Dénombrement

16c-Denombrement.pdf, 3 février 2023, 19:48

I. Ensembles finis

Définition du cardinal

Définition 0. « Les ensembles A et B sont en bijection » signifie « il existe une bijection entre A et B ».

1 **Lemme.**

— Le seul ensemble en bijection avec l'ensemble vide est l'ensemble vide.

— Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$. Si les ensembles $[\![1, p]\!]$ et $[\![1, q]\!]$ sont en bijection, alors $p = q$.

Ce résultat légitime la définition suivante :

2 **Définition/Proposition.** Soit E un ensemble.

— On dit que E est *fini* lorsqu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que E soit en bijection avec $[\![1, n]\!]$.
Sinon, on dit que E est *infini*.

— Soit E un ensemble fini.
Alors il existe un *unique* entier $n \in \mathbb{N}$ tel que E soit en bijection avec $[\![1, n]\!]$.
Cet entier est appelé le cardinal de E.
On le note $\operatorname{card}(E)$, voire $|E|$.

- Le seul ensemble de cardinal 0 est l'ensemble vide.
- En appliquant la définition à E égal $[\![1, n]\!]$ lui-même, on trouve que $[\![1, n]\!]$ est de cardinal n. Ouf!

3 preuve **Proposition.** Soit E un ensemble *fini*. Si F est en bijection avec E, alors F est fini, et $\operatorname{card} F = \operatorname{card} E$.

- On peut résumer cela par « deux ensembles en bijection ont même cardinal ».
  En effet :
  — Si l'un est fini alors, d'après la proposition, l'autre est fini et les deux ensembles ont même cardinaux.
  — Sinon, les deux sont infinis, et l'assertion finale « ils ont le même cardinal » est vraie car elle doit être comprise en « s'ils ont un cardinal, alors les cardinaux sont égaux ».
- Ce résultat peut donc être vu comme le fondement du dénombrement :

  On peut compter des objets en les mettant en bijection avec d'autres objets.
- **Exemple.** Pour compter les élèves de Piston 3, je peux les mettre en bijection avec l'ensemble formé de 43 chaises.

4 preuve **Proposition.** Soit $p \leqslant q$ des éléments de $\mathbb{N}$.
L'ensemble $[\![p, q]\!]$ est fini et son cardinal vaut $q - p + 1$.

Sous ensemble d'un ensemble fini

5 **Lemme.** Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$. Soit $a \in E$.
Alors $E \setminus \{a\}$ est fini de cardinal $n-1$.

6 **Proposition (cardinal et inclusion).** Soit E un ensemble fini. Soit F un sous-ensemble de E.

— Alors F est fini et on a $\operatorname{card} F \leqslant \operatorname{card} E$.

Un sous-ensemble d'un ensemble fini est fini.

— On a

$$\begin{cases} F \subset E \\ \operatorname{card} F = \operatorname{card} E \end{cases} \implies F = E$$

Un sous-ensemble de E de même cardinal que E est égal à E.

- **Exemple.** L'ensemble $\mathbb{N}$ est infini.
  Raisonnons par l'absurde. Supposons que $\mathbb{N}$ est fini et notons n son cardinal.
  L'ensemble $[\![1, n+1]\!]$ est inclus dans $\mathbb{N}$, donc la proposition précédente fournit $\operatorname{card}([\![1, n+1]\!]) \leqslant \operatorname{card}\mathbb{N}$, d'où $n+1 \leqslant n$. D'où l'absurdité.
- **Contraposée du premier point.** Si F est un ensemble *infini* inclus dans E, alors E est infini.
- **Méthode de demi-fainéant.**
  Pour montrer que deux ensembles sont égaux, on a l'habitude de procéder par *double inclusion*.
  Lorsque les ensembles sont *finis*, il suffit de montrer que l'un est inclus dans l'autre, et qu'ils ont le même cardinal. On dira qu'on démontre l'égalité par *inclusion et égalité des cardinaux*.

Principe des tiroirs

7 **Proposition (cardinal et injection).**
Soit $\iota : \Gamma \hookrightarrow \Omega$ une injection avec Ω fini.
Alors Γ est fini et $\operatorname{card}\Gamma \leqslant \operatorname{card}\Omega$.

- Il n'existe pas d'injection d'un ensemble infini dans un ensemble fini (WHY ?).
  Plus précisément, si Γ est un ensemble *infini* qui s'injecte dans Ω, alors Ω est infini.
- Il n'existe pas d'injection d'un ensemble de cardinal $n+1$ dans un ensemble de cardinal n (WHY ?).

8 **Principe des tiroirs (principe de Dirichlet).**
Soit $n > m$ deux entiers.
Quand on met n chaussettes dans m tiroirs, il y a au moins deux chaussettes dans le même tiroir.

- **Preuve ?**
- **Exemple.** Une droite qui ne passe pas par un sommet d'un triangle ne peut pas rencontrer ses trois côtés.
  D'après le principe des tiroirs, deux sommets (au moins) se trouveront forcément du même côté de la droite, qui ne rencontrera donc pas le côté les reliant.
- **Exemple.** Il y a deux nombres de Fibonacci possédant les mêmes 87 derniers chiffres.
- **Exemple.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Parmi $n+1$ réels de l'intervalle $[0,1]$, il y en a au moins deux dont la distance est inférieure ou égale à $\dfrac{1}{n}$.
  On peut diviser le segment $[0,1]$ en n « tiroirs », les intervalles disjoints :

$$\left[0, \frac{1}{n}\right[, \quad \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right[, \quad \ldots, \quad \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$$

  de longueur $\frac{1}{n}$, dont la réunion est $[0,1]$. Chacun des $n+1$ réels appartient à l'un de ces n intervalles, donc nécessairement l'un des intervalles contient au moins deux des $n+1$ réels, dont la distance est ainsi inférieure ou égale à $\frac{1}{n}$.

Applications entre ensembles finis

9 preuve

Théorème. Soit $f : E \to F$ avec E fini.

— La partie $f(E)$ est finie et $\operatorname{card} f(E) \leqslant \operatorname{card} E$.

— On a $\quad \operatorname{card} f(E) = \operatorname{card} E \iff f$ injective.

10

Proposition facile à retenir ! Soit $f : E \to F$ avec E et F finis.

— Si f est injective, alors $\operatorname{card} E \leqslant \operatorname{card} F$.

— Si f est surjective, alors $\operatorname{card} E \geqslant \operatorname{card} F$.

Remarques.

- Le premier point a déjà été vu précédemment et dans une version plus forte (car en supposant moins de choses : on avait seulement supposé que l'ensemble d'arrivée était fini)

  Soit $f : E \to F$ avec F fini.
  Si f est injective, alors E est fini et $\operatorname{card} E \leqslant \operatorname{card} F$.

- Quant au deuxième point, il ne nécessite pas, a priori, que F soit fini, puisque c'est en fait une conséquence du théorème précédent :

  Soit $f : E \to F$ avec E fini.
  Si f est surjective, alors $F = f(E)$ est fini et $\operatorname{card} F \leqslant \operatorname{card} E$.

- Parfois, il faut apprendre des énoncés un peu plus faibles pour permettre à notre mémoire de ne pas exploser !

11

Proposition de demi-fainéant !
Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles E et F *finis*.

— On a

$$\begin{cases} f \text{ est injective} \\ \operatorname{card} E = \operatorname{card} F \end{cases} \implies f \text{ est bijective}$$

Une application injective entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective.

— On a

$$\begin{cases} f \text{ est surjective} \\ \operatorname{card} E = \operatorname{card} F \end{cases} \implies f \text{ est bijective}$$

Une application surjective entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective.

12

Corollaire (même ensemble de départ et d'arrivée !)

Soit $f : E \to E$ avec E **fini**. Alors :

$$f \text{ injectif} \iff f \text{ bijectif} \iff f \text{ surjectif}$$

Une application injective d'un ensemble de cardinal fini dans lui-même est bijective.
Une application surjective d'un ensemble de cardinal fini dans lui-même est bijective.

- **Attention.** Ce résultat est faux si le cardinal n'est pas fini.
  Par exemple, $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array}$ est injective, mais n'est pas surjective.

II. Cardinal et opérations

Cardinal d'une union

Soit Ω un ensemble.

13
preuve

Proposition (cardinal d'une union disjointe).

— Soit A et B deux parties disjointes (càd $A \cap B = \emptyset$) et finies de Ω.
Alors l'union disjointe $A \sqcup B$ est finie et on a

$$\operatorname{card}(A \sqcup B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B$$

— Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit $A_1, \ldots, A_p$ des parties deux à deux disjointes et finies de Ω.
Alors l'union disjointe $A_1 \sqcup A_2 \sqcup \cdots \sqcup A_p$ est finie et on a

$$\operatorname{card}(A_1 \sqcup A_2 \sqcup \cdots \sqcup A_p) = \operatorname{card} A_1 + \operatorname{card} A_2 + \cdots + \operatorname{card} A_p$$

ce qui s'écrit encore $\quad \operatorname{card}\left(\bigsqcup_{k=1}^{p} A_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \operatorname{card} A_k.$

14

Proposition (cardinal du complémentaire).
Soit A une partie d'un ensemble fini E.
Alors $E \setminus A$ est une partie finie et on a

$$\operatorname{card}(E \setminus A) = \operatorname{card} E - \operatorname{card} A$$

15
preuve

Proposition (formule du crible de Poincaré pour les petits n).

— Soit A et B deux parties finies de Ω. On a la formule :

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A \cap B)$$

— Soit A, B, C trois parties finies de Ω. On a la formule :

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(A \cup B \cup C) = \; & + \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) + \operatorname{card}(C) \\ & -\Big(\operatorname{card}(A \cap B) + \operatorname{card}(A \cap C) + \operatorname{card}(B \cap C)\Big) \\ & + \operatorname{card}(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

— Soit A_1, A_2, A_3, A_4 quatre parties finies de Ω. On a la formule :

16 **Principe d'addition.** Pour compter des objets, on peut essayer de les regrouper en des catégories mutuellement exclusives. Le nombre total d'objets est la somme du nombre d'objets de chaque catégorie.

- **Exemple.**
  On lance deux dés : un rouge et un bleu. De combien de façons peut-on obtenir au moins un 6 ?

  Pour obtenir au moins un 6, il y a trois possibilités qui s'excluent mutuellement :

  — le dé rouge fait 6 et pas le bleu : il y a 5 possibilités (correspondant aux 5 tirages possibles pour le dé bleu)

  — le dé bleu fait 6 et pas le rouge : il y a 5 possibilités

  — le dé rouge et le dé bleu font 6 : il y a 1 possibilité

  On trouve ainsi 11 façons.

- **Remarque.** Il est absolument capital de s'assurer

  — que les catégories sont mutuellement exclusives (c'est-à-dire en termes ensemblistes que la réunion est disjointe), ce qui veut dire qu'un objet ne peut pas appartenir à plusieurs catégories (dans l'exemple, un objet est un lancer de deux dés) ;

  — et que les catégories recouvrent tous les cas possibles, ce qui veut dire que tous les objets qui nous intéressent (ici les lancers avec au moins un 6) appartiennent à une de ces catégories.

Cardinal d'un produit cartésien

17 **Question.** Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$. Considérons la matrice rectangulaire suivante

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & m \\ m+1 & m+2 & m+3 & \cdots & 2m \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & & \cdots & nm \end{bmatrix}$$

Quel est son format ? Quel est son coefficient d'indice (i, j), à savoir a_{ij} ?

Rappel. Soit E et F deux ensembles. On rappelle que le produit cartésien de E par F, noté $E \times F$ (que l'on prononce « E croix F ») est l'ensemble des couples dont la première composante est un élément de E et la deuxième composante un élément de F. Autrement dit, un élément de $E \times F$ est du type (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$.

18 preuve **Proposition.**

— Soit E et F deux ensembles finis. Alors le produit cartésien $E \times F$ est un ensemble fini et on a

$$\operatorname{card}(E \times F) = \operatorname{card}(E)\operatorname{card}(F)$$

— Plus généralement, soit $E_1, \dots, E_p$ des ensembles finis.
Alors le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ (qui est l'ensemble des éléments $(x_1, \dots, x_p)$ avec $x_i \in E_i$) est un ensemble fini et on a

$$\operatorname{card}(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p) = \operatorname{card}(E_1)\operatorname{card}(E_2)\cdots\operatorname{card}(E_p)$$

Exemples.

- Un jeu de cartes classique peut naturellement être vu comme le produit cartésien

$$\left\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,V,D,R,A\right\} \times \left\{\spadesuit,\heartsuit,\diamondsuit,\clubsuit\right\}$$

Il y a donc $13 \times 4 = 52$ cartes dans un jeu de cartes classique.

- L'ensemble des diviseurs de $7875 = 3^2 \times 5^3 \times 7^1$ peut être mis en bijection avec le produit cartésien

....

Il y a donc .... diviseurs de 7875.

Arbre

19 sol → 18 **Question.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À partir d'un alphabet de 26 lettres, combien de mots de n lettres qui ne contiennent jamais deux lettres identiques consécutives peut-on former ?

20 **Principe multiplicatif.**
S'il y a n_1 manières de faire une première opération, puis qu'une fois cette première opération effectuée, il y a n_2 manières de faire une seconde opération, et ainsi de suite jusqu'à n_p manières de faire la dernière opération, alors il y a au total $n_1 n_2 \cdots n_p$ manières de faire ces p opérations à la suite.
C'est le genre de situation que l'on peut décrire par un arbre.

Partitionner

21 preuve **Lemme des bergers.**
Si un ensemble de cardinal n est partitionné en un certain nombre de classes de cardinal $d \neq 0$, alors ce nombre de classes vaut $\dfrac{n}{d}$.

- **Remarque.** Le nom de ce résultat vient de la blague selon laquelle un berger peut compter ses moutons en comptant les pattes et en divisant par 4. On peut le voir comme un principe de division.
Pour comprendre l'énoncé, on peut se raconter l'histoire suivante : la BJ compte 840 élèves répartis en des classes de 40 élèves. Il y a donc $\dfrac{840}{40} = 21$ classes.

22 sol → 19 **Question.** Donner diverses façons pour déterminer le cardinal de D_n :

$$D_n = \left\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \mid i \neq j\right\}$$

III. Liste, arrangement, combinaison

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini.

p-liste d'un ensemble E

23 **Définition.** Une p-liste de E est un élément du produit cartésien $\underbrace{E \times \cdots \times E}_{p \text{ fois}} = E^p$.
Autrement dit, une p-liste de E est un p-uplet dont les composantes sont dans E.
Dit encore autrement, une p-liste est un élément de la forme $(x_1, \ldots, x_p)$ avec chaque x_i dans E.

- **Exemple.** Considérons $E = \{\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit\}$.

  Donner une 5-liste de E : ....

  Donner une 2-liste de E : ....

24 **Proposition.** Soit E de cardinal n. Le nombre de p-listes de E est ....

- On généralise la formule à $p = 0$. Le nombre de 0-liste de E est 1.
- En particulier, le nombre de p-listes de $\{0, 1\}$ est ....

p-arrangement d'un ensemble E

25 **Définition.**
Un p-arrangement de E est une p-liste de E dont les composantes sont toutes **distinctes**.
Autrement dit, un p-arrangement est un élément de la forme $(x_1, \ldots, x_p)$ avec les $x_i \in E$ tous distincts.

- **Exemple.** Considérons $E = \{\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit\}$.

  Donner un 3-arrangement de E : ....

  Donner un 5-arrangement de E : ....

  Donner tous les 3-arrangements de E : ....

26 **Proposition.**
En posant $n = \operatorname{card} E$, le nombre de p-arrangements de E est ......

- On généralise la formule à $p = 0$. Le nombre de 0-arrangements de E est 1.

p-combinaison d'un ensemble E

Soit $p \in \mathbb{N}$.

27 **Définition.**
Une p-combinaison de E est une partie de E à p éléments (**distincts**, mais c'est sous entendu).
Autrement dit, une p-combinaison est un élément de la forme $\{x_1, \dots, x_p\}$ avec les $x_i \in E$.

- **À retenir !** Dans la notation d'une p-combinaison, l'ordre n'intervient pas.
  Par exemple, pour $E = \left\{\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit\right\}$, la 3-combinaison $\left\{\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\right\}$ est également égale à $\left\{\diamondsuit, \spadesuit, \heartsuit\right\}$.
- **Exemple.** Pour $E = \left\{P, C, K, T\right\}$.
  — donner toutes les 0-combinaisons de E : ....

  — donner toutes les 1-combinaisons de E : ....

  — donner toutes les 2-combinaisons de E : ....

  — donner toutes les 3-combinaisons de E : ....

  — donner toutes les 4-combinaisons de E : ....

- Donner toutes les parties de $E = \left\{P, C, K, T\right\}$ (de cardinal quelconque).
  Il y en a combien ?
- **Remarque à comprendre.**
  Il y a un lien entre une p-combinaison de E et un p-arrangement de E.

  Le « lien » est expliqué dans l'exemple suivant.

  À $\boxed{\text{LA}}$ 3-combinaison $\left\{\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\right\}$, on peut **associer** $\boxed{\text{LES}}$ 3-arrangements suivants :

....

28 **Proposition.** En notant $n = \operatorname{card} E$, le nombre de p-combinaisons de E est $\dbinom{n}{p}$.

29 **Proposition** ⋆ ⋆ ⋆ Pour $k, n \in \mathbb{N}$, notons $\mathscr{P}_k(\llbracket 1, n \rrbracket)$ l'ensemble des parties de $\llbracket 1, n \rrbracket$ à k éléments.
On a
$$\operatorname{card} \mathscr{P}_k(\llbracket 1, n \rrbracket) = \binom{n}{k}$$

Ce qui s'énonce en français :

— Le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments est $\dbinom{n}{k}$.

— Le nombre de façons de choisir k éléments dans un ensemble à n éléments est $\dbinom{n}{k}$.

Nombres d'applications...

30 **Proposition.** Soit $n, p \in \mathbb{N}$.

- Le nombre d'applications d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est n^p.
- Le nombre d'applications **injectives** d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est $\begin{cases} n(n-1)\cdots(n-p+1) & \text{si } p \neq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- Le nombre d'applications **bijectives** d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est $\begin{cases} n! & \text{si } p = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- Pour la preuve, on considère E un ensemble de cardinal p et F de cardinal n.
  On note $E = \{x_1, \dots, x_p\}$ et $F = \{y_1, \dots, y_n\}$.
  Les x_i sont ici distincts (WHY?). Idem pour les y_j.
- Se donner une application $f : E \to F$ revient à se donner
  - l'image de x_1 : il y a .... choix
  - une fois ce choix fait, l'image de x_2 : il y a .... choix

    $\vdots$
  - une fois ce choix fait, l'image de x_p : il y a .... choix

  D'après le principe multiplicatif, il y a .... applications de E dans F.

- Cas 1 : pour $p > n$, il n'y a pas d'application injective de E dans F, d'après ...
  Cas 2 : $p \leqslant n$.
  Se donner une application $f : E \to F$ **injective** revient à se donner
  - l'image de x_1 : il y a .... choix
  - une fois ce choix fait, l'image de x_2 : il y a .... choix

    $\vdots$
  - une fois ce choix fait, l'image de x_p : il y a .... choix

  D'après le principe multiplicatif, il y a .... applications injectives de E dans F.

- Cas 1 : pour $p \neq n$, il n'y a pas d'application bijective de E dans F, d'après ...
  Cas 2 : $p = n$.
  Se donner une application $f : E \to F$ **bijective** revient à se donner
  - l'image de x_1 : il y a .... choix
  - une fois ce choix fait, l'image de x_2 : il y a .... choix

    $\vdots$
  - une fois ce choix fait, l'image de $x_p = x_n$: il y a .... choix

  D'après le principe multiplicatif, il y a .... applications bijectives de E dans F.

Nombres de permutations

31 **Définition.**
Soit E un ensemble.
Une **permutation** de E est une application bijective de E dans E.

32 **Proposition.** Si E est un ensemble fini de cardinal n, il y a ...... permutations de E.

IV. Autres catégories classiques

p-listes strictement croissantes de $[\![1,n]\!]$

- **Définition.**
  Une p-liste strictement croissante de $[\![1,n]\!]$ est un p-uplet du type $(x_1,\ldots,x_p)$ avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$.
- **Question.** Lister toutes les 3-listes strictement croissantes de $[\![1,5]\!]$. Combien y en a-t-il ?

- **Proposition.** Le nombre de p-listes strictement croissantes de $[\![1,n]\!]$ est ...

Anagrammes (sur un alphabet à 2 lettres, voire plus !)

Voici ce que dit le petit Larousse :
Anagramme : nom féminin (grec anagramma, renversement de lettres). Mot formé en changeant de place les lettres d'un autre mot.

- Le nombre de mots de longueur 5 sur l'alphabet $\{B,J\}$ est ....
- Combien y a-t-il de mots de longueur 5 ayant 2 fois la lettre B ? ......
- Combien y a-t-il de mots ayant 2 fois la lettre B et 3 fois la lettre J ? ......

33 **Proposition (anagramme d'un mot sur un alphabet à 2 lettres).**

— Le nombre de mots de longueur n sur l'alphabet $\{A,B\}$ est 2^n.
— Le nombre de mots de longueur n sur l'alphabet $\{A,B\}$ ayant k fois la lettre A est $\binom{n}{k}$.
— Le nombre de mots sur l'alphabet $\{A,B\}$ ayant α fois la lettre A et β fois la lettre B est

$$\binom{\alpha+\beta}{\alpha} \quad \text{ou encore} \quad \binom{\alpha+\beta}{\beta} \quad \text{ou encore} \quad \frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\,\beta!}$$

34 **Exercice.** Combien y a-t-il de mots sur l'alphabet $\{A,B,C\}$ ayant

— 2 fois la lettre A
— 4 fois la lettre B
— 3 fois la lettre C

Autrement dit, combien d'anagrammes du mot $AABBBBCCC$?

V. Preuve combinatoire de formules

35
preuve

Proposition.

- **Ensemble des parties d'une ensemble.** Soit E un ensemble fini de cardinal n.
  Alors l'ensemble des parties de E, noté $\mathscr{P}(E)$, est fini de cardinal 2^n.
- **Symétrie du coefficient binomial.** Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Alors :
$$\forall p \in [\![0, n]\!], \qquad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$
- **Relation de Pascal.** Soit $n, p \in \mathbb{N}$.
  Alors :
$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$$

36 **Question.**

- **Formule de Vandermonde**
  Soit $n, m \in \mathbb{N}$ deux entiers tels que $0 \leqslant p \leqslant n+m$. Montrer que :
$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}$$
  Indication : considérer un comité de $n+m$ personnes constitué de n femmes et m hommes; compter le nombre de façons de choisir p personnes dans ce comité.
- **Formule du capitaine**
  Soit $k \leqslant m$. Établir la formule :
$$\binom{m}{k} k = m\binom{m-1}{k-1}$$
  Indication : considérer un groupe de m sportifs et compter le nombre de façons de former une équipe à k joueurs ayant un capitaine.
- **Généralisation de la formule du capitaine**
  Soit $c, j, n \in \mathbb{N}$ avec $c \leqslant j \leqslant n$.
  Considérons un groupe de n sportifs. Dénombrer de deux façons différentes l'ensemble des équipes à j joueurs ayant c capitaines pour établir la formule :
$$\binom{n}{j}\binom{j}{c} = \binom{n}{c}\binom{n-c}{j-c}$$
  Application. Pour $x \in \mathbb{R}$, simplifier $\displaystyle\sum_{j=c}^{n} \binom{n}{j}\binom{j}{c} x^{j-c}$

VI. Somme, produit : rappels et compléments

Symbole Σ

37 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x_1, \dots, x_n$ des réels.

La somme $D_n = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j$ comporte …… termes.

La somme $T_n = \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} x_i x_j x_k$ comporte …… termes.

38 **À comprendre.** Soit $n, k \in \mathbb{N}$ avec $k \leqslant n$.

— La somme $\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} x_{i_1} \cdots x_{i_k}$ comporte $\binom{n}{k}$ termes.

— Chaque terme est indexé par une partie de cardinal k de $[\![1, n]\!]$ (c'est-à-dire par une k-combinaison de $[\![1, n]\!]$).
Autrement dit, le symbole $\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n}$ peut être remplacé par $\sum_{I \in \mathscr{P}_k([\![1,n]\!])}$

— En posant $I = \{i_1, \dots, i_k\}$, le produit $x_{i_1} \cdots x_{i_k}$ peut encore s'écrire $\prod_{i \in I} x_i$.

— On a donc

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} x_{i_1} \cdots x_{i_k} = \sum_{I \in \mathscr{P}_k([\![1,n]\!])} \prod_{i \in I} x_i$$

Symbole $\prod$

39 Développez le produit $u_n = \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i)$, c'est-à-dire l'écrire avec des sommes.

40 **À comprendre.** Soit $n \in \mathbb{N}$.

— Le produit $\prod_{i=1}^{n} (1 - x_i)$ comporte …… termes, organisé en $n + 1$ strates (numérotées de 0 à n), qui sont sommées avec une alternance de signe.

— La strate numérotée k comporte …… termes.

— On a

$\diamondsuit$ $$\prod_{i=1}^{n} (1 - x_i) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

VII. Formule du crible de Poincaré (HP)

41 **Formule du crible de Poincaré.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $A_1, \dots, A_n$ des parties finies d'un ensemble Ω.
On a

$$\operatorname{card}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \operatorname{card}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$$

Grandes étapes de la preuve de la formule du crible

- Expliquez l'égalité de fonctions numériques :

$$\prod_{j=1}^{n} (\mathbb{1}_\Omega - \mathbb{1}_{A_j}) \quad = \quad \mathbb{1}_\Omega \quad + \quad \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbb{1}_{A_{i_1}} \times \cdots \times \mathbb{1}_{A_{i_k}}$$

- « On en déduit » (WHY?) :

$$\mathbb{1}_{A_1 \cup \cdots \cup A_n} \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}}$$

- Évaluons cette dernière égalité $x \in \Omega$ et sommons sur tous les $x \in \Omega$.

Fonction indicatrice

42 **Définition.** Soit Ω un ensemble quelconque (non nécessairement fini) et A une partie de Ω (non nécessairement finie).
L'indicatrice de la partie A (relativement à Ω) est l'application

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{1}_A : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

- Une indicatrice est une fonction numérique, c'est-à-dire une application dont l'image est incluse dans l'ensemble des nombres réels.
L'ensemble des fonctions numériques à valeurs réelles définies sur Ω est noté $\mathbb{R}^\Omega$.
Cet ensemble est muni de plusieurs lois, à savoir $+, \cdot, \times$

43 **Proposition (propriétés de la fonction indicatrice).** Soit $A, B \in \mathscr{P}(E)$.

- $A = B \iff \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$
- $\mathbb{1}_{\overline{A}} = \mathbb{1}_\Omega - \mathbb{1}_A$
- $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$
- $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$
- Si A est une partie **finie**, le cardinal de A s'exprime à l'aide de l'indicatrice de A :

$$\operatorname{card} A = \sum_{x \in \Omega} \mathbb{1}_A(x)$$

Dénombrement

preuve et éléments de correction

3

Preuve pour la culture. Soit E et F deux ensembles finis de cardinal respectif n et m.
On suppose qu'il existe une bijection de $\varphi : E \to F$. Et montrons que $n = m$.
Comme E est fini de cardinal n, il existe une bijection $\mathbf{e} : [\![1, n]\!] \to E$.
Comme F est fini de cardinal m, il existe une bijection $\mathbf{f} : [\![1, m]\!] \to F$.
On obtient ainsi une bijection $[\![1, n]\!] \to [\![1, m]\!]$, à savoir : $\mathbf{f}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{e}$.
D'après la remarque faite au tout début du chapitre, on obtient $n = m$.

4

Preuve pour la culture.
Il s'agit d'exhiber une bijection entre $[\![1, n]\!]$ et $E = [\![p, q]\!]$ avec $n = q - p + 1$.
Ou encore de « coiffer » $[\![p, q]\!]$ par un certain $[\![1, n]\!]$.
Posons $\varphi : \begin{array}{ccc} [\![1, q-p+1]\!] & \longrightarrow & [\![p, q]\!] \\ k & \longmapsto & k+p-1 \end{array}$
Montrons que φ est une application bijective.
Il n'est pas difficile de montrer que $\psi : \begin{array}{ccc} [\![p, q]\!] & \longrightarrow & [\![1, q-p+1]\!] \\ j & \longmapsto & j-(p-1) \end{array}$ vérifie $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$ et $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$, donc φ est bijective.

9

Soit $f : E \to F$ avec E ensemble fini.

i) *La partie $f(E)$ est finie et* $\operatorname{card}\big(f(E)\big) \leqslant \operatorname{card} E$.

ii) $\operatorname{card}\big(f(E)\big) = \operatorname{card} E \iff f$ *injective*

i) A la fin de la preuve, $f(E)$ sera en bijection avec une partie A de E.
Comme $A \subset E$, la partie A est finie et vérifie $\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} E$.
Donc $f(E)$, qui est en bijection avec A, est finie et vérifie $\operatorname{card}\big(f(E)\big) = \operatorname{card} A$.
Par transitivité, on a donc $\operatorname{card}\big(f(E)\big) \leqslant \operatorname{card} E$.

Il reste donc à construire une bijection entre $f(E)$ et une partie A de E.
Voici comment procéder.
Pour chaque $y \in f(E)$, on choisit un (et un seul) antécédent de y par f, que l'on note x_y.
On note A l'ensemble de tous les x_y pour y parcourant $f(E)$

$$A = \{x_y\}_{y \in f(E)}$$

Et on considère l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & f(E) \\ x_y & \longmapsto & f(x_y) \end{array}$$

Cette application est surjective (WHY), et elle est injective (WHY).
Ainsi φ est une bijection entre A et $f(E)$.

ii) $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $\operatorname{card}\big(f(E)\big) = \operatorname{card} E$.
Reprenons les notations du point i). Autrement dit, considérons une partie A de E contenant un (et un seul) antécédent de chaque $y \in f(E)$.
Par construction, on a $\operatorname{card} A = \operatorname{card} f(E)$.
Avec l'hypothèse, on a donc $\operatorname{card} A = \operatorname{card} E$. Or $A \subset E$. Par inclusion et égalité des cardinaux, on a donc $A = E$.
Cette égalité se traduit en français par la phrase suivante :

E contient un unique antécédent de tout élément $y \in f(E)$.
Ainsi f est injective (tout élément de l'ensemble d'arrivée admet au plus un antécédent; il en admet un unique s'il est dans l'image, et 0 sinon).

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons f injective.
Alors la restriction de f à son image, à savoir $f : E \to f(E)$, est une bijection (c'est une injection par hypothèse, et c'est une surjection car son ensemble d'arrivée est son image!).
Ainsi E et $f(E)$ sont en bijection, donc ont même cardinal.

13

— Notons a le cardinal de A et b celui de B.
Par définition du cardinal, il existe deux bijections

$$\alpha : [\![1, a]\!] \to A \qquad \text{et} \qquad \beta : [\![1, b]\!] \to B$$

Construisons une bijection de $[\![1, a+b]\!]$ dans $A \sqcup B$.
En voici une :

$$\begin{array}{rcl} [\![1, a+b]\!] & \longrightarrow & A \sqcup B \\ k & \longmapsto & \begin{cases} \alpha(k) & \text{si } k \in [\![1, a]\!] \\ \beta(k-a) & \text{si } k \in [\![a+1, a+b]\!] \end{cases} \end{array}$$

— Je vous laisse prouver par récurrence que pour tout $p \geqslant 2$, la propriété suivante est vraie :

$$\mathscr{H}_p : \text{« pour toutes parties } A_1, \dots, A_p \text{ de } \Omega \text{ finies et deux à deux disjointes,}$$
$$\text{l'union } \bigsqcup_{i=1}^{p} A_i \text{ est finie et } \operatorname{card}\Big(\bigsqcup_{i=1}^{p} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{p} \operatorname{card} A_i \text{ ».}$$

15

On a les égalités d'ensembles :

$$\begin{array}{rcccc} A & = & A \setminus B & \sqcup & A \cap B \\ B & = & B \setminus A & \sqcup & A \cap B \end{array}$$

Les unions étant disjointes, on a

$$\begin{array}{rcccc} \operatorname{card} A & = & \operatorname{card}(A \setminus B) & + & \operatorname{card}(A \cap B) \\ \operatorname{card} B & = & \operatorname{card}(B \setminus A) & + & \operatorname{card}(A \cap B) \end{array}$$

D'autre part

$$A \cup B = A \setminus B \sqcup A \cap B \sqcup B \setminus A$$

En prenant le cardinal

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A \setminus B) + \operatorname{card}(A \cap B) + \operatorname{card}(B \setminus A)$$

D'où

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \Big(\operatorname{card} A - \operatorname{card}(A \cap B)\Big) + \operatorname{card}(A \cap B) + \Big(\operatorname{card} B - \operatorname{card}(A \cap B)\Big)$$

Après simplification des $\operatorname{card}(A \cap B)$, on obtient la formule annoncée :

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B - \operatorname{card}(A \cap B)$$

18

Démontrons le premier point de deux manières différentes.
Le deuxième point se démontre par récurrence à l'aide du premier point, mais nécessite de faire un petit quelque chose avant!

Preuve 1. Avec la définition.
Soit n le cardinal de E et m le cardinal de F.
• Première étape : on suppose tout d'abord que $E = [\![1,n]\!]$ et $F = [\![1,m]\!]$.
Il s'agit de montrer que $[\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$ est fini de cardinal nm.
Il convient donc de le mettre en bijection avec $[\![1,nm]\!]$.
Pour cela, considérons l'application bijective suivante :

$$\varphi : \begin{array}{rcl} [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!] & \longrightarrow & [\![1,nm]\!] \\ (i,j) & \longmapsto & (i-1)m + j \end{array}$$

• Deuxième étape : on revient à E quelconque de cardinal n et F quelconque de cardinal m.
Par définition du cardinal, il existe une bijection $\mathbf{e} : [\![1,n]\!] \to E$ et une bijection $\mathbf{f} : [\![1,m]\!] \to F$.
Alors on peut construire une bijection de $[\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$ dans $E \times F$:

$$\psi : \begin{array}{rcl} [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!] & \longrightarrow & E \times F \\ (i,j) & \longmapsto & \big(\mathbf{e}(i), \mathbf{f}(j)\big) \end{array}$$

• Conclusion
A l'étape 2, on a montré que $E \times F$ est en bijection avec $[\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$, via φ.
A l'étape 1, on a montré que $[\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$ est en bijection avec $[\![1,nm]\!]$, via ψ^{-1}.
Par transitivité, $E \times F$ est en bijection avec $[\![1,nm]\!]$, via $\psi^{-1} \circ \varphi$.

Preuve 2. Avec des unions disjointes.
Nous allons utiliser le fait évident suivant : tout ensemble est la réunion disjointe de ses singletons (la classe de Piston 3 est la réunion disjointe des parties formées d'un seul élève). D'où :

$$E \times F = \bigsqcup_{(x,y)\in E\times F} \big\{(x,y)\big\}$$

En prenant le cardinal, on a donc

$$\begin{aligned} \operatorname{card}(E \times F) &= \operatorname{card}\left(\bigsqcup_{(x,y)\in E\times F} \big\{(x,y)\big\} \right) \\ &= \sum_{(x,y)\in E\times F} \operatorname{card}\big\{(x,y)\big\} \\ &= \sum_{x\in E} \sum_{y\in F} \operatorname{card}\big\{(x,y)\big\} \\ &= \sum_{x\in E} \sum_{y\in F} 1 \\ &= \sum_{x\in E} \operatorname{card}(F) \\ &= \operatorname{card}(F) \sum_{x\in E} 1 \\ &= \operatorname{card}(F)\operatorname{card}(E) \end{aligned}$$

19

Se donner un tel mot revient à

- choisir la 1ère lettre : 26 choix possibles
- choisir la 2ème lettre : 25 choix possibles

$\vdots$

- choisir la $(n-1)$ème lettre : 25 choix possibles
- choisir la $n$ème lettre : 25 choix possibles

Par principe multiplicatif, il y a $26 \times 25^{n-1}$ mots cherchés.

21

Notons c le nombre de classes. Il s'agit de montrer que $n = c \times d$.
Comment peut-on choisir un élément de l'ensemble ? (pensez à un élève de la BJ).
Et bien, en faisant un premier choix, à savoir sa classe : il y a c choix possibles.
Une fois ce choix fait, on choisit un élément dans cette classe : il y a d choix possibles.
Par principe multiplicatif, il y a cd choix possibles.
D'où $\operatorname{card} E = cd$, ce qu'il fallait démontrer.

22

1) Preuve par principe d'addition
On va découper $[\![1,n]\!]^2$ en deux catégories mutuellement exclusives.
Un couple (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$ possède ses deux composantes identiques, ou bien ses deux composantes différentes.
Notons $I_n = \left\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \mid i = j\right\}$.
On a alors l'égalité

$$[\![1,n]\!]^2 \;=\; I_n \sqcup D_n$$

En passant au cardinal, on a alors

$$n^2 \;=\; \operatorname{card} I_n + \operatorname{card} D_n$$

soit $\operatorname{card} D_n = n^2 - n$.

Pour justifier le cardinal de I_n, on peut faire la preuve suivante.
Se donner un élément (i,j) de I_n revient à

- choisir i : n choix
- une fois ce choix fait, choisir j : 1 choix

soit $n \times 1 = n$ possibilités, par principe multiplicatif.

2) Preuve par principe multiplicatif
Se donner un élément (i,j) de D_n revient à

- choisir i : n choix
- une fois ce choix fait, choisir j : $n-1$ choix

soit $n(n-1)$ possibilités, par principe multiplicatif.

3) Preuve par un calcul

$$\begin{aligned}
\operatorname{card} D_n &= \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \\ i\neq j}} 1 \\
&= \sum_{i<j} 1 + \sum_{i>j} 1 \\
&= 2\sum_{i<j} 1 \\
&= 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} 1 \\
&= 2\sum_{j=1}^{n} (j-1) \\
&= 2\sum_{k=0}^{n-1} k \\
&= 2\frac{(n-1)n}{2} \\
&= (n-1)n
\end{aligned}$$

4) La même preuve que la première (avec le principe d'addition), mais par un calcul

$$\begin{aligned}
\operatorname{card} D_n &= \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \\ i\neq j}} 1 \\
&= \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} 1 \quad - \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \\ i=j}} 1 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{i} 1 \\
&= \sum_{i=1}^{n} n - \sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= n\sum_{i=1}^{n} 1 - n \\
&= n^2 - n
\end{aligned}$$

35

(1) Soit E un ensemble fini de cardinal n.
On a l'égalité

$$\mathscr{P}(E) = \bigsqcup_{k=0}^{n} \mathscr{P}_k(E)$$

En passant au cardinal, on a donc

$$\operatorname{card} \mathscr{P}(E) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{card} \mathscr{P}_k(E)$$

C'est-à-dire

$$\operatorname{card}\mathscr{P}(E) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$$

(2) Considérons E un ensemble de cardinal n.

Pour construire une partie à p éléments de E, on peut

- *d'une part*, choisir de prendre p éléments de E ; il y a $\binom{n}{p}$ choix
- *d'autre part*, choisir de ne pas prendre $n-p$ éléments de E ; il y a $\binom{n}{n-p}$ choix.

Bilan :

$$\forall\, p \in [\![0, n]\!], \qquad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

De manière formelle, on peut dire qu'il y a une bijection entre les parties de cardinal p de E et les parties de cardinal $n-p$ de E, en considérant l'application qui à une partie associe son complémentaire :

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{P}_p(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}_{n-p}(E) \\ I & \longmapsto & \bar{I} \end{array}$$

(3) Soit E un ensemble de cardinal $n+1$ avec un élément privilégié x_0.

Dénombrons l'ensemble des parties de cardinal $p+1$ de E.

- D'une part, il y en a $\binom{n+1}{p+1}$.
- D'autre part, pour construire une partie de cardinal $p+1$ de E, on peut :
  - *ou bien*, prendre x_0 puis choisir p éléments de $E \setminus \{x_0\}$: il y a $\binom{n}{p}$ choix.
  - *ou bien*, ne pas prendre x_0 et choisir $p+1$ éléments de $E \setminus \{x_0\}$: il y a $\binom{n}{p+1}$ choix.

  Avec cette deuxième façon, il y a $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$ parties de cardinal $p+1$ de E.

Bilan :

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$$

Ce texte en français peut se résumer par l'égalité

$$\mathscr{P}_{p+1}(E) = \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \text{parties de cardinal } p+1 \text{ de } E \\ \text{contenant } x_0 \end{array} \right\}}_{\substack{\text{s'identifie à} \\ \left\{\text{parties de cardinal } p \text{ de } E \setminus \{x_0\}\right\}}} \sqcup \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \text{parties de cardinal } p+1 \text{ de } E \\ \text{ne contenant pas } x_0 \end{array} \right\}}_{\substack{\text{est égal à} \\ \left\{\text{parties de cardinal } p+1 \text{ de } E \setminus \{x_0\}\right\}}}$$