**

(i) Résoudre l'équation $P = P'$ d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$.
(ii) Résoudre l'équation $P - XP' = X$ d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$.
(iii) Résoudre l'équation $2P = XP'$.
(iv) Soit $m \in \mathbb{N}$. Résoudre l'équation $mP = XP'$.

122 **Une relation fonctionnelle polynomiale, linéaire**

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $X(X+1)P'' + (X+2)P' - P = 0$.

123 **Une relation fonctionnelle polynomiale, non linéaire**

Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(2X) = P'(X)P''(X)$.

124 **Existence-Unicité**

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{K}[X]$ que l'on explicitera avec ses coefficients tel que $P_n - P_n' = X^n$.

125 **Question ouverte**

Déterminer dans $\mathbb{K}[X]$ tous les polynômes divisibles par leur polynôme dérivé.

Racines

126 **Bas de gamme** seul

(i) Considérons $P = X^5 - 4X^4 + 7X^3 - 7X^2 + 4X - 1$.
Montrer que 1 est racine de P et déterminer son ordre de multiplicité.
Donner la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.
(ii) Reprendre l'exercice avec $P = X^4 + 2X^2 - 8X + 5$.
(iii) Montrer que le polynôme P admet une racine double.

$$P = X^4 - (5+\sqrt{2})X^3 + (5\sqrt{2}-2)X^2 + (10+2\sqrt{2})X - 10\sqrt{2}$$

En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

127 **Polynôme à coefficients réels de degré impair**

Montrer que tout polynôme de degré impair à coefficients réels possède (au moins) une racine réelle.

128 **Une divisibilité en deux preuves**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que X^2 divise $(X+1)^n - nX - 1$.
On proposera deux preuves différentes (l'une explicite, l'autre avec un critère sur la multiplicité d'une racine).

129 **Multiplicité**

Soit $n \geqslant 3$.
Déterminer l'ordre de multiplicité de 1 en tant que racine de $X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1$.

130 **Coefficients complexes ou réels ?**

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On suppose qu'il existe une infinité de réels α tels que $P(\alpha)$ est réel. Montrer que P est à coefficients réels.

Considérer le polynôme Q dont les coefficients sont les conjugués de ceux de P.

131 **Le polynôme de Taylor de la fonction exponentielle**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k$.

1. Montrer que les racines de P_n sont simples.
2. Déterminer le nombre de racines réelles de P_n.

132 **Polynômes interpolateurs de Lagrange.**

Soit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ des scalaires deux à deux distincts. On pose

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & \big(P(a_0), \ldots, P(a_n)\big). \end{array}$$

et on note $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$.

1. Justifier que φ est linéaire et montrer que φ est injective.
2. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_k \in \mathbb{K}_n[X]$, que l'on explicitera, tel que $\varphi(L_k) = e_{k+1}$.
3. En déduire que φ est un isomorphisme.
4. En déduire que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
5. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $(L_0, \ldots, L_n)$.
6. **Application.** Soit $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(k) = \dfrac{1}{k}$. Montrer que $P(-1) = n$.

133 **Polynômes qui stabilisent ...**

1. Déterminer $\{P \in \mathbb{C}[X] \mid \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \in \mathbb{R}\}$.
2. Déterminer $\{P \in \mathbb{C}[X] \mid \forall x \in \mathbb{Q},\ P(x) \in \mathbb{Q}\}$. On pourra utiliser les polynômes interpolateurs de Lagrange.
3. On note $E = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid \forall x \in \mathbb{Z}, P(x) \in \mathbb{Z}\}$.
   (a) On pose $P_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X + k)$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n \in E$.
   (b) Montrer que E est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients entiers (relatifs) des P_n.

Formule de Taylor

134 **Dérivées positives en un point**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $P(a) > 0$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P^{(k)}(a) \geqslant 0$.
Montrer que P ne possède pas de racines dans $[a, +\infty[$.

135 **Un isomorphisme**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & \big(P(0), P'(0), P''(0), \ldots, P^{(n)}(0)\big) \end{array}$$

est un isomorphisme.

Factorisation

136 **Racines $6^{\text{ème}}$ de l'unité**

On souhaite factoriser $X^6 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

1. **Première preuve.** Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ et conclure.
2. **Deuxième preuve.** Restons dans $\mathbb{R}[X]$.
   En factorisant $X^3 - 1$ et $X^3 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$, conclure.

137 **Factorisation de $\Phi_3(X^2)$**

Factoriser le polynôme $P = X^4 + X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

On essaiera de fournir deux preuves : une en restant dans $\mathbb{R}[X]$, et une en commençant par factoriser le polynôme dans $\mathbb{C}[X]$.

138 **La routine !**

Pour chacun des polynômes suivants, donner la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

(i) $P_1 = X^4 - 4$

(ii) $P_2 = X^4 + 1$

(iii) $P_3 = X^6 + 27$

(iv) $P_4 = (X^2 - X + 1)^2 + 1$

(v) $P_5 = X^5 - 10X^4 + 25X^3 - 25X^2 + 10X - 1$

(vi) $P_6 = X^3 - 8X^2 + 23X - 28$ sachant que la somme de deux des racines est égale à la troisième

(vii) $P_7 = X^4 + 12X - 5$ en sachant qu'il y a deux racines dont la somme vaut 2

139 **Dans $\mathbb{Z}[X]$**

1. Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme à coefficients entiers tel que $a_n \neq 0$ et $a_0 \neq 0$.
   Montrer que si P admet une racine rationnelle $r = \dfrac{p}{q}$ exprimée sous forme irréductible alors $p \mid a_0$ et $q \mid a_n$.
2. Factoriser $P = 2X^3 - X^2 - 13X + 5$.
3. Le polynôme $X^3 + 3X - 1$ est-il irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$?

140 **De $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$**

Soit $a \in \,]0, \pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser $X^{2n} - 2\cos(na)X^n + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

141 **Une divisibilité**

Montrer que $X^2 + X + 1$ divise $X^8 + X^4 + 1$ (sans faire de division euclidienne !).

142 **Racines des polynômes de Tchebychev**

1. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$
   On pourra ou bien définir T_n de manière explicite, ou bien par récurrence à l'aide de $\cos p + \cos q$.
2. Montrer qu'une telle suite est unique.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on pose $x_k = \cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.
   Calculer $T_n(x_k)$ puis montrer que T_n possède n racines distinctes réelles.
4. En déduire la factorisation de T_n en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Relations coefficients-racines

143 **Polynôme de degré 3 de $\mathbb{R}[X]$**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 3, possédant deux racines réelles.
Montrer que la troisième racine est également réelle.

144 **Les sommes de Newton**

Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ un polynôme de degré 3 à coefficients dans $\mathbb{K}$. On suppose que P est scindé sur $\mathbb{K}$ et on note x, y et z ses racines.

1. Exprimer en fonction de a, b, c et d les quantités $x + y + z$, $xy + xz + yz$, et xyz.
2. Exprimer les quantités $x^2 + y^2 + z^2$ et $x^3 + y^3 + z^3$ en fonction de $x + y + z, xy + xz + yz$ et xyz.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système (S) : $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 20. \end{cases}$

145 **Système hautement non linéaire**

Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système (S) : $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1 \\ xyz = -4 \end{cases}$.

146 **Le polynôme $X^n + X^{n-1} + \cdots + X + 1$**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^k$.

1. Factoriser P_n dans $\mathbb{C}[X]$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{n+1}$.

Polynômes d'endomorphismes ou de matrices

147 **Polynôme annulateur et matrice**

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$, vérifiant $P(0) \neq 0$, tel que $P(M) = 0$. Montrer que M est inversible et déterminer son inverse.
2. Pour $n \geqslant 2$, la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients diagonaux sont nuls et dont tous les autres coefficients valent 1 est-elle inversible ?

148 **L'idéal des polynômes annulateurs**

Soient f un endomorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

On rappelle que pour tout $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on note $P(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k f^k$.

Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$.

1. Montrer $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$.
2. Montrer que si P divise Q, alors $\operatorname{Ker} P(f) \subset \operatorname{Ker} Q(f)$ et $\operatorname{Im} Q(f) \subset \operatorname{Im} P(f)$
3. On dit qu'un polynôme P est *annulateur* de l'endomorphisme f si l'on a $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{I}_f$ des polynômes annulateurs de u est un *idéal* de $\mathbb{K}[X]$, c'est-à-dire :

   (a) $\mathcal{I}_f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$;

   (b) $\forall\, P \in \mathcal{I}_f,\ \forall\, Q \in \mathbb{K}[X],\ PQ \in \mathcal{I}_f$.

Plus difficiles...

149 Racines d'un polynôme vérifiant une équation fonctionnelle

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul tel que $P(X^2) = P(X)\,P(X-1)$.

1. Montrer que si $a \in \mathbb{C}$ est racine de P alors a^2 et $(a+1)^2$ sont aussi racines de P.
2. Montrer que toutes les racines de P appartiennent à $\{j, j^2\}$.

150 Une équation (difficile)

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.

151 Borne de Cauchy

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme unitaire. On note $Z(P)$ l'ensemble des racines complexes de P.

1. Montrer
$$\forall \zeta \in Z(P), |\zeta|^n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\ |\zeta|^k$$
et en déduire
$$\forall \zeta \in Z(P) \setminus \{0\}, |\zeta| \leqslant \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{|a_{n-1-\ell}|}{|\zeta|^\ell}$$
2. Utiliser la question précédente pour montrer
$$\forall \zeta \in Z(P), |\zeta| \leqslant \max\left(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right).$$
3. En réutilisant le résultat de la première question, montrer la *borne de Cauchy*
$$\forall \zeta \in Z(P), |\zeta| \leqslant 1 + \max(|a_0|, \dots, |a_{n-1}|).$$

152 L'exercice de Y.G. (24/01/23) ! — Tigrane, première victime !

Soit $n \geqslant 2$. Simplifier
$$\prod_{\substack{(\omega,\omega') \in \mathbb{U}_n^2 \\ \omega \neq \omega'}} (\omega - \omega')$$
Comme 1ère question, on peut demander au candidat de simplifier $\displaystyle\prod_{\xi \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} (1 - \xi)$.

153 Autre exercice de Y.G.

Montrer que le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta) X^k$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

Polynômes

corrigés

101

Notons $\mathscr{I} = \left\{ P \in \mathbb{K}[X] \mid \exists\, Q \in \mathbb{K}[X], PQ = 1 \right\}$ l'ensemble de l'énoncé.
Procédons par analyse et synthèse.

Analyse. Soit $P \in \mathscr{I}$.

On peut donc trouver $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $PQ = 1$.
En passant au degré, on obtient $\deg P + \deg Q = 0$.
Comme $\deg P, \deg Q \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$, on a nécessairement $\deg P = 0$.

Synthèse. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré 0.

Il s'agit donc d'un polynôme constant non nul, et on peut trouver $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $P = \lambda$.
Posons $Q = \frac{1}{\lambda}$ (licite).
On a alors $PQ = \lambda \times \frac{1}{\lambda} = 1$, ce qui montre que $P \in \mathscr{I}$.

Bilan. $\mathscr{I} = \mathbb{K}_0[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$.

(i) Soit P tel que $P(2X) = P(X) - 1$.
En évaluant en 0, on obtient $P(0) = P(0) - 1$, d'où $0 = -1$.
Bilan : l'ensemble des solutions est $\varnothing$.

(ii) On procède par analyse et synthèse.

Analyse. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X^2) = (X^2+1)P$.
Comme $\deg(X^2) \geqslant 1$, on peut appliquer la formule pour le degré de la composée de deux polynômes. Ainsi, $\deg P(X^2) = \deg P \times \deg X^2 = 2 \deg P$.
Par ailleurs, $\deg\big((X^2+1)P\big) = \deg(X^2+1) + \deg P = 2 + \deg P$.
On en déduit que $2\deg P = 2 + \deg P$, d'où l'on tire $\deg P \in \{-\infty, 2\}$.

— Si $\deg P = -\infty$, on a $P = 0$.
— Si $\deg P = 2$, on peut trouver $a, b, c \in \mathbb{K}$ tels que $P = aX^2 + bX + c$.
Comme $\deg P = 2$, on a $a \neq 0$. On a alors

$$\begin{aligned}
P(X^2) = (X^2+1)P \quad &\text{donc} \quad aX^4 + bX^2 + c = (X^2+1)(aX^2+bX+c)\\
&\text{donc} \quad aX^4 + bX^2 + c = aX^4 + bX^3 + (a+c)X^2 + bX + c\\
&\text{donc} \quad \begin{cases} a = a\\ 0 = c\\ b = a+c\\ 0 = b\\ c = c \end{cases} \qquad \text{(par identification des coefficients)}\\
&\text{donc} \quad b = a + c = 0.
\end{aligned}$$

On en déduit que $P = a(X^2-1)$.

On a montré qu'un polynôme vérifiant la condition de l'énoncé était nécessairement de la forme $a(X^2-1)$, le cas $a = 0$ correspondant au polynôme nul et le cas $a \neq 0$ correspondant au cas de degré 2.

Synthèse. Prenons P de la forme $P = a(X^2-1)$ avec $a \in \mathbb{K}$.
On a d'une part $P(X^2) = a(X^4-1)$.
D'autre part, $(X^2+1)P = a(X^2+1)(X^2-1) = a(X^4-1)$.

Ainsi, on a montré

$$\Big\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(X^2) = (X^2+1)P\Big\} = \operatorname{Vect}(X^2-1)$$

(iii) Procédons par analyse et synthèse.

Analyse. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P \circ P = P$.
Si d'aventure le polynôme P est non constant, on a $\deg P = \deg(P \circ P) = \deg(P)^2$, ce qui entraîne $\deg P = 0$ ou $\deg P = 1$.
Dans tous les cas, on a donc $\deg P \leqslant 1$.
Soit $a, b \in \mathbb{K}$ tels que $P = aX + b$.
On a alors

$$P \circ P = a(aX+b) + b = a^2X + ab + b.$$

L'égalité $P \circ P = P$ entraîne donc

$$\begin{cases} a^2 &= a\\ ab + b &= b \end{cases} \quad \text{donc} \quad \left(a = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a = 1\\ b = 0 \end{cases}\right)$$

Donc P est constant ou $P = X$.

Synthèse. Réciproquement, il est clair que les polynômes constants et le polynôme X satisfont aux hypothèses.

Bilan.

$$\Big\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P \circ P = P\Big\} = \mathbb{K}_0[X] \cup \{X\}$$

(iv) Le polynôme nul satisfait la condition.
Soit P un polynôme non nul vérifiant la condition de l'énoncé.
On peut donc trouver $Q \in \mathbb{K}[X]$ (nécessairement non nul, car P l'est) tel que $Q^2 = XP^2$.
En passant au degré, on obtient $2\deg Q = \deg X + \deg P^2 = 1 + 2\deg P$.
On obtient une égalité entre un nombre pair et un nombre impair.

Bilan.

$$\Big\{P \in \mathbb{K}[X] \mid \exists Q \in \mathbb{K}[X], Q^2 = XP^2\Big\} = \{0\}.$$

1. Écrire explicitement la somme. Et vérifier que les deux membres de la formule sont égaux.
2. En utilisant trois fois la formule du binôme de Newton, on a :

$$A = (1+X)^p = \sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} X^n \qquad \text{et} \qquad B = (1+X)^q = \sum_{n=0}^{q} \binom{q}{n} X^n$$

et

$$C = (1+X)^p(1+X)^q = (1+X)^{p+q} = \sum_{n=0}^{p+q} \binom{p+q}{n} X^n$$

Par ailleurs, le coefficient de degré n du produit $C = AB$ est, d'après la formule définissant le produit de deux polynômes, égal à

$$\sum_{i+j=n} \binom{p}{i}\binom{q}{j} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}.$$

En identifiant les coefficients, on en déduit la *formule de convolution de Vandermonde* :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$$

3. On a

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i}^2 &= \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i}\binom{m}{m-i} && \text{(symétrie des coefficients binomiaux)} \\ &= \binom{2m}{m}. && \text{(convolution de Vandermonde)} \end{aligned}$$

1. On obtient

$$
\begin{aligned}
P_2 &= 4X^2 - 2 \\
P_3 &= -8X^3 + 12X \\
P_4 &= 16X^4 - 48X^2 + 12.
\end{aligned}
$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $A(n)$ l'assertion

   « On a $\deg P_n = n$ et le coefficient dominant de P_n est $(-1)^n 2^n$. »

   Montrons $\forall n \in \mathbb{N}, A(n)$ par récurrence double.

   Initialisation. Les assertions $A(0)$ et $A(1)$ proviennent directement de la définition de P_0 et P_1.

   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $A(n)$ et $A(n+1)$. On a alors

$$
\begin{aligned}
\deg\left(-2X\, P_{n+1}\right) &= \deg(-2X) + \deg P_{n+1} \\
&= 1 + n + 1 && \text{(d'après } A(n+1)) \\
&= n + 2 \\
\text{et } \deg(-2(n+1)P_n) &= n && \text{(d'après } A(n) \text{ et car } n+1 \neq 0) \\
\text{donc } \deg P_{n+2} &= n + 2,
\end{aligned}
$$

   car il s'agit de la somme de deux polynômes de degré distincts.

   Cela montre $A(n+2)$ et clôt la récurrence.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $B(n)$ l'assertion $P_n(-X) = (-1)^n P_n$. Montrons $\forall n \in \mathbb{N}, B(n)$ par récurrence double.

   Initialisation. On a $P_0(-X) = 1 = P_0$ et $P_1(-X) = 2X = -P_1$, d'où $B(0)$ et $B(1)$.

   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $B(n)$ et $B(n+1)$. On a alors

$$
\begin{aligned}
P_{n+2}(-X) &= -2(-X)P_{n+1}(-X) - 2(n+1)P_n(-X) \\
&= 2X(-1)^{n+1}P_{n+1} - 2(n+1)(-1)^n P_n && \text{(d'après } B(n) \text{ et } B(n+1)) \\
&= (-1)^n\left(-2XP_{n+1} - 2(n+1)P_n\right) \\
&= (-1)^{n+2}P_{n+2} && \text{(car } (-1)^{n+2} = (-1)^n),
\end{aligned}
$$

   ce qui prouve $B(n+2)$ et clôt la récurrence.

   On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le fonction polynomiale $t \mapsto P_n(t)$ est paire si n est pair et impaire sinon.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme la fonction polynomiale P_{2n+1} est impaire, d'après la question précédente, on a $P_{2n+1}(0) = 0$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$
\begin{aligned}
P_{2n+2}(0) &= \left(-2XP_{2n+1} - 2(2n+1)P_{2n}\right)(0) \\
&= -2(2n+1)P_{2n}(0).
\end{aligned}
$$

   Par une récurrence immédiate (comme $P_0(0) = 1$), cela montre que

$$
\begin{aligned}
P_{2n}(0) &= (-1)^n 2^n (2n-1)(2n-3)\cdots 5 \times 3 \times 1 \\
&= (-1)^n 2^n \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)\cdots 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2n)(2n-2)\cdots 4 \times 2} \\
&= (-1)^n 2^n \frac{(2n)!}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} \\
&= (-1)^n 2^n \frac{(2n)!}{2^n\, n!} \\
&= (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}.
\end{aligned}
$$

Les règles de calcul dans $\mathbb{K}[X]$ permettent notamment de factoriser la différence $P^3 - Q^3$:

$$P^3 - Q^3 = (P - Q)(P^2 + PQ + Q^2).$$

Comme P et Q sont distincts, $P - Q \neq 0$, donc $\deg(P - Q) \geqslant 0$ et l'on en déduit

$$\begin{aligned} \deg\left(P^3 - Q^3\right) &= \deg\left(P - Q\right) + \deg\left(P^2 + PQ + Q^2\right) \\ &\geqslant \deg\left(P^2 + PQ + Q^2\right). \end{aligned} \tag{$\heartsuit$}$$

Notons maintenant α (resp. β) le coefficient dominant de P (resp. Q), de telle sorte que l'on peut décomposer ses polynômes en leur terme dominant et ce qui suit : on écrit

$$P = \alpha X^n + P_0 \qquad \text{et} \qquad Q = \beta X^n + Q_0,$$

où $P_0, Q_0 \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$.
On a donc

$$\begin{aligned} P^2 &= \left(\alpha X^n + P_0\right)^2 \\ &= \alpha^2 X^{2n} + 2\, \underbrace{\alpha X^n P_0}_{\in \mathbb{K}_{2n-1}[X]} + \underbrace{P_0^2}_{\in \mathbb{K}_{2n-2}[X]} \\ &= \alpha^2 X^{2n} + R_1, \end{aligned}$$

où $R_1 = 2\alpha X^n P_0 + P_0^2 \in \mathbb{K}_{2n-1}[X]$.
De la même façon, on peut trouver $R_2, R_3 \in \mathbb{K}_{2n-1}[X]$ tels que $PQ = \alpha\beta X^{2n} + R_2$ et $Q^2 = \beta^2 X^{2n} + R_3$.
En notant $R = R_1 + R_2 + R_3 \in \mathbb{K}_{2n-1}[X]$, on trouve donc

$$P^2 + PQ + Q^2 = (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)X^{2n} + R. \tag{$\spadesuit$}$$

Le point-clef est maintenant que la non-nullité de α et β entraîne que $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0$ (et cette quantité est donc non nulle).
Avant de démontrer ce fait, constatons qu'il permet de conclure : l'égalité ($\spadesuit$) montre en effet alors que $\deg\left(P^2 + PQ + Q^2\right) = 2n$, et l'inégalité ($\heartsuit$) conclut que $\deg(P^3 - Q^3) \geqslant 2n$.
Pour montrer que $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \neq 0$, proposons plusieurs démonstrations.

En se ramenant à une identité remarquable. On distingue deux cas.

— Si α et β sont du même signe, $\alpha\beta > 0$. On en déduit alors que $\alpha\beta > -2\alpha\beta$, donc

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 \geqslant 0.$$

— De même, si α et β sont de signes opposés, on a $0 > \alpha\beta > 2\alpha\beta$, donc

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \geqslant \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 \geqslant 0.$$

Grâce à la forme canonique d'un trinôme. On peut appliquer la manipulation qui permet d'obtenir la factorisation canonique d'un trinôme, c'est-à-dire essayer de reconnaître dans une somme le début du développement du carré. On a alors

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 &= \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)^2 - \frac{\beta^2}{4} + \beta^2 \\ &= \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\beta^2. \end{aligned}$$

Cette quantité est donc la somme d'un carré de nombre réel et de $\frac{3}{4}\beta^2 > 0$, donc elle est strictement positive.

En se ramenant à un trinôme. Comme $\beta \neq 0$, on peut factoriser

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = \beta^2 \left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \frac{\alpha}{\beta} + 1\right).$$

Le trinôme du second degré $X^2 + X + 1$ ayant un discriminant < 0, on en déduit

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0,$$

comme voulu.

Grâce aux complexes. Posons $z = e^{i\pi/3}$. On a $|z| = 1$ et $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$, donc

$$\begin{aligned} |\alpha + \beta z|^2 &= \overline{(\alpha + \beta z)}(\alpha + \beta z) \\ &= (\alpha + \beta \overline{z})(\alpha + \beta z) && \text{(car } \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \\ &= \alpha^2 + \alpha\beta (z + \overline{z}) + \beta^2 z \overline{z} \\ &= \alpha^2 + 2\alpha\beta \operatorname{Re}(z) + \beta^2 |z|^2 \\ &= \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2. \end{aligned}$$

Comme $\beta \neq 0$, $\alpha + \beta z$ n'est pas nul (il suffit par exemple de regarder sa partie imaginaire), donc

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = |\alpha + \beta z|^2 > 0.$$

1. À vous.
2. • On a $X^{3n}-1=(X^3)^n-1$. L'identité de Bernoulli stipule que le polynôme A^n-B^n est divisible par $A-B$. En utilisant cela avec $A=X^3$ et $B=1$, on obtient que $X^{3n}-1$ est divisible par X^3-1. Ainsi il existe $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$X^{3n}-1=(X^3-1)Q_n$$

• On a donc démontré le petit lemme suivant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \exists\, Q_n \in \mathbb{R}[X], \quad X^{3n}=(X^3-1)Q_n+1$$

On applique cela avec les entiers p, q, r. Donc il existe Q_p, Q_q et Q_r tels que

$$X^{3p}=(X^3-1)Q_p+1 \qquad X^{3q}=(X^3-1)Q_q+1 \qquad X^{3r}=(X^3-1)Q_r+1$$

En utilisant l'égalité $X^{3p+2}+X^{3q+1}+X^{3r}=X^{3p}X^2+X^{3q}X+X^{3r}$, on en déduit

$$X^{3p+2}+X^{3q+1}+X^{3r} \;=\; \Big((X^3-1)Q_p+1\Big)X^2 \;+\; \Big((X^3-1)Q_q+1\Big)X \;+\; \Big((X^3-1)Q_r+1\Big)$$

D'où

$$X^{3p+2}+X^{3q+1}+X^{3r} \;=\; (X^3-1)\Big(X^2Q_p+XQ_q+Q_r\Big)+(X^2+X+1)$$

Or $X^3-1=(X-1)(X^2+X+1)$, d'où

$$X^{3p+2}+X^{3q+1}+X^{3r} \;=\; (X^2+X+1)\left[(X-1)\Big(X^2Q_p+XQ_q+Q_r\Big)+1\right]$$

On a donc montré que X^2+X+1 divise $X^{3p+2}+X^{3q+1}+X^{3r}$.

111

Au moins trois preuves.
Une avec les racines $\pm i\sqrt{2}$ (chausser ses lunettes : il y a un système somme-différence à voir).
L'autre avec l'identification des coefficients.
La troisième avec une division euclidienne.

112

Écrire explicitement la division euclidienne en fonction de a et b. Puis imposer au reste d'être nul. On trouve $b^3 - 2b - 1$ et $a = b^2 - 1$. D'où $b = -1$ ou $b = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. D'où 3 couples solutions.

113

Dans chacun des cas, on peut effectuer la division euclidienne de $A \in \mathbb{R}[X]$ par $B \in \mathbb{R}[X]$, qui est de degré 2.
On peut donc trouver $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $R \in \mathbb{R}_1[X]$ tels que $A = BQ + R$.
En notant $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ les coefficients de R, on obtient donc l'égalité

$$A = BQ + \alpha X + \beta, \tag{$*$}$$

et il s'agit de déterminer α et β.

(i) On évalue $(*)$ en 1 et en 2, qui sont les racines de B. On obtient ainsi

$$1 = 1^n = \alpha \times 1 + \beta \qquad \text{et} \qquad 2^n = \alpha \times 2 + \beta.$$

Il ne reste plus qu'à déterminer l'unique polynôme affine $R = \alpha X + \beta$ tel que $R(1) = 1$ et $R(2) = 2^n$. Après calcul, on obtient $\alpha = 2^n - 1$ et $\beta = 2 - 2^n$.
Ainsi, le reste dans la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$ est

$$(2^n - 1)X + (2 - 2^n).$$

(ii) On évalue $(*)$ en 1, qui est l'unique racine de B. On obtient ainsi

$$1 = 1^n = \alpha \times 1 + \beta \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \alpha + \beta = 1.$$

Pour exploiter le fait que 1 est racine double de B, on va également dériver la relation $(*)$, puis évaluer la relation dérivée en 1. Ainsi, $A' = 2(X-1)Q + (X-1)^2Q' + \alpha$ d'où $nX^{n-1} = 2(X-1)Q + (X-1)^2Q' + \alpha$ puis, en évaluant 1, on trouve $n = \alpha$.
On en déduit $\beta = 1 - \alpha = 1 - n$.
Ainsi, le reste dans la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ est

$$nX + (1 - n).$$

(iii) Le polynôme B possède deux racines qui sont cette fois-ci non réelles : il s'agit de $\pm i$.
En évaluant $(*)$ en i, on obtient

$$(i \sin t + \cos t)^n = \alpha i + \beta \qquad \text{donc} \qquad e^{int} = \alpha i + \beta.$$

(On pourrait également évaluer en $-i$, mais on n'obtiendrait alors rien d'autre que la relation conjuguée, ce qui ne nous apporterait pas de nouvelle information).
On obtient ainsi

$$\alpha = \operatorname{Im} e^{int} = \sin(nt)$$
$$\beta = \operatorname{Re} e^{int} = \cos(nt).$$

Ainsi, le reste dans la division euclidienne de $(X \sin t + \cos t)^n$ par $(X-1)^2$ est

$$\sin(nt)X + \cos(nt).$$

Autre solution.

Autre solution TORDUE sans nombres complexes, mais avec une récurrence sur n, alors qu'au début de l'exercice n est fixé ! Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{H}_n$ la propriété :

le reste de la division euclidienne de $(X+1)^n$ par X^2+1 est $\alpha_n X + \beta_n$ où

$$\alpha_n = \sqrt{2}^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \qquad \text{et} \qquad \beta_n = \sqrt{2}^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

Initialisation. Montrons que la propriété est vraie au rang 0.

D'une part, la division euclidienne de $(X+1)^0$ par X^2+1 s'écrit

$$(X+1)^0 \quad = \quad (X^2+1) \times 0_{\mathbb{R}[X]} \ + \ 0X+1$$

D'autre part, on a $\alpha_0 = \sqrt{2}^0 \sin 0 = 0$ et $\beta_0 = \sqrt{2}^0 \cos 0 = 1$.

Ainsi, le reste de la division euclidienne de $(X+1)^0$ par X^2+1 s'écrit $\alpha_0 X + \beta_0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété est vraie au rang n.

Ainsi, il existe $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$(X+1)^n \quad = \quad (X^2+1)Q_n \ + \ \alpha_n X + \beta_n$$

Multiplions par $X+1$, on obtient :

$$(X+1)^{n+1} \ = \ (X^2+1)(X+1)Q_n \ + \ (X+1)(\alpha_n X + \beta_n)$$

ou encore :

$$(X+1)^{n+1} \ = \ (X^2+1)(X+1)Q_n \ + \ \alpha_n X^2 + (\alpha_n+\beta_n)X + \beta_n$$

Écrivons $\alpha_n X^2$ sous la forme $\alpha_n(X^2+1) - \alpha_n$. On obtient

$$(X+1)^{n+1} \ = \ (X^2+1)(X+1)Q_n \ + \ \alpha_n(X^2+1) \ + \ (\alpha_n+\beta_n)X + (\beta_n - \alpha_n)$$

D'où

$$(X+1)^{n+1} \ = \ (X^2+1)\Big((X+1)Q_n + \alpha_n\Big) \ + \ (\alpha_n+\beta_n)X + (\beta_n - \alpha_n)$$

Il ne reste plus qu'à montrer que

$$\alpha_n + \beta_n = \alpha_{n+1} \qquad \text{et} \qquad \beta_n - \alpha_n = \beta_{n+1}$$

On a

$$\alpha_{n+1} \ = \ \sqrt{2}^{n+1} \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right) \ = \ \sqrt{2}^{n+1}\left(\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \ + \ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)$$

En utilisant que $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on obtient :

$$\alpha_{n+1} \ = \ \sqrt{2}^n\left(\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \ + \ \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)$$

ce qui s'écrit $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \beta_n$.

On procède de même pour β_{n+1}.

La propriété au rang $n+1$ est donc vraie.

115

1. à taper.
2. On a $P \circ P - X = (P \circ P - P) + (P - X)$.
   Donc il suffit de montrer que $P - X$ divise $P \circ P - P$.
   Pour deux polynômes A et B, on a
   $$P \circ A - P \circ B \;=\; (A - B) \times \text{qq chose}$$
   En effet, écrivons P comme combinaison linéaire de X^k.
   Constatons que $P \circ A - P \circ B$ est alors combinaison linéaire de $A^k - B^k$ pour $k \geqslant 1$ (que devient le terme pour $k = 0$?). Ce dernier polynôme est divisible par $A - B$ en vertu de l'égalité de Bernoulli.

   On applique ce résultat à $A = P$ et $B = X$.
   D'où $P \circ P - P$ est divisible par $P - X$.
3. Posons $P = X^2 + 3X + 1$.
   On a
   $$P \circ P - X \;=\; (X^2+3X+1)^2 + 3(X^2+3X+1) + 1 \;-\; X \;=\; (X^2+3X+1)^2 + 3X^2 + 8X + 4$$
   Et on a
   $$P - X \;=\; X^2 + 2X + 1 \;=\; (X+1)^2$$
   D'après la question précédente, on sait que $(X+1)^2$ divise $(X^2+3X+1)^2 + 3X^2 + 8X + 4$.
   On identifie le quotient (par exemple en identifiant les coefficients) et on trouve
   $$Q = X^2 + 4X + 5$$
   Reste à trouver les racines de ce polynôme (à vous) et à conclure (à vous).

   Les solutions de l'équation $(z^2 + 3z + 1)^2 + 3z^2 + 8z + 4 = 0$ sont donc ...

117

Supposons qu'un tel polynôme P existe.
Ainsi, il existe $A > 0$ tel que $\forall\, x \geqslant A,\ P(x) = \ln(x)$.
La clé de la preuve est de constater que le logarithme vérifie l'équation différentielle $xy' = 1$.
En particulier,

$$\forall\, x \geqslant A,\ x \ln'(x) = 1$$

Ainsi,

$$\forall\, x \geqslant A,\ xP'(x) = 1$$

On en déduit que les polynômes XP' et 1 coïncident sur un ensemble infini à savoir $[A, +\infty[$.
Donc ils sont égaux.
À cet instant, on a donc $XP' = 1$. En passant au degré, on en déduit que nécessairement $1 + \deg P' = 0$.
Or l'équation $1 + d = 0$ n'a pas de solution $d \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$. D'où l'absurdité.

Solution de Tigrane Ponsin (2022-2023). Exploiter le fait que $\ln(x^2) = 2\ln x$ pour obtenir $P(X^2) = 2P(X)$, d'où $2\deg P = \deg P$, d'où P est constant. Mais la fonction ln n'est pas constante !

(i) Supposons par l'absurde qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(k) = \frac{1}{k}.$$

Le polynôme $Q = XP$ vérifie alors

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, Q(k) = 1.$$

Autrement dit, les polynômes Q et 1 coïncident en une infinité de points. D'où $Q = 1$.
On a donc montré $XP = 1$, ce qui est absurde (par exemple, en évaluant en 0, on trouve $1 = 0$).

(ii) Supposons par l'absurde qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(k) = \sqrt{k^2 + 1}.$$

Le polynôme $Q = P^2$ vérifie alors

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, Q(k) = k^2 + 1.$$

Autrement dit, les polynômes Q et $X^2 + 1$ coïncident en une infinité de points.
D'où $Q = X^2 + 1$.
On a donc montré $P^2 = X^2 + 1$.
Montrons que cela est absurde.
En passant au degré, on obtient $2 \deg P = 2$, donc $\deg P = 1$.
Comme tout polynôme réel de degré 1 possède une racine réelle, on en déduit qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(x_0) = 1$. En évaluant en x_0 l'égalité $P^2 = X^2 + 1$, on trouve

$$\underbrace{P(x_0)^2}_{=0} = x_0^2 + 1$$

Or $x_0^2 + 1 > 0$ donc est non nul, d'où la contradiction.

(iii) **Solution 1 (probablement la plus simple).** Supposons par l'absurde pouvoir trouver un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(k) = 2^k.$$

Il est déjà clair qu'un tel polynôme P ne peut pas être nul.
On peut alors écrire $P = \sum_{\ell=0}^{d} a_\ell X^\ell$, où $d \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_{d-1} \in \mathbb{R}$ et $a_d \in \mathbb{R}^*$.
Par croissance comparée, quel que soit $\ell \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{x^\ell}{2^x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

On en déduit (par opérations) que

$$\frac{P(x)}{2^x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

Cela contredit le fait que cette fonction $f : x \mapsto \frac{P(x)}{2^x}$ doit satisfaire $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(k) = 1$, et donne la contradiction attendue.

Solution 2 (un peu trop compliquée). On peut ici essayer de faire une démonstration dans la même veine que celle des deux points précédents. Le problème est qu'il n'est pas si facile de se ramener au fait que des polynômes coïncident une infinité de points : passer au logarithme, par exemple, transformerait 2^k en $\ln(2)\, k$, qui est bien la valeur en k du polynôme $\ln(2)\, X$, mais le second membre de l'égalité, $\ln P(k)$, ne serait plus polynomial.
On peut essayer d'utiliser la dérivée : la fonction $f : t \mapsto 2^t = \exp(\ln(2)\, t)$ est dérivable et vérifie $f' = \ln(2)\, f$, et on peut vérifier que le polynôme nul est le seul polynôme P vérifiant $P' = \ln(2) P$ (pour des raisons de degré, ou parce que tout polynôme devient nul quand on le dérive suffisamment de fois). Le problème est que la condition $\forall t \in$

$\mathbb{N}^*, P(t) = f(t)$ ne permettra pas de « passer » à la dérivée, car on a coïncidence en des points isolés. Pour prendre un exemple, les fonctions cos et sin coïncident en tout point de la forme $2\pi\,k + \frac{\pi}{4}$, mais cela ne suffit pas à dire que leurs dérivées sont égales en ces points.

On peut contourner cette difficulté en utilisant un analogue discret de la dérivée, « l'opérateur aux différences finies », qui remplace P par $P(X+1)-P(X)$ (comme $(X+1)-X = 1$, on peut penser à cette différence comme à un taux d'accroissement).

Après ces longs prolégomènes, passons à la démonstration.

Supposons par l'absurde qu'il existe un polynôme P tel que $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(k) = 2^k$. En particulier, P est non constant. On peut noter $d = \deg P \in \mathbb{N}^*$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} P(k+1) - P(k) &= 2^{k+1} - 2^k \\ &= 2^k \\ &= P(k). \end{aligned}$$

Ainsi, la différence $P(X+1) - P(X)$ et P coïncident sur une infinité de valeurs. Par rigidité des polynômes, on en déduit que $P(X+1) - P(X) = P$.

On va aboutir à une contradiction en vérifiant que $\deg(P(X+1) - P(X)) \leqslant d - 1$ (on pourrait d'ailleurs montrer l'égalité).

On note α le coefficient dominant de P, de telle sorte que αX^d soit le coefficient dominant de P. On peut donc trouver $P_0 \in K_{d-1}[X]$ tel que $P = \alpha X^d + P_0$.

On a alors

$$\begin{aligned} P(X+1) - P(X) &= \big(\alpha(X+1)^d + P_0(X+1)\big) - \big(\alpha X^d + P_0(X)\big) \\ &= \alpha \left[\sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} X^k - X^d\right] + P_0(X+1) - P_0(X) \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{d-1} \binom{d}{k} X^k + P_0(X+1) - P_0(X). \end{aligned}$$

Or,

— quel que soit $k \in [\![0, d-1]\!]$, on a $X^k \in K_{d-1}[X]$ donc $\alpha \sum_{k=0}^{d-1} \binom{d}{k} X^k \in K_{d-1}[X]$ (par stabilité par combinaison linéaire) ;

— par construction, $P_0 \in K_{d-1}[X]$;

— le polynôme $X+1$ est non constant, donc $\deg\left(P_0(X+1)\right) = \deg P_0 = \deg(X+1) = \deg P_0$, donc $P_0(X+1) \in K_{d-1}[X]$.

Par stabilité par combinaison linéaire, on en déduit que $P(X+1) - P(X) \in K_{d-1}[X]$, ce qui conclut la démonstration.

1. Joker.
2. (a) Le polynôme $\prod_{i=1}^{n}(X - x_i)$ convient.

   (b) Le polynôme $\prod_{j=1}^{n}(X - x_j)$ vaut $\prod_{i=1}^{n}(x_i - x_j) \neq 0$ en x_i. Il suffit alors de poser

$$L_0 = \frac{\prod_{j=1}^{n}(X - x_j)}{\prod_{i=1}^{n}(x_i - x_j)}.$$

   (c) De même, il suffit de poser

$$L_i = \frac{\prod_{j \in [\![0,n]\!] \setminus \{i\}} (X - x_j)}{\prod_{j \in [\![0,n]\!] \setminus \{i\}}^{n} (x_i - x_j)}.$$

3. Soit

$$P = \sum_{j=0}^{n} a_j L_j.$$

Le polynôme P est une somme d'éléments de $K_n[X]$, donc on a $P \in K_n[X]$. Par ailleurs, fixons $i \in [\![0, n]\!]$. Si l'on calcule $P(x_i)$, on constate que tous les termes $L_j(a_i)$ de la somme s'annulent, à l'exception de $L_i(x_i)$. On a donc

$$P(x_i) = a_i L_i(x_i) = a_i,$$

ce qui conclut.

4. La question précédente a montré l'existence. Par ailleurs, si deux polynômes de $K_n[X]$ vérifient la condition $(\mathcal{IL})$, la première question entraîne qu'ils sont égaux, ce qui montre l'unicité.
5. La condition entraîne que le polynôme $Q = XP - 1$ appartient à $K_n[X]$, qu'il possède tous les éléments de $[\![1, n]\!]$ comme racines, et il est par ailleurs clair que $Q(0) = -1$.
Par unicité du polynôme interpolateur de Lagrange, on en déduit que

$$Q = -\frac{\prod_{j=1}^{n}(X - j)}{\prod_{j=1}^{n}(-j)} = -\frac{1}{(-1)^n n!} \prod_{j=1}^{n}(X - j) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \prod_{j=1}^{n}(X - j).$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
Q(-1) &= \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \prod_{j=1}^{n}(-1 - j) \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{n!} (-1)^n \prod_{j=1}^{n}(1 + j) \\
&= -\frac{1}{n!} \prod_{k=2}^{n+1} k & \begin{bmatrix} k = j + 1 \\ j = k - 1 \end{bmatrix} \\
&= -\frac{(n+1)!}{n!} \\
&= -(n + 1).
\end{aligned}$$

Comme $Q(-1) = -P(-1) - 1$, on en déduit $P(-1) = n$.

(i) Si $\deg P \geqslant 1$, on sait que $\deg P' = \deg P - 1$, ce qui entraîne $P \neq P'$.
Si $\deg P \leqslant 0$, on a $P' = 0$, donc P ne peut être égal à P' que si $P = 0$.
Ainsi, $\left\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P = P'\right\} = \{0\}$.

(ii) On procède par analyse et synthèse.

Analyse. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $(P')^2 = 4P$. On distingue deux cas :

— Si $\deg P \leqslant 0$, $P' = 0$, donc $P = 0$.

— Supposons $\deg P \geqslant 1$. On a alors $\deg P' = \deg P - 1$. On a alors

$$\deg(P')^2 = 2\deg P' = 2\deg P - 2 \quad \text{et} \quad \deg(4P) = \deg P,$$

d'où il vient $2\deg P - 2 = \deg P$ et donc $\deg P = 2$.
On peut donc trouver $a \in \mathbb{K}^*$ et $b, c \in \mathbb{K}$ tels que $P = aX^2 + bX + c$. On a alors la chaîne d'équivalences

$$\begin{aligned}
(P')^2 = 4P \quad & \text{donc} \quad (2aX + b)^2 = 4(aX^2 + bX + c) \\
& \text{donc} \quad 4a^2X^2 + 4abX + b^2 = 4aX^2 + 4bX + 4c \\
& \text{donc} \quad \begin{cases} 4a^2 = 4a \\ 4ab = 4b \\ b^2 = 4c \end{cases} \qquad \text{(par identification des coefficients)} \\
& \text{donc} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b^2 = 4c, \end{cases} \qquad \text{(car } a \neq 0\text{).}
\end{aligned}$$

Ainsi, $P = X^2 + bX + \frac{b^2}{4}$.

Synthèse. Réciproquement, on vérifie directement que le polynôme nul et, pour tout $b \in \mathbb{K}$, le polynôme $X^2 + bX + \frac{b^2}{4}$, vérifient la condition de l'énoncé.

In fine,

$$\left\{P \in \mathbb{K}[X] \mid (P')^2 = 4P\right\} = \{0\} \cup \left\{X^2 + bX + \frac{b^2}{4} \mid b \in \mathbb{K}\right\}$$

(i) On constate que le polynôme est solution.
Montrons que c'est la seule solution.
Pour cela, supposons qu'il existe un polynôme *non nul* P tel que $P = P'$.
Comme $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$, on a $\deg P \in \mathbb{N}$.
Comme $P = P'$, on a $\deg P = \deg P'$.
Or $\deg P \leqslant \deg P' - 1$.
On en déduit $\deg P \leqslant \deg P - 1$ (ce qui serait possible si $\deg P$ était égal à $-\infty$).
Comme $\deg P \in \mathbb{N}$, en ajoutant $-\deg P$, on obtient $0 \leqslant -1$, d'où la contradiction.

(ii) Montrons que l'équation $P - XP' = X$ d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$ n'a pas de solution.
Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P - XP' = X$.

Première solution d'Alfred – année 2021-2022

On a $P - XP' = X$.
Alors en dérivant, on obtient
$$P' - (P' + XP'') = 1$$
D'où $-XP'' = 1$.
Cette égalité montre que $P'' \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$, donc $\deg P'' \in \mathbb{N}$.
En prenant les degrés, on a $1 + \deg P'' = 0$, ce qui conduit à $\deg P'' = -1$ qui n'est pas dans $\mathbb{N}$ d'où la contradiction.

Deuxième solution

Écrivons P sous la forme $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ (on ne suppose pas que $a_n \neq 0$).
L'égalité $P - XP' = X$ s'écrit
$$\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \;-\; X \times \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} \;=\; X$$
ou encore
$$\sum_{k=0}^{n} a_k (1-k) X^k \;=\; X$$
En examinant le coefficient en X^1, on a
$$a_1(1-1) = 1 \qquad \text{d'où} \qquad 0 = 1$$
d'où la contradiction.

(iii) Résoudre l'équation $2P = XP'$.

Première solution

Analyse Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $2P = XP'$.

Écrivons P sous la forme $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ (on ne suppose pas que $a_n \neq 0$).
L'égalité $2P = XP'$ s'écrit
$$\sum_{k=0}^{n} 2a_k X^k \;=\; X \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$$
ou encore
$$\sum_{k=0}^{n} 2a_k X^k \;=\; \sum_{k=1}^{n} k a_k X^k$$
ou encore
$$\sum_{k=0}^{n} 2a_k X^k \;=\; \sum_{k=0}^{n} k a_k X^k$$

Par identification des coefficients, on en déduit que

$$\forall\, k \in [\![0, n]\!], \quad 2a_k = ka_k \qquad \text{ou encore} \qquad (2-k)a_k = 0$$

Par conséquent,

$$\forall\, k \neq 2, \quad a_k = 0$$

Bilan de l'analyse : P est de la forme a_2X^2 avec $a_2 \in \mathbb{K}$.

Synthèse Vérifions que les polynômes de la forme aX^2 avec $a \in \mathbb{K}$ sont solutions.

Le membre gauche vaut $2P = 2aX^2$.

Le membre droit vaut $XP' = X \times 2aX = 2aX^2$.

D'où $2P = XP'$.

BILAN : les solutions sont les polynômes de la forme aX^2 avec $a \in \mathbb{K}$.

Deuxième solution par équivalences (mais attention, en général, c'est dangereux de raisonner par équivalence)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ que l'on écrit $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ (on ne suppose pas que $a_n \neq 0$).

On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
2P = XP' &\iff \sum_{k=0}^{n} 2a_k X^k = \sum_{k=0}^{n} ka_k X^k \\
&\iff \forall\, k \in [\![0, n]\!], \quad 2a_k = ka_k \\
&\overset{\text{WHY}}{\iff} \forall\, k \in [\![0, n]\!] \setminus \{2\}, \quad a_k = 0 \\
&\iff P = a_2X^2
\end{aligned}$$

(iv) **Analyse** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $mP = XP'$.

Écrivons P sous la forme $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ (on ne suppose pas que $a_n \neq 0$).

L'égalité $mP = XP'$ s'écrit

$$\sum_{k=0}^{n} ma_k X^k = X \sum_{k=1}^{n} ka_k X^{k-1}$$

ou encore

$$\sum_{k=0}^{n} ma_k X^k = \sum_{k=1}^{n} ka_k X^k$$

ou encore

$$\sum_{k=0}^{n} ma_k X^k = \sum_{k=0}^{n} ka_k X^k$$

Par identification des coefficients, on en déduit que

$$\forall\, k \in [\![0, n]\!], \quad ma_k = ka_k \qquad \text{ou encore} \qquad (m-k)a_k = 0$$

Par conséquent,

$$\forall\, k \neq m, \quad a_k = 0$$

Bilan de l'analyse : P est de la forme a_mX^m avec $a_m \in \mathbb{K}$.

Synthèse Vérifions que les polynômes de la forme aX^m avec $a \in \mathbb{K}$ sont solutions.

Le membre gauche vaut $mP = maX^m$.

Le membre droit vaut $XP' = X \times maX = maX^m$.

D'où $mP = XP'$.

BILAN : les solutions sont les polynômes de la forme aX^m avec $a \in \mathbb{K}$.

122

Vous devez trouver $\operatorname{Vect}(X+2)$.

Remarque. Cette équation est « linéaire en P ».
En effet, on cherche le noyau de $P \mapsto X(X+1)P'' + (X+2)P' - P$ qui est une application linéaire.
Ainsi, la solution doit être également « linéaire en P ».
Une famille génératrice permettra donc de décrire l'ensemble des solutions !

123

Le polynôme nul est solution.
Soit P non nul vérifiant $P(2X) = P'(X)P''(X)$.
Notons $n = \deg P$.
Si $n < 2$, alors $P'' = 0_{\mathbb{K}[X]}$. Avec la relation, on trouve $P = 0$ ce que l'on a exclu.
Ainsi, $n \geqslant 2$ et alors $\deg P'' = n - 2$ et $\deg P = n - 1$.
Par passage au degré dans la relation, on trouve $n = (n-1) + (n-2)$.
D'où $n = 3$.
On peut l'écrire avec ses coefficients et traduire l'égalité $P(2X) = P'(X)P''(X)$ à l'aide des coefficients.
On trouve $P = \frac{4}{9}X^3$.
Réciproquement, ce polynôme est bien solution.

L'ensemble des solutions est donc le doubleton $\left\{0_{\mathbb{K}[X]},\ \frac{4}{9}X^3\right\}$.

Le polynôme nul n'est pas solution.
Un polynôme solution est nécessairement de degré n.
Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$.
On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} P - P' = X^n \quad &\iff \quad a_n X^n + \sum_{k=0}^{n-1} \big[a_k - (k+1)a_{k+1}\big] X^k = X^n \\ &\iff \quad a_n = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, k \in [\![0, n-1]\!], \quad a_k = (k+1)a_{k+1} \end{aligned}$$

Ces relations définissent de manière unique les coefficients de P, donc définissent de manière unique P.

Essayons de trouver une formule explicite.
Par récurrence descendante finie, on voit que les a_k sont non nuls.
Ensuite, fixons $j \in [\![0, n-1]\!]$ (et même dans $[\![0, n]\!]$ si l'on veut !). On a :

$$\prod_{k=j}^{n-1} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \prod_{k=j}^{n-1} (k+1)$$

d'où, par télescopie, $\dfrac{a_j}{a_n} = n(n-1)\cdots(j+1)$.
Comme $a_n = 1$, on obtient $a_j = \dfrac{n!}{j!}$.
Bilan : $P_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!} X^j$.

Autre preuve.

Analyse.

Soit P solution.
Le polynôme P n'est pas nul.
On a nécessairement $n = \deg P$.
En dérivant une fois $P' - P'' = nX^{n-1}$, puis $P'' - P^{(3)} = n(n-1)X^{n-2}$.
Par récurrence, on obtient

$$\forall\, k \in [\![0, n]\!], \quad P^{(k)} - P^{(k+1)} = n(n-1)\cdots(n-k+1)X^{n-k}$$

Par somme,

$$P - \underbrace{P^{(n+1)}}_{=0} = \sum_{k=0}^{n} n(n-1)\cdots(n-k+1)X^{n-k}$$

D'où

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k}$$

Synthèse. On vérifie que le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k}$ est solution.

(i) On a $P = X^5 - 4X^4 + 7X^3 - 7X^2 + 4X - 1$, donc $P(1) = 0$.
Puis $P' = 5X^4 - 16X^3 + 21X^2 - 14X + 4$, donc $P'(1) = 0$.
On a $P'' = 20X^3 - 48X^2 + 42X - 14$, d'où $P''(1) = 0$.
On a $P''' = 60X^2 - 96X + 42$, d'où $P'''(1) \neq 0$.
Ainsi 1 est racine de P de multiplicité 3.
Ainsi P s'écrit $(X-1)^3 Q$ avec $Q \in \mathbb{K}_2[X]$.
En examinant les coefficients dominant et constant, on peut dire que Q est de la forme $X^2 + bX + 1$. Reste donc à déterminer b.
On a l'égalité
$$P = (X-1)^3(X^2 + bX + 1)$$
Le coefficient en X du polynôme à droite vaut $3 - b$.
Comme le coefficient en X de P vaut 4, on a $4 = 3 - b$, d'où $b = -1$.
On a donc l'égalité :
$$P = (X-1)^3(X^2 - X + 1)$$
Comme le discriminant de $X^2 - X + 1$ est strictement négatif, ce polynôme est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, donc la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ est
$$P = (X-1)^3(X^2 - X + 1)$$

(ii) On a $P = X^4 + 2X^2 - 8X + 5$, donc $P(1) = 0$.
On a $P' = 4X^3 + 4X - 8$, donc $P'(1) = 0$.
Donc 1 racine de P de multiplicité au moins 2. Ainsi, P s'écrit $(X-1)^2 Q$ avec $\deg Q \leqslant 2$.
Le polynôme Q est de la forme $aX^2 + bX + c$.
En examinant le coefficient dominant et constant, on obtient directement $a = 1$ et $c = 5$. Reste à déterminer le coefficient b. On trouve $b = 2$.
On a donc l'égalité
$$P = (X-1)^2(X^2 + 2X + 5)$$
Comme le discriminant de $X^2 + 2X - 5$ est strictement négatif, ce polynôme est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. Ainsi, la factorisation du polynôme P est
$$P = (X-1)^2(X^2 + 2X + 5)$$

(iii) On a
$$P = X^4 - (5 + \sqrt{2})X^3 + (5\sqrt{2} - 2)X^2 + (10 + 2\sqrt{2})X - 10\sqrt{2}$$
Donc $P(\sqrt{2}) = 0$.
Puis $P' = 4X^3 - 3(5 + \sqrt{2})X^2 + 2(5\sqrt{2} - 2)X + (10 + 2\sqrt{2})$, d'où $P'(\sqrt{2}) = 0$.
De plus, $P'' = 12X^2 - 6(5 + \sqrt{2})X + 2(5\sqrt{2} - 2)$, donc $P''(\sqrt{2}) = -20\sqrt{2} + 8 \neq 0$,
Donc $\sqrt{2}$ est racine de P de multiplicité 2.
Ainsi P s'écrit $(X - \sqrt{2})^2(aX^2 + bX + c)$.
En identifiant les coefficients, on trouve $a = 1$, $b = \sqrt{2} - 5$ et $c = -5\sqrt{2}$.
On a donc l'égalité
$$P = (X - \sqrt{2})^2(X^2 + (\sqrt{2} - 5)X - 5\sqrt{2})$$
Le polynôme $X^2 + (\sqrt{2} - 5)X - 5\sqrt{2}$ a un discriminant positif ; il admet 5 et $-\sqrt{2}$ pour racine. Il s'écrit donc $(X - 5)(X + \sqrt{2})$.
On a donc l'égalité
$$P = (X - \sqrt{2})^2(X - 5)(X + \sqrt{2})$$
C'est la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

127

Soit P un polynôme de degré d impair que l'on écrit

$$P = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \qquad \text{avec } a_d \neq 0$$

On a alors

$$\forall\, x \neq 0, \quad P(x) \;=\; a_d x^d \underbrace{\left(1 + \frac{a_{d-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^d}\right)}_{\xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 1} \qquad \text{et} \qquad x^d \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \pm\infty.$$

On en déduit que

$$P(x) \to \begin{cases} \pm\infty & \text{si } a_d > 0 \\ \mp\infty & \text{si } a_d < 0. \end{cases}$$

Par ailleurs, la fonction $x \mapsto P(x)$ est polynomiale donc continue.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires généralisé, on en déduit l'existence de $c \in \mathbb{R}$ tel que $P(c) = 0$.
Le polynôme P a donc une racine réelle.

Première preuve. On utilise la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}(X+1)^n - nX - 1 &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k - nX - 1 \\ &= \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} X^k \\ &= X^2 \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} X^{k-2}}_{\in \mathbb{K}[X]},\end{aligned}$$

donc ce polynôme est divisible par X^2.

Deuxième preuve. Notons $P = (X+1)^n - nX - 1$. On a

- ⋆ $P(0) = (0+1)^n - n\,0 - 1 = 0$, donc 0 est racine de P ;
- ⋆ $P' = n(X+1)^{n-1} - n$, donc $P'(0) = n1^{n-1} - n = 0$.

Donc 0 est racine de multiplicité au moins 2. Donc X^2 divise P.

129

On a

- $P(1) = 1 - (2n+1) + (2n+1) - 1 = 0$, donc 1 est racine de P.
- $P' = (2n+1)X^{2n} - (2n+1)(n+1)X^n + (2n+1)nX^{n-1}$, donc

$$\begin{aligned} P'(1) &= (2n+1) - (2n+1)(n+1) + (2n+1)n \\ &= 0, \end{aligned}$$

  donc 1 est racine de P'.
- $P'' = (2n+1)(2n)X^{2n-1} - (2n+1)(n+1)nX^{n-1} + (2n+1)n(n-1)X^{n-2}$ donc

$$\begin{aligned} P''(1) &= (2n+1)(2n) - (2n+1)(n+1)n + (2n+1)n(n-1) \\ &= (2n+1)n\,[2 - (n+1) + (n-1)] \\ &= 0, \end{aligned}$$

  donc 1 est racine de P''.
- $P''' = (2n+1)(2n)(2n-1)X^{2n-2} - (2n+1)(n+1)n(n-1)X^{n-2} + (2n+1)n(n-1)(n-2)X^{n-3}$ donc

$$\begin{aligned} P'''(1) &= (2n+1)(2n)(2n-1) - (2n+1)(n+1)n(n-1) + (2n+1)n(n-1)(n-2) \\ &= (2n+1)n\,[2(2n-1) - (n+1)(n-1) + (n-1)(n-2)] \\ &= (2n+1)n\,[4n-2 - (n-1)\,[(n+1) - (n-2)]] \\ &= (2n+1)n(n+1) \neq 0, \end{aligned}$$

  donc 1 n'est pas racine de P'''.

La multiplicité de 1 en tant que racine de P est donc 3.

130

On écrit le polynôme sous la forme

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k,$$

où *a priori*, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$.
Cela permet de définir le polynôme conjugué

$$\overline{P} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} X^k \in \mathbb{C}[X].$$

On voit directement que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\overline{P}(t) = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} t^k = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k t^k} = \overline{P(t)}.$$

Ainsi, si $\alpha \in \mathbb{R}$ est tel que $P(\alpha) \in \mathbb{R}$, on a automatiquement $P(\alpha) = \overline{P}(\alpha)$.
L'hypothèse de l'énoncé entraîne donc que P et $\overline{P}$ coïncident sur un ensemble infini, c'est-à-dire que leur différence $P - \overline{P}$ possède une infinité de racines. D'après le critère radical de nullité, on en déduit que $P - \overline{P} = 0$, c'est-à-dire que $P = \overline{P}$.
En identifiant les coefficients, on obtient $\forall k \in [\![0, n]\!], \overline{a_k} = a_k$, c'est-à-dire $\forall k \in [\![0, n]\!], a_k \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que $P \in \mathbb{R}[X]$.

1. Soit a une racine de P_n, donc $P_n(a) = 0$. Montrons que $P_n'(a) \neq 0$.
La clé de la démonstration réside dans l'égalité suivante (à prouver tout seul)

$$P_n' \;=\; P_{n-1} \quad \text{qui s'écrit encore} \quad P_n' \;=\; P_n - \frac{1}{n!}X^n$$

D'où

$$P_n'(a) = P_n(a) - \frac{1}{n!}a^n$$

Comme $P_n(a) = 0$, on obtient $P_n'(a) = -\frac{1}{n!}a^n$.
Cette expression est non nulle car $a \neq 0$ (en effet, on remarque que $P_n(0) = 1$ donc 0 n'est pas racine).

Résumé de la preuve.
On a l'égalité fondamentale suivante (spécifique à ce polynôme) :

$$P_n \;=\; \frac{1}{n!}X^n \;+\; P_n'$$

En évaluant en $a \in \mathbb{C}$, on obtient

$$P_n(a) \;=\; \frac{1}{n!}a^n \;+\; P_n'(a)$$

Désormais, si on prend a une racine de P_n, on a nécessairement $a \neq 0$ (WHY ?), et on constate donc que $P_n'(a) \neq 0$.

Autre rédaction (un petit raisonnement par l'absurde).
Le polynôme constant $P_0 = 1$ n'a pas de racine, donc il n'a tautologiquement que des racines simples.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que P_n n'a que des racines simples.
Supposons par l'absurde que P_n possède une racine multiple $a \in \mathbb{C}$. En particulier, on doit avoir

$$P_n(a) = P_n'(a) = 0.$$

Or,

$$\begin{aligned} P_n' &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k\,X^{k-1}}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{X^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{X^{\ell}}{\ell!} \qquad [\ell = k-1] \\ &= P_{n-1} \\ &= P_n - \frac{X^n}{n!}. \end{aligned}$$

La double égalité $P_n(a) = P_n'(a) = 0$ donne alors que $\frac{a^n}{n!} = 0$; ce qui entraîne, *puisque* $n \geqslant 1$, que $a = 0$.
Or 0 n'est pas racine de P_n, car $P_n(0) = 1 \neq 0$.
On obtient ainsi la contradiction souhaitée, ce qui conclut la démonstration.

2. **Brouillon.**
On commence par se faire la main sur les petites valeurs de n.
On a

$$P_0 = 1 \qquad P_1 = X + 1 \qquad P_2 = \frac{1}{2}X^2 + X + 1 \qquad P_3 = \frac{1}{6}X^3 + \frac{1}{2}X^2 + X + 1$$

On constate que les polynômes P_0 et P_2 n'ont pas de racine réelle (calculer le discriminant).

D'autre part, on se rappelle du résultat suivant « un polynôme à ceofficients réels de degré impair admet *au moins* une racine réelle ».

Pour connaître le nombre de racines de P_3, on peut étudier les variations de la fonction polynomiale associée, notée $\widetilde{P_3}$.

Or on a l'égalité de polynômes formels $P_3' = P_2$.

De plus, la fonction $\widetilde{P_2}$ ne s'annule pas, donc garde un signe constant en vertu du TVI (une fonction polynomiale est continue).

Comme il est facile de voir que $\widetilde{P_2}$ est une fonction positive, on constate que $\widetilde{P_3}$ est croissante, donc ne peut pas s'annuler plus de deux fois (comme $\widetilde{P_3}$ s'annule une fois, elle s'annule une unique fois !).

Début de la preuve. On note $\widetilde{P}$ la fonction polynomiale associée à un polynôme P.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{H}_n$ la propriété :

$$\text{« Le polynôme } P_n \text{ possède } \begin{cases} 0 \text{ racine réelle} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 \text{ unique racine réelle} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \text{ »}$$

Initialisation.

Montrons $\mathcal{H}_0$. Comme 0 est pair, il s'agit de montrer que P_0 n'a pas de racine réelle, ce qui est le cas puisque $P_0 = 1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{H}_{n-1}$. Montrons $\mathcal{H}_n$.

Il y a deux cas à distinguer !

— **Cas n pair.** Montrons que P_n n'a pas de racine réelle.

Utilisons un raisonnement d'Analyse en étudiant les fonctions polynomiales associées.

On a l'égalité de polynômes formels $P_n' = P_{n-1}$.

D'après $\mathcal{H}_{n-1}$, comme $n-1$ est impair, le polynôme P_{n-1} admet une unique racine réelle, notons-la α.

Comme le coefficient dominant de P_{n-1} est positif, on en déduit la première ligne du tableau suivant.

Justifions la deuxième ligne.

On a $P_{n-1}(\alpha) = 0$ et la relation fondamentale $P_n = \frac{1}{n!}X^n + P_n'$, d'où $P_n(\alpha) = \dfrac{1}{n!}\alpha^n$.

Comme n est pair, $P_n(\alpha) \geqslant 0$.

Par ailleurs, comme 0 n'est pas racine des polynômes P_k, on a $\alpha \neq 0$.

On en déduit $P_n(\alpha) > 0$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de $\widetilde{P_n}' = \widetilde{P_{n-1}}$		$-$	0	$+$	
Variations de $\widetilde{P_n}$		$\searrow$	> 0	$\nearrow$	

On en déduit que P_n n'a pas de racine réelle.

— **Cas n impair.** Montrons que P_n a une unique racine réelle.

D'après $\mathcal{H}_{n-1}$, comme $n-1$ est pair, le polynôme P_{n-1} n'admet pas de racine réelle. De plus, en examinant le signe du coefficient dominant et en utilisant la continuité de $\widetilde{P_{n-1}}$, on obtient que la fonction $\widetilde{P_{n-1}}$ est strictement positive.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $\widetilde{P_n}' = \widetilde{P_{n-1}}$		$+$	
Variations de $\widetilde{P_n}$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Le TVI appliqué à la fonction $\widetilde{P_n}$ montre que le polynôme formel P_n admet une unique racine réelle.

Dans les deux cas, on a montré $\mathcal{H}_n$.

134

Soit $n \in \mathbb{N}$ un majorant du degré de P.
D'après la formule de Taylor, on a

$$P \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k \;=\; P(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$

On a donc

$$\forall\, x \in [a, +\infty[, \quad P(x) = P(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

On a $\forall\, x \in [a, +\infty[,\; x - a \geqslant 0$, d'où $(x-a)^k \geqslant 0$.
De plus, par hypothèse, on a $\forall\, k \in \mathbb{N}^*, P^{(k)}(a)$.
Donc tous les termes de la somme de droite sont $\geqslant 0$, ce qui montre que

$$\forall\, x \in [a, +\infty[, \quad P(x) \geqslant P(a) > 0.$$

On en déduit que P ne possède pas de racines dans $[a, +\infty[$.

1. À vous.
2. • L'identité de Bernoulli fournit

$$X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$$

Comme le discriminant de X^2+X+1 est négatif, c'est la factorisation de X^3-1 dans $\mathbb{R}[X]$.
• On a $X^3+1 = -\Big((-X)^3-1\Big) = -\big((-X)-1\big)\big((-X)^2+(-X)+1\big)$. Donc

$$X^3+1 \;=\; -(-X-1)(X^2-X+1)$$

Donc

$$X^3+1 \;=\; (X+1)(X^2-X+1)$$

Comme le discriminant de X^2-X+1 est négatif, c'est la factorisation de X^3+1 dans $\mathbb{R}[X]$.
• Concluons.
En utilisant les deux points précédents et la factorisation de Y^2-1, on a :

$$X^6-1 \;=\; (X^3)^2-1 \;=\; (X^3-1)(X^3+1) \;=\; (X-1)(X^2+X+1)(X+1)(X^2-X+1)$$

Comme les discriminants des polynômes de degré 2 sont négatifs, c'est la factorisation de X^6-1 dans $\mathbb{R}[X]$.

Autre idée (pas terrible).
En utilisant la factorisation de Y^3-1, on a

$$X^6-1 \;=\; (X^2)^3-1 \;=\; (X^2-1)(X^4+X^2+1)$$

Il nous faut donc factoriser X^2-1 (facile, c'est $(X-1)(X+1)$) et factoriser le polynôme de degré X^4+X^2+1 (plus difficile !), c'est un polynôme sans racine réelle donc produit de deux polynômes de degré 2. Et sa factorisation fait l'objet de l'exercice suivant.

Première solution astucieuse On a

$$X^4 + X^2 + 1 \;=\; (X^2+1)^2 - X^2 \;=\; (X^2+1-X)(X^2+1+X)$$

Comme chaque polynôme de degré 2 obtenu a un discriminant strictement négatif, la factorisation du polynôme P est :

$$X^4 + X^2 + 1 \;=\; (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$$

Deuxième solution
Voici un mini-lemme.

> Un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré pair est toujours un produit de polynômes de degré 2.
> Un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré impair est toujours un produit de polynômes de degré 2,
> à un facteur de degré 1 près !

Le polynôme $P = X^4 + X^2 + 1$ se factorise sous la forme suivante (penser au mini-lemme, ou à sa démonstration) :

$$P = a(X^2 + bX + c)(X^2 + b'X + c')$$

Comme P est unitaire, on a $a = 1$.
Le membre droit vaut $X^4 + (b + b')X^3 + (c + bb' + c')X^2 + (bc' + cb')X + cc'$.
Par identification des coefficients, on a les 4 égalités suivantes :

$$\begin{cases} b + b' = 0 \\ c + bb' + c' = 1 \\ bc' + cb' = 0 \\ cc' = 1 \end{cases}$$

Les lignes 1 et 3 impliquent $b(c' - c) = 0$.
Donc $b = 0$ ou $c = c'$.

Montrons que le cas $b = 0$ ne peut pas arriver. Si $b = 0$, alors la ligne 1 fournit $b' = 0$; la ligne 2 s'écrit donc $c + c' = 1$. Or $cc' = 1$. En combinant ces deux dernières égalités, on a $c(1 - c) = 1$ d'où $c^2 - c + 1 = 0$.
Donc c est solution de $t^2 - t + 1 = 0$. Or cette équation n'a pas de racine réelle, car le discriminant vaut -3. D'où la contradiction.

On a donc $c = c'$.
Les lignes 1 et 2 fournissent $2c - b^2 = 1$ et la ligne 4 fournit $c^2 = 1$. Ces deux égalités fournissent $c = 1$ (WHY ?).
D'où $c' = 1$.
Reste à identifier b et b'. La ligne 2 fournit $bb' = -1$ et et la ligne 1 est $b + b' = 0$. Donc b et b' sont solution de $t^2 - 1 = 0$.
Ainsi b et b' valent 1 ou -1.
D'où :

$$P = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$$

Ces deux polynômes de degré 2 étant de discriminant < 0, c'est la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

On utilise ici la notation classique $\zeta_n = \exp\left(i\frac{2\pi}{n}\right)$.

(i) Sur $\mathbb{C}$: $X^2+X+1=(X-j)(X-\overline{j})$;
Sur $\mathbb{R}$, le polynôme est irréductible.

(ii) Sur $\mathbb{C}$: $X^4-4=(X^2-2)(X^2+2)=(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})(X-\sqrt{2}i)(X+\sqrt{2}i)$.
Sur $\mathbb{R}$: $(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})(X^2+2)$.

(iii) Sur $\mathbb{C}$: $X^4+1=(X-\zeta_8)(X-\zeta_8^3)(X-\zeta_8^5)(X-\zeta_8^7)$ (les racines sont les racines quatrièmes de -1).
Sur $\mathbb{R}$, on rassemble les racines conjuguées :

$$\begin{aligned} X^4+1 &= (X-\zeta_8)(X-\zeta_8^3)(X-\zeta_8^5)(X-\zeta_8^7) \\ &= \left[(X-\zeta_8)(X-\zeta_8^7)\right]\left[(X-\zeta_8^3)(X-\zeta_8^5)\right] \\ &= \left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right). \end{aligned}$$

(iv) Sur $\mathbb{C}$: $X^6+27=\prod_{\omega\in\mathbb{U}_6}\left(X-\omega\, i\sqrt{3}\right)=\prod_{\substack{k\in[\![0,11]\!]\\ k \text{ impair}}}\left(X-\sqrt{3}\,\zeta_{12}^k\right)$.

Sur $\mathbb{R}$ (un petit dessin aide),

$$\begin{aligned} X^6+27 &= \left[\left(X-\sqrt{3}\,\zeta_{12}\right)\left(X-\sqrt{3}\,\zeta_{12}^{11}\right)\right]\left[\left(X-\sqrt{3}\,i\right)\left(X+\sqrt{3}\,i\right)\right]\left[\left(X-\sqrt{3}\,\zeta_{12}^5\right)\left(X-\sqrt{3}\,\zeta_{12}^7\right)\right] \\ &= (X^2-3X+3)(X^2+3)(X^2+3X+3). \end{aligned}$$

(v) Sur $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} (X^2-X+1)^2+1 &= \left[(X^2-X+1)-i\right]\left[(X^2-X+1)+i\right] \\ &= \left(X^2-X+(1-i)\right)\left(X^2-X+1+i\right) \\ &= (X+i)(X-(1+i))(X-i)(X-(1-i)). \end{aligned}$$

Sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (X^2-X+1)^2+1 &= \left[(X+i)(X-i)\right]\left[(X-(1+i))(X-(1-i))\right] \\ &= \left(X^2+1\right)\left(X^2-2X+2\right). \end{aligned}$$

(vi) On se rend compte (soit successivement soit, si l'on sent l'arnaque, en vérifiant que les premières dérivées du polynôme ont 1 comme racine) que $(X-1)^3$ divise le polynôme. On obtient alors

$$\begin{aligned} X^5-10X^4+25X^3-25X^2+10X-1 &= (X-1)^3(X^2-7X+1) \\ &= (X-1)^3\left(X-\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)\left(X-\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right), \end{aligned}$$

ce qui est à la fois la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

(vii) L'indication montre qu'il existe une racine z telle que la somme des trois racines vaille $2z$. D'après les relations coefficients-racines, cette somme vaut en fait 8, donc on obtient que 4 est racine. Ainsi,

$$X^3-8X^2+23X-28=(X-4)(X^2-4X+7),$$

ce qui est la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$.
La décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ s'obtient alors immédiatement :

$$X^3-8X^2+23X-28=(X-4)(X-(2+\sqrt{3}\,i))(X-(2-\sqrt{3}\mathrm{i})).$$

(viii) L'indication nous permet d'obtenir une factorisation de la forme

$$X^4+12X-5=(X^2-2X+a)(X^2+bX+c),$$

d'où l'on tire immédiatement $b=2$ puis, rapidement, $a=5$ et $c=-1$.
Ainsi,

$$X^4+12X-5=(X^2-2X+5)(X^2+2X-1)=(X^2-2X+5)(X+1+\sqrt{2}))(X+1-\sqrt{2}),$$

ce qui est la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.
On obtient alors la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$:

$$X^4+12X-5=(X-(1+2i))(X-(1-2i))(X+1+\sqrt{2}))(X+1-\sqrt{2}).$$

1. **Remarque initiale.** Rappelons que l'on a
$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
En prenant $p = (n+1)\theta$ et $q = (n-1)\theta$, on a $\dfrac{p+q}{2} = n\theta$ et $\dfrac{p-q}{2} = \theta$.
D'où
$$\cos\big((n+1)\theta\big) + \cos\big((n-1)\theta\big) \;=\; 2\cos(n\theta)\cos\theta$$
Reformulation : on vient de montrer que
$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad \cos\big((p+2)\theta\big) \;=\; 2\cos\theta\,\cos\big((p+1)\theta\big) - \cos(p\theta)$$
Existence.
On définit une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes par récurrence de la façon suivante
$$\begin{cases} T_0 = 1 \\ T_1 = X \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\; T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n \end{cases}$$
Montrons maintenant que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\; \forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$
Pour cela, fixons $\theta \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{H}_n$ la propriété suivante :
$$\mathcal{H}_n : \qquad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$
Prouvons cela par récurrence double.
Initialisation
   ⋆ D'une part, on a $T_0 = 1$, donc $T_0(\cos\theta) = 1$. D'autre part, $\cos(0\times\theta) = 1$.
   Donc $\mathcal{H}_0$ et vraie.
   ⋆ D'une part, on a $T_1 = X$, donc $T_1(\cos\theta) = \cos\theta$. D'autre part, $\cos(1\times\theta) = \cos\theta$.
   Donc $\mathcal{H}_1$ et vraie.
Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$.
   Montrons $\mathcal{H}_{n+2}$.
   Par définition de la suite $(T_p)_{p\in\mathbb{N}}$, on a
$$T_{n+2}(\cos\theta) \;=\; 2\cos\theta\, T_{n+1}(\cos\theta) - T_n(\cos\theta)$$
   D'après $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$, on a
$$T_{n+2}(\cos\theta) \;=\; 2\cos\theta\cos\big((n+1)\theta\big) - \cos(n\theta)$$
   Or, d'après la remarque initiale, on a
$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad 2\cos\theta\,\cos\big((p+1)\theta\big) - \cos(p\theta) = \cos\big((p+2)\theta\big)$$
   On applique cela à $p = n$ et on obtient
$$T_{n+2}(\cos\theta) \;=\; \cos\big((n+2)\theta\big)$$
   D'où $\mathcal{H}_{n+2}$.

2. Considérons deux suites de polynômes (S_n) et (T_n) telles que
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\; \forall\, \theta \in \mathbb{R}, \qquad S_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) \qquad \text{et} \qquad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$
On souhaite montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les polynômes S_n et T_n sont égaux.
Fixons $n \in \mathbb{N}$.
On remarque que
$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad S_n(\cos\theta) \;=\; T_n(\cos\theta)$$
Comme la fonction cosinus a pour image $[-1,1]$, on en déduit :
$$\forall\, t \in [-1,1], \quad S_n(t) \;=\; T_n(t)$$
Ainsi les polynômes S_n et T_n coïncident sur une partie infinie de $\mathbb{R}$ donc, d'après le critère radical de nullité, les polynômes S_n et T_n sont égaux.

3. On souhaite calculer $T_n(x_k)$ sachant que x_k est du type $\cos\theta_k$ avec $\theta_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$.
Or $T_n(\cos\theta_k) = \cos(n\theta_k)$.
Donc
$$T_n(x_k) \;=\; \cos\left(n\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \;=\; \cos\left(k+\frac{\pi}{2}\right) \overset{\text{WHY}}{=} 0$$
On en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le réel x_k est racine de T_n.
Remarque. On a l'impression d'avoir trouvé une infinité de racines pour T_n. Mais T_n n'est pas le polynôme nul comme on le verra dans un instant. Où est donc l'explication ? Les x_k ne sont pas deux à deux distincts !

Montrons que $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ sont deux à deux distincts.
Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $\theta_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n} \in [0,\pi]$. Comme la fonction cosinus est **strictement** décroissante et que $\theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{n-1}$, on en déduit
$$x_0 = \cos\theta_0 \;>\; x_1 = \cos\theta_1 \;>\; \cdots \;>\; x_{n-1} = \cos\theta_{n-1}$$
Donc les x_i sont deux à deux distincts pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$.

BILAN : le polynôme T_n possède (au moins) n racines réelles distinctes deux à deux.

4. Commençons par remarquer que T_0 est constant et que sa factorisation est donc immédiate :
$$T_0 = 1$$
Désormais, supposons $n \geqslant 1$.
Le polynôme T_n possède n racines réelles distinctes, à savoir $x_0, \ldots, x_{n-1}$.
Comme T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} (récurrence double, faites-le), on en déduit la factorisation de T_n dans $\mathbb{R}[X]$:
$$T_n \;=\; 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}(X - x_k)$$

145

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1 \\ xyz=-4 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z=1 \\ \dfrac{yz+xz+xy}{xyz}=1 \\ xyz=-4 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z=1 \\ yz+xz+xy=-4 \\ xyz=-4 \end{cases} \iff \begin{array}{l} x,\ y,\ z \text{ racines de} \\ X^3-X^2-4X+4 \end{array}$$

Le polynôme X^3-X^2-4X+4 admet 1 comme racine évidente, donc est factorisable par $X-1$.
En effectuant la division euclidienne, ou bien en identifiant les coefficients, on trouve que

$$X^3-X^2-4X+4 \;=\; (X-1)(X^2-4)$$

Donc les racines de ce polynôme sont $1, 2, -2$.
Il y a donc 6 triplets solutions :

$$(1,2,-2) \quad ; \quad (1,-2,2) \quad ; \quad (2,-2,1) \quad ; \quad (2,1,-2) \quad ; \quad (-2,2,1) \quad ; \quad (-2,1,2)$$

1. À peu près trivial.
2. Soit a une racine de P.

— Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine non nulle de P.
Par récurrence immédiate, pour tout entier naturel n, a^{2^n} est une racine de P. Comme le polynôme P est non nul, il a d'après le critère radical de nullité un nombre fini de racines. En particulier, la suite

$$\left(a^{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}},$$

qui prend ses valeurs dans l'ensemble des racines de P, doit nécessairement prendre deux fois la même valeur.
On peut donc trouver deux entiers $n \neq m$ tels que $a^{2^n} = a^{2^m}$. Quitte à échanger n et m, on peut supposer $n < m$.
On a alors

$$\begin{aligned} a^{2^n} &= a^{2^m} \\ &= a^{2^{n+(m-n)}} \\ &= a^{2^n \times 2^{m-n}} \\ &= \left(a^{2^n}\right)^{2^{m-n}}. \end{aligned}$$

En divisant de part et d'autre par a^{2^n} (ce qui est légitime car $a \neq 0$), on obtient

$$\begin{aligned} 1 &= \left(a^{2^n}\right)^{2^{m-n}-1} \\ &= a^{2^n\left(2^{m-n}-1\right)}, \end{aligned}$$

ce qui montre que a est une racine de l'unité.

— Si 0 était racine, on aurait 1 racine, puis $4 = (1+1)^2$ racine, ce qui contredit le premier point.

— Ainsi, si a est une racine de P, on a a^2 et $(a+1)^2$ racines de l'unité, donc notamment $|a| = |a+1| = 1$.
Géométriquement, cela donne $a \in \{j, j^2\}$.

1. Soit $\zeta \in Z(P)$. On a donc

$$P(\zeta) = 0 \qquad \text{donc} \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k \zeta^k = 0$$
$$\text{donc} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} a_k \zeta^k + \zeta^n = 0.$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
|\zeta|^n &= |\zeta^n| \\
&= |-\zeta^n| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k \zeta^k\right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left|a_k \zeta^k\right| && \text{(inégalité triangulaire)} \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \, |\zeta|^k .
\end{aligned}$$

Supposons maintenant $\zeta \neq 0$. On a alors $|\zeta| \neq 0$, ce qui permet de factoriser l'inégalité précédente.

$$\begin{aligned}
|\zeta|^n &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \, |\zeta|^k \\
&\leqslant |\zeta|^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \, |\zeta|^{k-(n-1)} \\
&\leqslant |\zeta|^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} |a_{n-1-\ell}| \, |\zeta|^{-\ell} && \begin{bmatrix} \ell = n-1-k \\ k = n-1-\ell \end{bmatrix} \\
&\leqslant |\zeta|^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{|a_{n-1-\ell}|}{|\zeta|^{\ell}},
\end{aligned}$$

et on obtient l'inégalité voulue en divisant de part et d'autre par $|\zeta|^{n-1}$.

2. Soit $\zeta \in Z(P)$.
On souhaite démontrer $|\zeta| \leqslant 1$ ou $|\zeta| \leqslant S$, où $S = \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| = \sum_{\ell=0}^{n-1} |a_{n-1-\ell}|$.
Pour ce faire, on suppose $|\zeta| > 1$, et on cherche à montrer $|\zeta| \leqslant S$.
D'après la question précédente, on a alors

$$\begin{aligned}
|\zeta| &\leqslant \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{|a_{n-1-\ell}|}{|\zeta|^{\ell}} \\
&\leqslant \sum_{\ell=0}^{n-1} |a_{n-1-\ell}| = S && (\text{car } \forall \ell \in [\![0, n-1]\!], |\zeta|^{\ell} \geqslant 1),
\end{aligned}$$

ce qui conclut.

3. Soit $\zeta \in Z(P)$. On distingue deux cas.
   - Si $|\zeta| \leqslant 1$, l'inégalité demandée est évidente.
   - Supposons maintenant $|\zeta| < 1$. Notons

$$M = \max\left(|a_0|, \ldots, |a_{n-1}|\right).$$

On a alors, d'après la première question

$$\begin{aligned}
|\zeta| &\leqslant \sum_{\ell=0}^{n-1} \underbrace{\frac{|a_{n-1-\ell}|}{|\zeta|^{\ell}}}_{\leqslant M|\zeta|^{-\ell}} \\
&\leqslant M \sum_{\ell=0}^{n-1} |\zeta|^{-\ell} \\
&\leqslant M \frac{1-|\zeta|^{-n}}{1-|\zeta|^{-1}} && (\text{car } |\zeta|^{-1} \neq 1) \\
&\leqslant \frac{M}{1-|\zeta|^{-1}} && (\text{car } 1-|\zeta|^{-n} \leqslant 1 \text{ et } 1-|\zeta|^{-1} \geqslant 0).
\end{aligned}$$

En multipliant de part et d'autre par $1-|\zeta|^{-1} \geqslant 0$, on obtient

$$M \geqslant |\zeta| \left(1-|\zeta|^{-1}\right) \geqslant |\zeta| - 1,$$

ce qui donne la borne de Cauchy $|\zeta| \leqslant 1+M$.

On peut commencer à se faire la main, même si c'est trop petit, avec $n = 2$ (on trouve -4).
On a

$$\prod_{\substack{(\omega,\omega')\in\mathbb{U}_n^2\\ \omega\neq\omega'}} (\omega-\omega') = \prod_{\omega\in\mathbb{U}_n}\prod_{\omega'\in\mathbb{U}_n\setminus\{\omega\}} (\omega-\omega') = \prod_{\omega\in\mathbb{U}_n}\left(\omega \prod_{\omega'\in\mathbb{U}_n\setminus\{\omega\}} (1-\frac{\omega'}{\omega})\right)$$

Pause.
Faisons une pause dans notre calcul, et apprenons un peu de maths.
Fixons $\omega_0 \in \mathbb{U}_n$. L'application

$$\begin{array}{cccc} \varphi_{\omega_0} : & \mathbb{U}_n & \longrightarrow & \mathbb{U}_n \\ & \zeta & \longmapsto & \dfrac{\zeta}{\omega_0} \end{array}$$

est bien définie (WHY ?) et est bijective (de bijection réciproque $\xi \mapsto \omega_0\xi$).
On en déduit facilement par restriction et co-restriction (ou bien on refait une preuve) que l'application :

$$\begin{array}{cccc} \psi_{\omega_0} : & \mathbb{U}_n\setminus\{\omega_0\} & \longrightarrow & \mathbb{U}_n\setminus\{1\} \\ & \zeta & \longmapsto & \dfrac{\zeta}{\omega_0} \end{array}$$

est bijective.

Autre pause.
Soit $f : E \to F$ une application *bijective* entre deux ensembles finis, et on suppose que $F \subset \mathbb{C}$ (de sorte que les éléments de F se multiplient).
Alors

$$\prod_{x\in E} f(x) = \prod_{y\in F} y$$

On peut reformuler cela :

> *Soit $f : E \to \mathbb{C}$ une application injective avec E ensemble fini.*
> *Alors*
> $$\prod_{x\in E} f(x) = \prod_{y\in f(E)} y$$

Un joli résultat. On a les deux égalités :

$$X^n - 1 = \prod_{\xi\in\mathbb{U}_n} (X-\xi) \qquad \text{et} \qquad X^n-1 = (X-1)\sum_{k=0}^{n-1} X^k$$

On en déduit (WHY ? Cela nécessite une vraie preuve)

$$\prod_{\xi\in\mathbb{U}_n\setminus\{1\}} (X-\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$$

En évaluant en 1, on obtient la belle identité :

$$\prod_{\xi\in\mathbb{U}_n\setminus\{1\}} (1-\xi) = n$$

Revenons à nos moutons et recollons les morceaux !

On a

$$\prod_{\omega'\in\mathbb{U}_n\setminus\{\omega\}} (1-\frac{\omega'}{\omega}) = \prod_{\xi\in\mathbb{U}_n\setminus\{1\}} (1-\xi) = n$$

Multiplions par $\omega \in \mathbb{U}_n$ et effectuons le produit sur ω :

$$\prod_{\omega\in\mathbb{U}_n}\left(\omega \prod_{\omega'\in\mathbb{U}_n\setminus\{\omega\}} (1-\frac{\omega'}{\omega})\right) = \prod_{\omega\in\mathbb{U}_n} (\omega n) = n^n \prod_{\omega\in\mathbb{U}_n} \omega = n^n(-1)^{n+1}$$

Cette formule fonctionne bien pour $n = 2$, c'est rassurant !