Limites & Continuité

15c-Continuite.pdf, 30 janvier 2023, 14:12

I. Vocabulaire indispensable

Intervalle…

- Un **intervalle** I de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall\, x, y \in I, \quad x < y \implies [x, y] \subset I$$

- Un intervalle **trivial** est $\begin{cases} \varnothing \\ \text{ou} \\ \text{un singleton} \end{cases}$

- Un intervalle **non trivial** est un intervalle « non vide **et** non réduit à un point », donc contient au moins deux points distincts, et par suite en contient une infinité.
- Mis à part les intervalles triviaux, tout intervalle est de l'un des 9 types suivants :
  — un *segment* $[a, b]$, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$;
  — un *intervalle ouvert* $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, pour $a < b$;
  — un *intervalle semi-ouvert* $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$, pour $a < b$;
  — un intervalle semi-ouvert $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$, pour $a < b$;
  — une *demi-droite fermée* $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\}$, pour $a \in \mathbb{R}$;
  — une demi-droite fermée $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\}$, pour $a \in \mathbb{R}$;
  — une *demi-droite ouverte* $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$, pour $a \in \mathbb{R}$;
  — une demi-droite ouverte $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$, pour $a \in \mathbb{R}$;
  — la *droite* $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.
- Les **intervalles ouverts** sont ceux qui sont définis à l'aide d'inégalités strictes.
  Les **intervalles fermés** sont ceux qui sont définis à l'aide d'inégalités larges.
  Un intervalle peut être ni ouvert, ni fermé, par exemple $]a, b]$.
  Les seuls intervalles à la fois ouvert et fermé sont $\varnothing$ et $\mathbb{R}$.
- Les **bornes** d'un intervalle sont ses bornes inférieures et supérieures prises dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
  On peut également parler des **extrémités** d'un intervalle.

Intérieur, adhérence

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Travaillons dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

On note $\mathring{I}$ la partie égale à I privée de ses bornes : c'est *l'intérieur* de I.
On note $\overline{I}$ la partie égale à l'union de I et de ses bornes : c'est *l'adhérence* de I.

On a bien sûr $\mathring{I} \subset I \subset \overline{I}$.

Un intervalle non trivial est donc un intervalle d'intérieur non vide.

Quand on prend $a \in I$ (donc a fortiori quand $a \in \mathring{I}$), alors a est nécessairement un réel.
En revanche, quand on prend $a \in \overline{I}$, alors a peut être égal à $\pm\infty$.

Voisinage

1 **Définition.**

- $a \in \mathbb{R}$. Un voisinage de a est une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $[a-\delta, a+\delta]$ où $\delta > 0$.
- $a = +\infty$. Un voisinage de $+\infty$ est une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $[x_0, +\infty[$.
- $a = -\infty$. Un voisinage de $-\infty$ est une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $]-\infty, x_0]$.

- Un voisinage de a est non vide. L'intersection de deux voisinages de a est un voisinage de a.
- Soit $a \in \overline{I}$ et V_a un voisinage de a.
  Alors a n'est pas nécessairement dans I, a fortiori n'est pas nécessairement dans $I \cap V_a$.
  En revanche, l'intersection $I \cap V_a$ est non vide.
- Soit $L \neq L'$ deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$. On peut toujours trouver deux voisinages V_L et $V_{L'}$ (de L et L' resp.) tels que $V_L \cap V_{L'} = \emptyset$. WHY?

2 **Définition.**
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \overline{I}$.
On dit que f vérifie une certaine propriété $\mathscr{P}$ au voisinage de a lorsqu'il existe un voisinage V_a de a tel que f vérifie la propriété $\mathscr{P}$ sur $I \cap V_a$.

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2$.
  — La fonction f est bornée au voisinage de tout point a de $\mathbb{R}$.
  — La fonction f est croissante au voisinage de $+\infty$, mais elle ne l'est pas sur $\mathbb{R}$.
  — La fonction f n'est pas bornée au voisinage de $+\infty$.

II. Limites

Définition

- **Chez les suites réelles.** On a les définitions :
  - $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$ signifie $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$
  - $u_n \to +\infty$ signifie $\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \in [M, +\infty[$
  - $u_n \to -\infty$ signifie $\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \in]-\infty, M]$
- **Reformulation uniforme.**

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Soit $L \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L \quad \text{signifie} \quad \forall V_L, \ \exists W_{+\infty}, \ \left(\forall n \in \mathbb{N} \cap W_{+\infty}, \quad u_n \in V_L\right)$$
$$\forall V_L, \ \exists W_{+\infty}, \ \left(\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \in W_{+\infty} \Longrightarrow u_n \in V_L\right)$$

- **Analogie.**

Soit $f \in \mathbb{R}^I$ et $a \in \overline{I}$.
Soit $L \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L \quad \text{signifie} \quad \forall V_L, \ \exists W_a, \ \left(\forall x \in I \cap W_a, \quad f(x) \in V_L\right)$$
$$\forall V_L, \ \exists W_a, \ \left(\forall x \in I, \quad x \in W_a \Longrightarrow f(x) \in V_L\right)$$

- **Les 9 cas.**
  - $a \in \mathbb{R}$

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I \cap [a-\delta,\ a+\delta],\quad |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$$

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I \cap [a-\delta,\ a+\delta],\quad f(x) \geqslant M$$

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I \cap [a-\delta,\ a+\delta],\quad f(x) \leqslant M$$

  - $a = +\infty$

$$f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x \in I \cap [x_0, +\infty[,\quad |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$$

$$f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R},\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x \in I \cap [x_0, +\infty[,\quad f(x) \geqslant M$$

$$f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R},\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x \in I \cap [x_0, +\infty[,\quad f(x) \leqslant M$$

  - $a = -\infty$

$$f(x) \xrightarrow[x\to -\infty]{} \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x \in I \cap]-\infty, x_0],\quad |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$$

$$f(x) \xrightarrow[x\to -\infty]{} +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R},\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x \in I \cap]-\infty, x_0],\quad f(x) \geqslant M$$

$$f(x) \xrightarrow[x\to -\infty]{} -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R},\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x \in I \cap]-\infty, x_0],\quad f(x) \leqslant M$$

3 **Exemples.** Soit $f : \begin{array}{ccc}]3,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x-3} \end{array}$.

— Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to 3]{} +\infty$.

— Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$.

— Soit $a \in]3,+\infty[$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \dfrac{1}{a-3}$.

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array}$ et $a \in \mathbb{R}$.

Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$. Est-ce encore vrai pour $a = \pm\infty$?

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ et $a \in \mathbb{R}$.

Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} a$. Est-ce encore vrai pour $a = \pm\infty$?

4 **Question.** Soit $f : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$ et $a \in I = [0,+\infty[$.

Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sqrt{a}$. On traitera le cas $a = 0$ à part.

Premières propriétés

5
preuve

Proposition (unicité de la limite). Soit $f \in \mathbb{R}^I$ et $a \in \overline{I}$. Soit $L \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si $f \underset{a}{\longrightarrow} L$, alors L est unique et est appelé la limite de f en a.

Elle est notée $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ou encore $\lim\limits_{a} f$.

6
preuve

Proposition (caractère borné). Soit $f \in \mathbb{R}^I$ et $a \in \overline{I}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ *(un réel)*.

Si $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$, alors f est bornée au voisinage de a.

Si une fonction admet une limite FINIE *en un point, alors elle est bornée au voisinage de ce point.*

7

Proposition (se ramener en 0). Soit $f \in \mathbb{R}^I$.

— Soit $a \in \overline{I}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ *(un réel)*.

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \iff f(x) - \ell \xrightarrow[x \to a]{} 0 \iff |f(x) - \ell| \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

— Soit $a \in \overline{I} \cap \mathbb{R}$ *(un réel)*. Soit $L \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} L \iff f(a+h) \xrightarrow[h \to 0]{} L$$

8

Proposition (quand a est dans I). Soit $f \in \mathbb{R}^I$ et $a \in I$ *(un point en lequel f est définie)*. Soit $L \in \overline{\mathbb{R}}$.
On a

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} L \implies L = f(a)$$

Autrement dit, si f admet une limite en $a \in I$, alors cette limite est nécessairement FINIE et vaut $f(a)$.

Si une fonction admet une limite en un point où elle est définie, alors cette limite est nécessairement FINIE *et vaut l'image du point en question !*

Limite à gauche et à droite en $a \in \mathbb{R}$

Soit $f: \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^x & \text{si } x<0 \\ 2 & \text{si } x=0 \\ -x+3 & \text{si } x>0 \end{cases} \end{array}$

9 **Définition (limite gauche/droite en un réel a).** Soit $f \in \mathbb{R}^I$ et $a \in \overline{I} \cap \mathbb{R}$ un réel. Soit $L \in \overline{\mathbb{R}}$.

• On dit que f tend vers L « quand x tend vers a par valeurs **inférieures** » lorsque la restriction de f à $I \cap]-\infty, a[$ tend vers L quand x tend vers a.

On note $f(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x<a}]{} L$ ou encore $f(x) \xrightarrow[x \to a^-]{} L$.

Et L est appelé la limite de f à **gauche** en a et est notée $\lim\limits_{a^-} f$.

• On dit que f tend vers L « quand x tend vers a par valeurs supérieures » lorsque la restriction de f à $I \cap]a, +\infty[$ tend vers L quand x tend vers a.

On note $f(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x>a}]{} L$ ou encore $f(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} L$.

Et L est appelé la limite de f à droite en a et est notée $\lim\limits_{a^+} f$.

- On dit aussi « f tend vers L en a par valeur inférieures », ou encore « f tend vers L en a^- ».
- Explicitons la définition pour la limite à gauche.
  • Dire $f \xrightarrow[a^-]{} \ell \in \mathbb{R}$ signifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I \cap [a-\delta, a[, \quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

  • Dire $f \xrightarrow[a^-]{} +\infty$ signifie :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I \cap [a-\delta, a[, \quad f(x) \geqslant M$$

- Explicitons la définition pour la limite à droite.
  • Dire $f \xrightarrow[a^+]{} \ell \in \mathbb{R}$ signifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I \cap]a, a+\delta], \quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

  • Dire $f \xrightarrow[a^+]{} +\infty$ signifie :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I \cap]a, a+\delta], \quad f(x) \geqslant M$$

10 **Remarque importante.**

- Lorsque f est définie sur un intervalle I du type $]-\infty, a[$, alors les notions de limite en a et de limite en a^- coïncident.

  De même lorsque f est définie sur un intervalle I du type $]a, +\infty[$, alors les notions de limite en a et de limite en a^+ coïncident.

  Typiquement, prenons $f = \ln$ définie sur $]0, +\infty[$. Il revient au même de parler de $\lim\limits_{0} f$ ou de $\lim\limits_{0^+} f$.
- Cette dernière remarque est fausse si « on ferme en a » (c'est-à-dire a est une borne de I appartenant à I). Typiquement, prenons $f = \lfloor \bullet \rfloor$ définie sur $]-\infty, 3]$.

  Alors $\lim\limits_{3} f$ n'existe pas, mais $\lim\limits_{3^+} f$ existe et vaut 3.

11 **Proposition (lorsque f est définie en $a \in \mathring{I}$).**
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathring{I}$ *(un point intérieur en lequel f est définie)*. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
On a l'équivalence

$$f \xrightarrow[a]{} \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} f \xrightarrow[a^-]{} \ell \\ f \xrightarrow[a^+]{} \ell \\ f(a) = \ell \end{cases}$$

12 **Question.** Soit f la fonction partie entière. Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier les limites éventuelles de f en a.

Sur un intervalle épointé

Exemple. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{3\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{(x-3)^2} \end{array}$

13 **Définition (f définie sur un intervalle épointé).** Soit $a \in \mathring{I}$. Soit $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$. Soit $L \in \overline{\mathbb{R}}$.
On dit que f tend vers L quand x tend vers a lorsque les restrictions de f à $I \cap]-\infty, a[$ et à $I \cap]a, +\infty[$ tendent chacune vers L quand x tend vers a.

- La définition précédente concerne donc une fonction f définie sur D, une réunion d'intervalles, avec $a \in \overline{D}$.

Caractérisation séquentielle, aspect local

Question !
Donner un exemple de fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)$ existe et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ n'existe pas, c'est-à-dire donner un exemple de fonction f telle que la **suite** $\big(f(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ admette une limite, et telle que la **fonction** f n'admette pas de limite en $+\infty$.

14 preuve

Proposition (composition de limites, suite/fonction).
Soit $f: I\to\mathbb{R}$, $a\in\overline{I}$ et $L\in\overline{\mathbb{R}}$.

— Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I. On a :

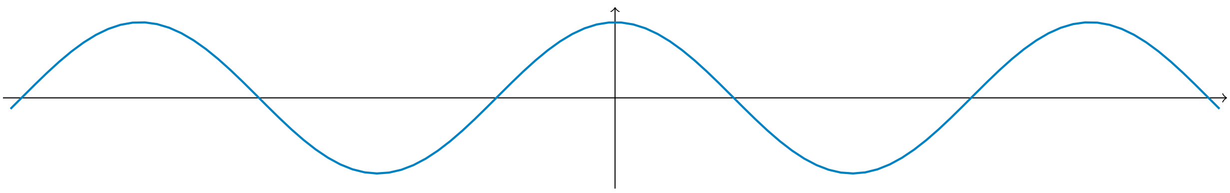
$$\begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \\ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L \end{cases} \implies f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$$

— **Si** $f \underset{a}{\to} L$, **alors** pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I tendant vers a, la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers L.

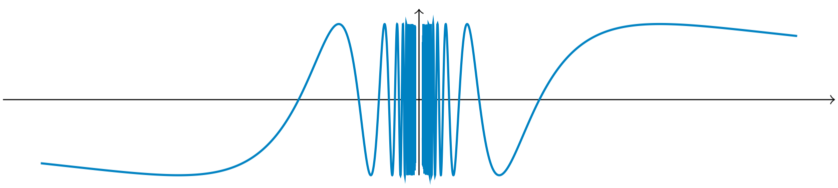
- S'il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I tendant vers a telle que la suite $\big(f(v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite, alors $\lim\limits_a f$ n'existe pas.
- S'il existe deux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I tendant vers a telles que les suites $\big(f(v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(f(v'_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ admettent une limite différente l'une de l'autre, alors $\lim\limits_a f$ n'existe pas.

15 **Question.**

i) Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$ Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ n'existe pas.



ii) Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{array}$ Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas.



16 **Question.** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction T-périodique (avec $T>0$ bien sûr) ayant une limite finie ℓ en $+\infty$. Que dire de f ?

17 **Proposition (caractérisation séquentielle de la limite).** Soit $f: I\to\mathbb{R}$, $a\in\overline{I}$ et $L\in\overline{\mathbb{R}}$.
Si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I tendant vers a, la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers L **alors** $f \underset{a}{\to} L$.

Conséquences importantes

18 **Proposition (limite et signe).**
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$.
Si f admet une limite réelle $\ell > 0$ en a, alors f est strictement positive au voisinage de a.

- Le résultat est vrai avec $L = +\infty$.
- Le résultat est vrai avec $\ell < 0$, à condition de changer également la conclusion !

19 **Proposition (caractère local de la limite).** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. Soit $L \in \overline{\mathbb{R}}$.
Soit V_a un voisinage de a. On a :

$$f \underset{a}{\to} L \iff f_{|I \cap V_a} \underset{a}{\to} L$$

- Reformulation :

  Cas $a \in \mathbb{R}$.
  Pour étudier la limite de f en a, on peut se restreindre à un intervalle du type $I \cap [a - \delta_1, a + \delta_1]$.

  Cas $a = +\infty$. Pour étudier la limite de f en $+\infty$, on peut se restreindre à un intervalle du type $I \cap [x_1, +\infty[$.

  Cas $a = -\infty$. Pour étudier la limite de f en $-\infty$, on peut se restreindre à un intervalle du type $I \cap]-\infty, x_1]$.

- **Utilité ?** Avec cette propriété locale de la limite, on comprend mieux pourquoi la fonction partie entière admet une limite en $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
  En effet, cette fonction est constante au voisinage d'un tel a.
  Et comme une fonction constante admet une limite, on en déduit que…

III. Théorèmes sur les limites
Opérations algébriques

- L'ensemble des fonctions définies sur I à valeurs réelles est muni d'une loi $\cdot$, d'une loi $+$ et d'une loi $\times$ définies par :

$$\lambda \cdot f : x \longmapsto \lambda f(x) \qquad f+g : x \longmapsto f(x)+g(x) \qquad f \times g : x \longmapsto f(x)g(x)$$

- Les opérations algébriques sur les limites sont les mêmes que chez les suites. Il s'agit juste de remplacer $n \to +\infty$ par $x \to a$.

20 **Proposition (opérations « point, plus, fois »).** Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $L, L' \in \overline{\mathbb{R}}$.

• loi $\cdot$

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} L \quad \Longrightarrow \quad \lambda f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \begin{cases} \lambda L & \text{si } \lambda \neq 0 \\ 0 & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

En multipliant par un scalaire une fonction-ayant-une-limite, on obtient une fonction ayant une limite.

• loi $+$

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \to a]{} L \\ g(x) \xrightarrow[x \to a]{} L' \\ L + L' \text{ existe} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad f(x) + g(x) \xrightarrow[x \to a]{} L + L'$$

La limite de la-somme-de-deux-fonctions-ayant-une-limite existe, sauf dans le cas $(+\infty) + (-\infty)$.

• loi $\times$

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \to a]{} L \\ g(x) \xrightarrow[x \to a]{} L' \\ LL' \text{ existe} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad f(x)g(x) \xrightarrow[x \to a]{} LL'$$

La limite du produit-de-deux-fonctions-ayant-une-limite existe, sauf dans le cas $0 \times (\pm\infty)$.

Dans l'énoncé qui vient, on voit $\dfrac{1}{f(x)}$. Dans chacun des cas, il est licite d'écrire un tel quotient, car avec les hypothèses, on arrive toujours à trouver un voisinage de a sur lequel f ne s'annule pas. WHY ?

21 **Proposition (inverse).** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$.

— Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \neq 0$, alors $\dfrac{1}{f(x)} \xrightarrow[x \to a]{} \dfrac{1}{\ell}$.

— Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$ (ou $-\infty$), alors $\dfrac{1}{f(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 0$.

— Si $\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0 \\ \forall x \in I \cap V_a,\ f(x) > 0 \end{cases}$ alors $\dfrac{1}{f(x)} \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$.

22
preuve **Proposition (composition de limites).** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$.
Soit $a \in \overline{I}$ et $b \in \overline{J}$. Soit $L \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\text{Si } \begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b \\ g(t) \xrightarrow[t \to b]{} L \end{cases} \quad \text{alors} \quad (g \circ f)(x) \xrightarrow[x \to a]{} L$$

23 **Question.** Soit $g : x \longmapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$ définie sur $\mathbb{R}$. Au fait, à quoi ressemble le graphe de g ?
Soit $a \in \mathbb{Z}$. Étudier l'existence de $\lim\limits_{x \to a} g(x)$.

24 **Proposition.** Soit $f, g, d : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. Soit $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$. Soit V_a un voisinage de a.

i) **Passage à la limite : il faut avoir l'existence des limites**

$$\begin{cases} \forall\, x \in I \cap V_a,\ f(x) \leqslant g(x) \\ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell' \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \ell \leqslant \ell'$$

ii) **Théorème des Gendarmes : il nous donne l'existence de la limite et sa valeur**

$$\begin{cases} \forall\, x \in I \cap V_a,\ g(x) \leqslant f(x) \leqslant d(x) \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \\ d(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_a f \text{ existe et vaut } \ell$$

iii) **Théorème de comparaison : il nous donne l'existence de la limite et sa valeur**

$$\begin{cases} \forall\, x \in I \cap V_a,\ g(x) \leqslant f(x) \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_a f \text{ existe et vaut } +\infty$$

$$\begin{cases} \forall\, x \in I \cap V_a,\ f(x) \leqslant d(x) \\ d(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_a f \text{ existe et vaut } -\infty$$

iv) **Corollaire immédiat du théorème des Gendarmes**

$$\begin{cases} \forall\, x \in I \cap V_a,\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon(x) \\ \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_a f \text{ existe et vaut } \ell$$

v) **Encore un corollaire du théorème des Gendarmes**

— Au voisinage de a, le produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0, est une fonction qui tend vers 0.

— Au voisinage de a, la somme d'une fonction bornée et d'une fonction qui tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) est une fonction qui tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

- Pour montrer qu'une fonction tend vers ℓ en a, il suffit d'examiner la valeur absolue de la différence de son expression avec ℓ et de « majorer » cette valeur absolue par une fonction tendant vers 0 en a.
- Le cas particulier $\ell = 0$ est très important :

Pour montrer qu'une fonction tend vers 0, il suffit d'examiner la valeur absolue de son terme général et de « majorer » cette valeur absolue par une fonction tendant vers 0.

25 **Question.** Soit $a > 0$. Montrer que $\sqrt{x} \xrightarrow[x\to a]{} \sqrt{a}$.

sol → 22

26 **Question.** Déterminer la limite de $x\lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ en $+\infty$, puis en 0.

27 **Théorème de la limite monotone.** Soit $a < b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$.

• Si f est croissante alors

— En a $\quad \lim\limits_{a} f$ existe et $\begin{cases} \text{est finie} & \text{si } f \text{ est minorée} \\ \text{vaut } -\infty & \text{sinon} \end{cases}$

— En $c \in]a, b[$ $\quad \ell^- = \lim\limits_{c^-} f$ et $\ell^+ = \lim\limits_{c^+} f$ existent et sont finies. On a $\ell^- \leqslant f(c) \leqslant \ell^+$.

— En b $\quad \lim\limits_{b} f$ existe et $\begin{cases} \text{est finie} & \text{si } f \text{ est majorée} \\ \text{vaut } +\infty & \text{sinon} \end{cases}$

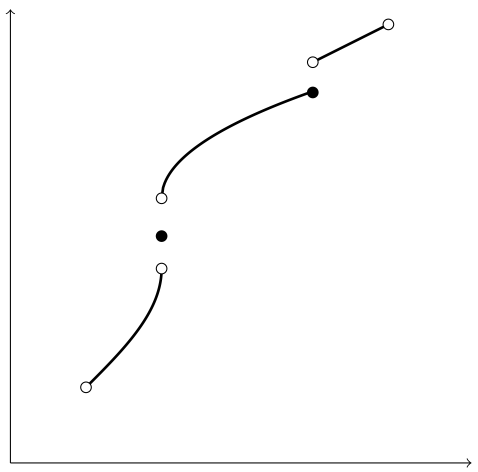
• Si f est décroissante alors

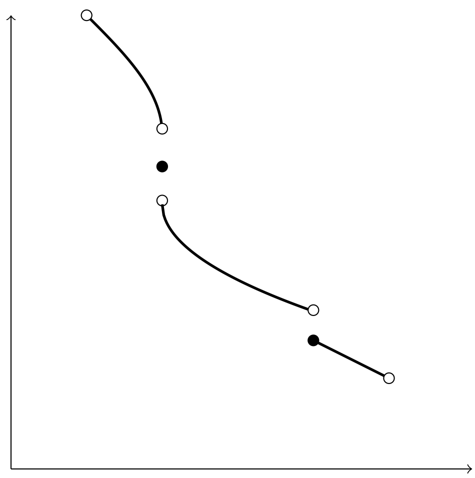
— En a $\quad \lim\limits_{a} f$ existe et $\begin{cases} \text{est finie} & \text{si } f \text{ est majorée} \\ \text{vaut } +\infty & \text{sinon} \end{cases}$

— En $c \in]a, b[$ $\quad \ell^- = \lim\limits_{c^-} f$ et $\ell^+ = \lim\limits_{c^+} f$ existent et sont finies. On a $\ell^- \geqslant f(c) \geqslant \ell^+$.

— En b $\quad \lim\limits_{b} f$ existe et $\begin{cases} \text{est finie} & \text{si } f \text{ est minorée} \\ \text{vaut } -\infty & \text{sinon} \end{cases}$

- **Bilan** : si f est monotone alors en tout point où cela a du sens, f possède une limite à gauche et à droite.





28 **Question.** Soit f une fonction définie sur $]-\infty, +\infty[$ et décroissante.
Montrer que la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ admet des limites en $-\infty$ et $+\infty$ et les déterminer.

IV. Continuité, l'aspect ponctuel

Définition en un point

29 **Définition.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$ *(un point en lequel f est définie)*.
On dit que f est continue en a lorsque f admet une limite en a.

- Dans ce cas, la limite est nécessairement FINIE et vaut $f(a)$ (WHY ?)
  On retrouve donc la **définition du lycée** :

$$f \text{ est continue en } a \text{ lorsque } \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

- **Définition epsilonesque.**
  $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I \cap [a-\delta, a+\delta], \quad f(x) \in \big[f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon\big]$
  $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x-a| \leqslant \delta \implies |f(x)-f(a)| \leqslant \varepsilon$
- **Définition topologique.**

$$\forall V_{f(a)} \text{ voisinage de } f(a), \quad \exists W_a \text{ voisinage de } a, \quad f\big(I \cap W_a\big) \subset V_{f(a)}$$

30 **Définition.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$ *(un point en lequel f est définie)*.
On dit que f est continue à gauche en a lorsque la restriction de f à $I \cap]-\infty, a]$ est continue.
On dit que f est continue à droite en a lorsque la restriction de f à $I \cap [a, +\infty[$ est continue.

31 **Proposition.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathring{I}$ *(un point intérieur)*.
La fonction f est continue en a si et seulement si elle est continue à gauche **et** à droite en a.

32 **Question.** Soit f la fonction partie entière. Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier la continuité de f en a.

Définition sur un intervalle

33 **Définition.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
- On dit que f est continue **sur** I lorsque f est continue **en** tout point de I.
- On note $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs réelles.

- Plus généralement, si Ω est une union d'intervalles non triviaux, on dit que f est continue sur Ω lorsque f est continue sur chacun de ces intervalles.
- **Exemples.**
  • Soit f une fonction polynomiale.
  On a $\quad \forall a \in \mathbb{R}, \ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$.
  Donc f est continue en tout point $a \in \mathbb{R}$.
  Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

  • La fonction inverse $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (WHY ?).

Opérations

Reprenons la proposition concernant les opérations sur les limites et appliquons-la au cas des limites finies (donc $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$) et au cas où $a \in I$ (donc les fonctions sont définies en a).

- **loi** $\cdot$

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \lambda \ell$$

- **loi** $+$

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \\ g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell' \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) + g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell + \ell'$$

- **loi** $\times$

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \\ g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell' \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad f(x)g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \ell'$$

34 **Proposition (opérations « point, plus, fois »).** Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

— Si f et g sont continues en a, alors λf, $f + g$, et fg sont continues en a.

— Si f et g sont continues sur I, alors λf, $f + g$, et fg sont continues sur I.

- Comme une combinaison linéaire de fonctions continues sur I est continue sur I, et que la fonction nulle est bien sûr continue sur I, on en déduit que $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^I$.
- Schématiquement :

$\lambda \cdot \text{continue} = \text{continue}$ $\qquad$ $\text{continue} + \text{continue} = \text{continue}$ $\qquad$ $\text{continue} \times \text{continue} = \text{continue}$

Et enfin $\text{continue} + \text{discontinue} = \dots$

35 **Proposition (inverse).** Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

— Si f est continue en a et si $f(a) \neq 0$,
alors $\frac{1}{f}$ est bien définie au voisinage de a et est continue en a.

— Si f est continue et ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{f}$ est continue sur I.

36 **Proposition (composée)**
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$.

— Si $\begin{cases} f \text{ est continue en } a \in I \\ g \text{ est continue en } b = f(a) \end{cases}$ alors $g \circ f$ est continue en a.

— Si $\begin{cases} f \text{ est continue sur } I \\ g \text{ est continue sur } J \end{cases}$ alors $g \circ f$ est continue sur I.

- Désormais pour montrer la continuité d'une fonction sur un intervalle ou une réunion d'intervalles, on invoquera le fait que la fonction est bâtie à partir de fonctions usuelles en utilisant des opérations algébriques classiques.

37 **Définition.** Soit $a \in \mathring{I}$. Soit $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$.
On dit que f est prolongeable par continuité en a lorsque $\lim\limits_{a} f$ est finie.

Dans ce cas, la fonction définie par

$$\widetilde{f} : \begin{array}{ccl} I \cup \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \lim\limits_{t \to a} f(t) & \text{si } x = a \end{cases} \end{array}$$

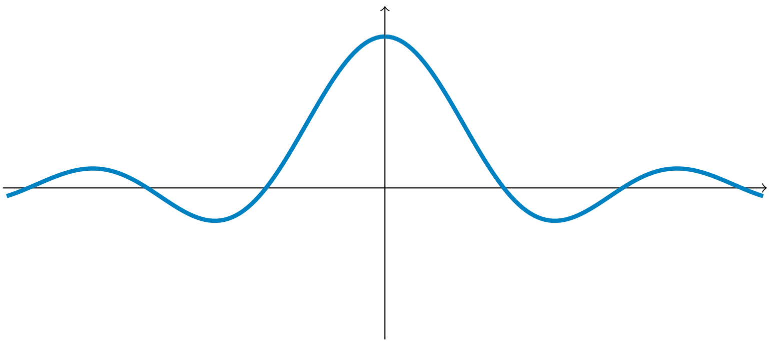
est une fonction *continue*, et est appelée le **prolongement par continuité de f en a.**

- A priori, avant de commencer à lire la définition, la fonction f n'est PAS définie en a, c'est-à-dire que $f(a)$ n'a pas de sens.
  Rigoureusement, à la fin de la lecture de la définition, la fonction f n'est TOUJOURS PAS définie en a !
- **Exemple du sinus cardinal.**
  Soit $f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin x}{x} \end{array}$

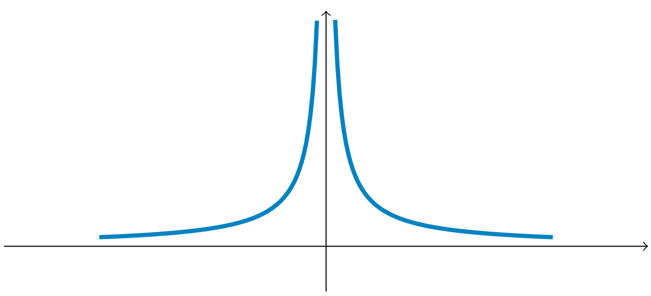
  La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ (WHY ?)

  La fonction f n'est pas définie en 0, mais f est prolongeable par continuité en 0.
  Son prolongement est :

  $$\widetilde{f} : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

- **Exemple.**
  Soit $f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{|x|} \end{array}$
  La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ (WHY ?)
  Peut-on prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}$?



38 **Quizz.** Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité (là où elles doivent l'être !) ?

$$f: \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\ln x \end{array} \qquad h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{3\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^3-27}{x-3} \end{array}$$

39 **Proposition (la fonction puissance $\alpha \in \mathbb{R}$).** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

La fonction $\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^\alpha \overset{\text{def}}{=} \exp(\alpha \ln x) \end{array}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

Cette fonction est prolongeable par continuité en 0 si et seulement si $\alpha \geqslant 0$.

Précisément :

— Si $\alpha > 0$, le prolongement par continuité est $\begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^\alpha & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$

— Si $\alpha = 0$, le prolongement par continuité est $\begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array}$

40 sol → 23 **Question.** Soit $f: \begin{array}{ccc}]0,1[\cup]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x\ln x}{x^2-1} \end{array}$

La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Et en 1 ?

Caractérisation séquentielle de la continuité

41 **Proposition (composition de limites finies).**
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$.

— Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I. On a :

$$\begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \\ f \text{ continue en } a \end{cases} \implies f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$$

— **Si** f est continue en a, **alors** pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I tendant vers a, la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(a)$.

42 **Proposition (caractérisation séquentielle de la continuité).** Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$.
Si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I tendant vers a, la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(a)$ **alors** f est continue en a.

V. Continuité, l'aspect global

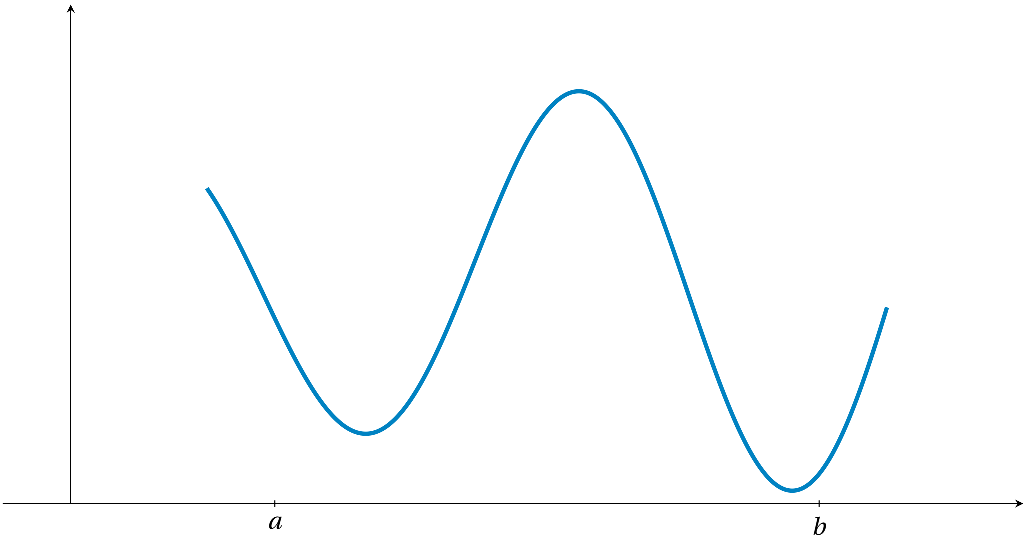
Théorème des valeurs intermédiaires

43
preuve

Théorème des valeurs intermédiaires.

La version « de base »
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I.
Soit $a, b \in I$ tel que $a \leqslant b$.
Alors pour tout y_0 compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y_0$.

La version « sophistiquée »
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.



- Ce théorème dit que tout y_0 compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est « l'image de quelqu'un ».
- On ne suppose rien sur la position de $f(a)$ vis-à-vis de $f(b)$.
- Une autre façon de retenir cet énoncé :

  > *Si f est continue sur un intervalle, alors toute valeur intermédiaire entre deux valeurs atteintes par f est une valeur atteinte par f.*

- Il n'y a pas d'unicité dans ce théorème. Ce théorème est un THÉORÈME D'EXISTENCE.
- Une condition suffisante d'unicité : « la fonction f est strictement monotone ».
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle qui n'est PAS nécessairement de même nature. WHY ?

44
sol → 24
Question. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continue. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = c$.

45
sol → 24
Question. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue* telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ \big(f(x)\big)^2 = 1$.
Que dire de f ?

46
sol → 25
Question. Montrer qu'une fonction décroissante continue définie sur $\mathbb{R}$ admet un unique point fixe.

Théorème des bornes atteintes

47 **Définition.**
Un segment est un intervalle fermé borné, c'est-à-dire un intervalle du type $[a,b]$ avec $a \leqslant b$ des réels.

48 **Théorème des bornes atteintes.**

Formulation de base. Une fonction CONTINUE sur un SEGMENT est bornée et atteint ses bornes (borne supérieure et borne inférieure), autrement dit possède un maximum et un minimum.

Formulation sophistiquée. L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

- Avec des quantificateurs :
  Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment $[a,b]$. Alors

$$\exists x_m, x_M \in [a,b], \quad \forall t \in [a,b], \quad f(x_m) \leqslant f(t) \leqslant f(x_M)$$

  Avec ces notations, on a $\displaystyle\min_{t\in[a,b]} f(t) = f(x_m)$ $\qquad$ $\displaystyle\max_{t\in[a,b]} f(t) = f(x_M)$

- Donner un exemple de fonction définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, qui est bornée et qui n'atteint pas ses bornes.

- L'hypothèse « segment » est indispensable.

$$\begin{array}{rcl}]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array} \qquad \text{ou encore} \qquad \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^x \end{array}$$

- L'hypothèse de continuité est indispensable.
  $f : \begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dots \end{array}$

49 **Question.** Soit $f : \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x}{1-\mathrm{e}^x} \end{array}$ Sans étudier les variations de f, montrer que f est bornée.

Théorème de la bijection continue strictement monotone

Question.
Donner une fonction $f : [0,1] \to [0,1]$ bijective sans être monotone.
Donner une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijective sans être monotone.

Rappel (1). Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ strictement monotone est injective.

Rappel (2). Soit $f : X \to Y$ une bijection.
Si f est (strictement) monotone, alors f^{-1} est (strictement) monotone de même monotonie que f.

50 **Théorème.**
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un **intervalle** I.

$$\left\{\begin{array}{r} f \text{ strictement monotone sur } I \\ f \text{ continue sur } I \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{l} f \text{ réalise une bijection de } I \text{ sur } J = f(I) \\ f^{-1} \text{ a même sens de variation que } f \\ f^{-1} \text{ est continue sur } J \end{array}\right.$$

- **Exemple.** La fonction Arcsin est continue sur $[-1,1]$. WHY?

VI. Extension aux fonctions à valeurs complexes

Limites

51 **Définition.** Soit $f : I \to \mathbb{C}$. Soit $a \in \overline{I}$. Soit $\ell \in \mathbb{C}$.
On dit que f tend vers ℓ quand x tend vers a, lorsque :

- $a \in \mathbb{R}$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I \cap [a-\delta,\ a+\delta],\quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$
- $a = +\infty$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x \in I \cap [x_0, +\infty[,\quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$
- $a = -\infty$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x \in I \cap]-\infty, x_0],\quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

- Pas de limite infinie : $\ell \in \mathbb{C}$.
- On a bien sûr pour $\ell \in \mathbb{C}$ les équivalences :

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \iff f(x) - \ell \xrightarrow[x \to a]{} 0 \iff |f(x) - \ell| \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

- On a « si f admet une limite en a, alors f est bornée au voisinage de a ».
- Opérations algébriques : idem. Et en plus, passage au conjugué.

52 **Proposition.** Soit $f : I \to \mathbb{C}$. Soit $a \in \overline{I}$. Soit $\ell \in \mathbb{C}$.
On a
$$f \xrightarrow[a]{} \ell \iff \begin{cases} \mathrm{Re}(f) \xrightarrow[a]{} \mathrm{Re}(\ell) \\ \mathrm{Im}(f) \xrightarrow[a]{} \mathrm{Im}(\ell) \end{cases}$$

Continuité

- Définition de la continuité : idem.
- Opérations sur les fonctions continues : idem.
- Caractérisation par les parties réelles et imaginaires.
- Attention : pas de TVI (car pas de relation d'ordre).
- Pas de théorème des bornes atteintes.
- Pas de théorème de la bijection réciproque.

Limites & Continuité

preuve et éléments de correction

5

Prenons L et L' tels que $f \underset{a}{\to} L$ et $f \underset{a}{\to} L'$.
Montrons que $L = L'$.
Raisonnons par l'absurde en supposant $L \neq L'$.
Alors il existe V et V' des voisinages de L et L' respectivement tels que $V \cap V' = \varnothing$.
Par hypothèse $f \underset{a}{\to} L$, il existe W_a un voisinage de a tel que $f(I \cap W_a) \subset V$.
Par hypothèse $f \underset{a}{\to} L'$, il existe W'_a un voisinage de a tel que $f(I \cap W'_a) \subset V'$.

Il n'est pas difficile de montrer que $W_a \cap W'_a$ est un voisinage de a, donc $I \cap W_a \cap W'_a$ est non vide : prenons-en un élément, disons x.
Alors $f(x) \in V \cap V'$.
D'où la contradiction. WHY ?

6

Supposons $f \underset{a}{\to} \ell$.
Appliquons la définition avec $V_\ell = [\ell - 1, \ell + 1]$ qui est une partie bornée !
Il existe W_a un voisinage de a tel que

$$\forall x \in I \cap V_a, \ f(x) \in V_\ell$$

Ainsi, f est bornée sur $I \cap V_a$. Autrement dit, f est bornée au voisinage de a.

Pour convaincre les élèves et réviser l'inégalité triangulaire, on peut écrire $|f(x)| \leqslant |f(x) - \ell| + |\ell|$, d'où $|f(x)| \leqslant 1 + |\ell|$.

14

On suppose l'assertion de gauche.
On veut montrer que $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = L$ c'est-à-dire

$$\forall V_L \text{ voisinage de } L, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad f(u_n) \in V_L$$

Commençons la preuve.

Fixons V_L voisinage de L.

Comme $\lim_{x \to a} f(x) = L$, il existe W_a voisinage de a tel que $\quad \forall x \in I \cap W_a, \quad f(x) \in V_L$

Comme $\lim_{n \to +\infty} u_n = a$, il existe n_0 tel que $\quad \forall n \geqslant n_0, \quad u_n \in I \cap W_a$.

BILAN : il existe n_0 tel que $\quad \forall n \geqslant n_0, \quad f(u_n) \in V_L$.

Autrement dit, $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = L$.

22

Soit V_L un voisinage de L.
Il s'agit de montrer qu'il existe W un voisinage de a tel que $f(I \cap W) \subset V_L$.
Par hypothèse, on a $g(t) \xrightarrow[t \to b]{} L$, donc il existe W_b un voisinage de b tel que $g(J \cap W_b) \subset V_L$.
Par hypothèse, on a $f(x) \xrightarrow[t \to a]{} b$, donc il existe W_a un voisinage de a tel que $f(I \cap W_a) \subset J \cap W_b$.
Ainsi $(g \circ f)(I \cap W_a) \subset V_L$.
On a donc réalisé le contrat en posant $W = W_a$.

25

Pour tout $x \geqslant 0$, on a :

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \leqslant \frac{|x-a|}{\sqrt{a}}$$

De $\frac{|x-a|}{\sqrt{a}} \xrightarrow[x\to a]{} 0$, on déduit $\sqrt{x} \xrightarrow[x\to a]{} \sqrt{a}$.
Remarque. On vient de montrer que la fonction racine admet une limite en a, à savoir $\sqrt{a}$. On dira que la fonction racine est continue en a.

40

La fonction $f : \begin{array}{rcl}]0,1[\cup]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x\ln x}{x^2-1} \end{array}$ est continue sur son ensemble de définition, par opérations.

• Au voisinage de 0,

$$f(x) = \frac{1}{x^2-1} \times x\ln x$$

On a

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2-1} = -1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} x\ln x = 0$$

Par produit, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Donc f est prolongeable par continuité en 0.

• Au voisinage de 1,

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \times \frac{\ln x}{x-1}$$

On a

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \quad \text{par taux d'accroissement}$$

Par produit, $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$.

Donc f est prolongeable par continuité en 1.

BILAN : f est prolongeable par continuité en 0 et en 1 et ce prolongement vaut

$$f : \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x\ln x}{x^2-1} & \text{si } x \neq 0 \text{ et } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{array}$$

43

$\Longrightarrow$ Supposons la version « basique ».

Montrons la version « sophistiquée ». Pour cela, donnons-nous une fonction continue et I un intervalle et montrons que $f(I)$ est un intervalle.

Posons $J = f(I)$ pour alléger les notations. Montrons que J est un intervalle.
Soit $y, y' \in J$. Prenons un élément y_0 compris entre y et y' et montrons que $y_0 \in J$.
Comme y est dans $f(I)$, il s'écrit $y = f(x)$ avec $x \in I$. Idem pour y' qui s'écrit $f(x')$ avec $x' \in I$.
Par construction, ce réel y_0 est compris entre $f(x)$ et $f(x')$, donc par le TVI basique, il existe x_0 compris entre x et x' tel que $y_0 = f(x_0)$.
On vérifie que x_0 est dans I :
on a $x, x' \in I$ et x_0 compris entre x et x'. Comme I est un intervalle, on en déduit $x_0 \in I$.
Par conséquent, y_0, qui s'écrit $f(x_0)$, est dans $f(I)$, donc est dans J.

$\Longleftarrow$ Supposons la version « sophistiquée ».

Montrons la version « basique » : montrons que tout y_0 compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est l'image d'un élément de $[a, b]$.

Soit y_0 compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Il s'agit de montrer que $y_0 \in J \overset{\text{def}}{=} f\big([a, b]\big)$.
D'après la version « sophistiquée », J est un intervalle (car $[a, b]$ est un intervalle et f est continue) et qui contient bien sûr $f(a)$ et $f(b)$.
Le fait que « J est un intervalle » fournit le fait que $y_0 \in J$.
Par définition de J, le réel y_0 s'écrit $f(c)$ avec $c \in [a, b]$.

44

On considère une fonction auxiliaire, à savoir $g : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - x \end{array}$

Avec cette nouvelle fonction, la question se reformule en « montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $g(c) = 0$ ».

- La fonction g est continue ; en effet, g est la somme de f et $x \mapsto -x$ qui sont continues.
- 0 est une valeur intermédiaire entre $g(0)$ et $g(1)$; en effet, comme f est à valeurs dans $[0, 1]$, on a en particulier $f(0) \in [0, 1]$ et $f(1) \in [0, 1]$, d'où

$$0 \leqslant f(0) \qquad \text{et} \qquad f(1) \leqslant 1$$

D'où

$$0 \leqslant \underbrace{f(0) - 0}_{g(0)} \qquad \text{et} \qquad \underbrace{f(1) - 1}_{g(1)} \leqslant 0$$

Donc 0 est une valeur intermédiaire entre $g(1)$ et $g(0)$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à g, il existe $c \in [0, 1]$ tel que $g(c) = 0$, donc tel que $f(c) = c$.

45

On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \pm 1$$

On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Big(f(x) = 1 \quad \text{ou} \quad f(x) = -1\Big)$$

On va montrer que (qu'est-ce qu'il y a de différent avec ce qui est écrit ci-dessus ?)

$$\Big(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1\Big) \quad \text{ou} \quad \Big(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -1\Big)$$

ce qui s'énonce encore

$$f \text{ est constante égale à } 1 \qquad \text{ou} \qquad f \text{ est constante égale à } -1$$

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \neq 1$ et qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f(b) \neq -1$ (ainsi f n'est ni constante égale à 1 ni constante égale à -1).
Comme l'image de f est incluse dans $\{-1, 1\}$, on a nécessairement $f(a) = -1$ et $f(b) = 1$.
Ainsi -1 et 1 sont des valeurs atteintes par f (par a et b respectivement).
Or 0 est une valeur intermédiaire entre -1 et 1.
Comme f est continue, le TVI assure qu'il existe c compris entre a et b tel que $f(c) = 0$.
Cela contredit la toute première phrase de la démonstration !

Deuxième preuve.
L'hypothèse implique (en fait, c'est équivalent !) à l'inclusion $\operatorname{Im} f \subset \{-1, 1\}$, ou encore

$$f(\mathbb{R}) \subset \{-1\} \cup \{1\}$$

Comme f est continue et $\mathbb{R}$ est un intervalle, le TVI version sophistiquée affirme que $f(\mathbb{R})$ est un intervalle. Ainsi, on a

$$f(\mathbb{R}) = \{-1\} \qquad \text{ou bien} \qquad f(\mathbb{R}) = \{1\}$$

ce qui signifie que

$$f \text{ est constante égale à } -1 \qquad \text{ou} \qquad f \text{ est constante égale à } 1$$

46

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ décroissante continue.
Montrons qu'il existe un unique $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = c$.

On considère $g : x \mapsto f(x) - x$.

— Cette fonction est strictement décroissante (somme d'une fonction décroissante et d'une fonction strictement décroissante).

— D'après le théorème de la limite monotone appliqué à la fonction f décroissante, on en déduit que (WHY) que

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$$

Donc 0 est une valeur intermédiaire entre $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} g(x)$.

— Cette fonction g est continue.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, il existe un unique c tel que $g(c) = 0$, donc tel que $f(c) = c$.