

Dérivation

I Généralités	2
Nombre dérivé...	
Dérivabilité = existence d'un DL_1	
Gauche/Droite	
Des exemples à maîtriser parfaitement	
II Opérations	5
Point, Plus, Foix	
Composition	
Inverse	
Dérivation d'une bijection	
Fonctions usuelles	
Encore des exemples à maîtriser parfaitement	
III Théorèmes de Rolle et des accroissements finis	9
Extrema	
Théorème de Rolle	
Égalité des accroissements finis	
Dérivée et monotonie	
Stricte monotonie	
Inégalité des accroissements finis	
Application aux suites $u_{n+1} = f(u_n)$	
Théorème de la limite de la dérivée	
IV Dérivées successives	15
Classe $\mathcal{C}^1$	
Classe $\mathcal{C}^k$ et $\mathcal{C}^\infty$	
Opérations	
Fonctions usuelles	
Un exemple plus difficile	
V Extension aux fonctions à valeurs complexes	19
Définition	
Ce qui ne change pas : l'aspect opératoire	
Ce qui change : les accroissements finis	



Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle non trivial (non vide, non réduit à un point).

I. Généralités

Nombre dérivé...

1

Définition. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

— Le *taux d'accroissement* de f en a est la fonction τ_a définie sur $I \setminus \{a\}$ par :

$$\begin{aligned} I \setminus \{a\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \end{aligned}$$

— La fonction f est *dérivable en a* lorsque son taux d'accroissement en a , possède une limite finie en a .

Cette limite s'appelle alors *nombre dérivé* de f en a et se note $f'(a)$.

— On dit que f est *dérivable sur I* lorsque f est dérivable en tout point de I .

La fonction définie sur I par $a \mapsto f'(a)$ est appelée fonction dérivée de f , et est notée f' .

— On note $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I .

• Comme pour les fonctions continues, on s'autorise parfois à parler de fonctions dérivables même dans le cas où elles sont définies sur une réunion d'intervalles d'intérieur non vide. Par exemple :

— la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est un élément de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$,

— la fonction tangente est un élément de $\mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}), \mathbb{R})$.

• La notation « ' » ne s'applique qu'aux fonctions. On peut écrire $f'(x)$, ~~mais surtout pas $f(x)'$~~ .

• La notation $\frac{d}{dx}(f(x))$ peut être utilisée, notamment lorsque f est définie par une expression.

• **Se ramener en 0.**

La fonction f est dérivable en a si et seulement si la fonction $h \mapsto f(a+h)$ est dérivable en 0.

On a alors

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

• **Notion locale.** La notion de dérivabilité étant définie à l'aide d'une limite, est une notion locale.

Plus précisément, s'il existe $r > 0$ tel que $f|_{I \cap [a-r, a+r]}$ soit dérivable en a , alors f est dérivable en a et $f'(a) = (f|_{I \cap [a-r, a+r]})'(a)$.

2

Proposition (quatre fonctions usuelles).

— La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' : x \mapsto 0$.

$$x \longmapsto 1$$

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' : x \mapsto nx^{n-1}$.

$$x \longmapsto x^n$$

— La fonction $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \sqrt{x}$$

★ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $f' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

★ n'est pas dérivable en 0.

— La fonction $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f' : x \mapsto \frac{-1}{x^2}$.

$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$



Dérivabilité = existence d'un DL_1

3

Proposition (développement limité à l'ordre 1).

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

La fonction f est dérivable en a si et seulement si il existe un réel ℓ et une fonction $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \ell(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

Dans ces conditions, $f'(a) = \ell$.

4

Proposition (continuité).

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

- La réciproque est fausse, bien sûr!
- On peut déduire de [3] l'implication : $\begin{cases} f \text{ dérivable en } a \\ f'(a) \neq 0 \end{cases} \implies f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f'(a)(x-a)$

Gauche/Droite

5

Définition.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

- Si a n'est pas la borne supérieure de I , on dit que f est *dérivable à droite* en a si la restriction $f|_{I \cap [a, +\infty[}$ est dérivable en a .
Par définition, le nombre *dérivé à droite de f en a* est $(f|_{I \cap [a, +\infty[})'(a)$. Il est noté $f'_d(a)$.
- On définit de même la dérivabilité à gauche et le nombre dérivé à gauche, en un point a qui n'est pas l'extrémité inférieure de I . Il est noté $f'_g(a)$.

- Si a est l'extrémité supérieure de I : l'intersection $I \cap [a, +\infty[$ est réduite au singleton $\{a\}$, donc la question de la dérivabilité à droite de f en a ne se pose pas. Ainsi, la fonction f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche en a .
- Si f est dérivable à droite en a , alors f est continue à droite en a .

6

Proposition. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overset{\circ}{I}$ (un point intérieur en lequel f est définie).

On a l'équivalence

$$f \text{ dérivable en } a \iff \begin{cases} f \text{ dérivable à gauche en } a \\ f \text{ dérivable à droite en } a \\ f'_g(a) = f'_d(a) \end{cases}$$

- **Attention.** Vous constaterez la différence entre l'énoncé précédent concernant la dérivabilité et l'énoncé suivant concernant la continuité que voici :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in \overset{\circ}{I}$ (un point intérieur).

La fonction f est continue en a si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en a .

- **Exemple/Contre-exemple.**

La fonction $f : x \mapsto |x|$ est dérivable à gauche et à droite en 0, mais n'est pas dérivable en 0.

En effet, la restriction de f à $]-\infty, 0]$ est $x \mapsto -x$, dérivable en 0, de dérivée -1 , donc $f'_g(0) = -1$.

De même, on a $f'_d(0) = 1$.

Ainsi, f n'est pas dérivable en 0.

Des exemples à maîtriser parfaitement

7 Question.

- i) La fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est-elle dérivable en 0?

$$x \mapsto |x^3|$$
- ii) La fonction $f: [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est-elle dérivable en 1?

$$x \mapsto \sqrt{x^3 - 1}$$
- iii) La fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est-elle dérivable en 0?

$$x \mapsto \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

i)

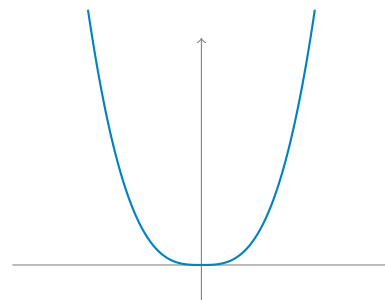
Examinons le taux d'accroissement en 0.

On a :

$$\forall x \neq 0, \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x^3| - |0^3|}{x - 0} = \frac{|x|^3}{x} = \frac{x^2|x|}{x} = x|x|$$

Cette dernière quantité tend vers 0 quand $x \rightarrow 0$.

Bilan : f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.



ii)

Examinons le taux d'accroissement en 1.

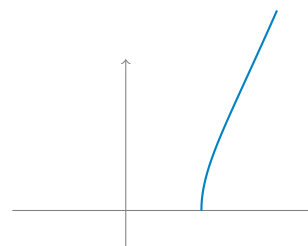
On a :

$$\forall x \neq 1, \quad \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\sqrt{x^3 - 1} - 0}{x - 1} = \frac{\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}}{x-1} = \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{x-1}}$$

(le quantificateur $\forall x \neq 1$ est à comprendre : « pour tout $x \in [1, +\infty[$ différent de 1 »).

En 1, on a $\sqrt{x^2+x+1} \rightarrow \sqrt{3}$ et $\frac{1}{\sqrt{x-1}} \rightarrow +\infty$, donc $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \rightarrow +\infty$.

Bilan : f n'est pas dérivable en 1.



Pour info : $\mathcal{C}_f$ admet une tangente verticale au point d'abscisse 1.

iii) Examinons le taux d'accroissement en 0.

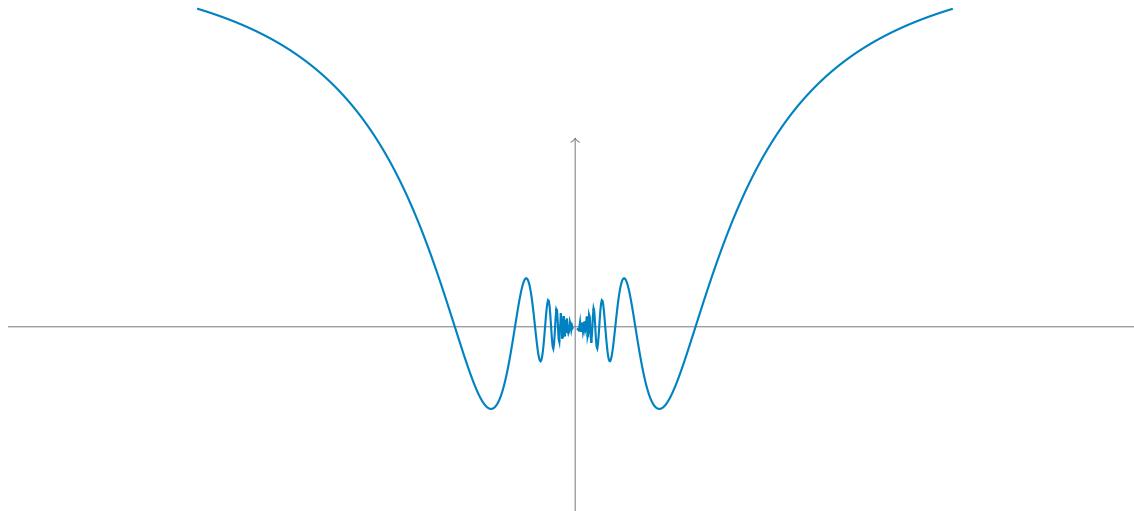
$$\forall x \neq 0, \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \sin(\frac{1}{x}) - 0}{x - 0} = \sin(\frac{1}{x})$$

Cette dernière quantité n'admet pas de limite en 0 (savez-vous le prouver?).

Bilan : f n'est pas dérivable en 0 (et n'admet même pas de tangente en ce point).

En revanche, on peut montrer que f est bien continue en 0.

En effet, $x \sin(\frac{1}{x}) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ (c'est du « tend vers 0 » fois « borné »).



II. Opérations

Point, Plus, Foix

8

Proposition (opérations « point, plus, foix »).

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

— Si f et g sont dérivables en a , alors $\lambda \cdot f$, $f + g$ et $f \times g$ sont dérivables en a et :

$$(\lambda \cdot f)'(a) = \lambda f'(a) \quad (f + g)'(a) = f'(a) + g'(a) \quad (f \times g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

— Si f et g sont dérivables sur I , alors $\lambda \cdot f$, $f + g$ et $f \times g$ sont dérivables sur I et :

$$(\lambda \cdot f)' = \lambda \cdot f' \quad (f + g)' = f' + g' \quad (f \times g)' = f' \times g + f \times g'$$

- En itérant un nombre fini de fois l'opération « foix », on obtient :

si f est dérivable sur I , alors pour tout $n \in \mathbb{N}^$, la fonction f^n est dérivable sur I et $(f^n)' = n f' f^{n-1}$.*

- Comme une combinaison linéaire de fonctions dérivables sur I est dérivable sur I , et que la fonction nulle est bien sûr dérivable sur I , on en déduit que $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^I$.

De plus, l'application $D : \mathcal{D}(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^I$ est une application linéaire.

$$f \mapsto f'$$

- Schématiquement :

$\lambda \cdot \text{dérivable} = \text{dérivable}$

$\text{dérivable} + \text{dérivable} = \text{dérivable}$

$\text{dérivable} \times \text{dérivable} = \text{dérivable}$

Et enfin $\text{dérivable} + \text{non-dérivable} = \dots$

9

Proposition.

Notons $\text{Poly}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions polynomiales définies sur I et à valeurs réelles.

$$\text{Poly}(I, \mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathbb{R}^I \mid \exists P \in \mathbb{R}[X], f : x \mapsto P(x) \right\}$$

Alors $\text{Poly}(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$.

L'application suivante est bien définie et est un endomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \text{Poly}(I, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \text{Poly}(I, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$$



10

Proposition (dérivée d'une composée)

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$.

- Si $\begin{cases} f \text{ est dérivable en } a \\ g \text{ est dérivable en } f(a) \end{cases}$ alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) f'(a)$
- Si $\begin{cases} f \text{ est dérivable sur } I \text{ à valeurs dans } J \\ g \text{ est dérivable sur } J \end{cases}$ alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$

- Si on pose $b = f(a)$, alors la formule s'écrit joliment $(g \circ f)'(a) = g'(b) f'(a)$.
- On peut facilement intuitiver le résultat précédent dans le cas particulier où l'on aurait $f(x) \neq f(a)$ pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, en observant :

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{f(x) - f(a)} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

- **Attention.** Le théorème ne dit pas

~~Si $\begin{cases} f \text{ est non-dérivable en } a \\ g \text{ est dérivable en } f(a) \end{cases}$ alors $g \circ f$ est non-dérivable en a~~

Par exemple,

$\begin{cases} \text{la fonction } f : x \mapsto \sqrt{x-3} \text{ est non-dérivable en } 3 \\ \text{la fonction } g : t \mapsto \cos t \text{ est dérivable en } f(3) = 0 \end{cases}$

mais la fonction $x \mapsto \cos(\sqrt{x-3})$ est dérivable en 3 (WHY?).

- **Exemple.** Montrons que $\varphi : x \mapsto \sqrt{e^x + e^{-x}}$ est dérivable en 0.

On sait que : $\begin{cases} \text{la fonction } f : x \mapsto e^x + e^{-x} \text{ est dérivable en } 0 \text{ par opérations et } f'(0) = 0. \\ \text{la fonction } g : t \mapsto \sqrt{t} \text{ est dérivable en } f(0) = 2. \end{cases}$

Par composition, la fonction $\varphi = g \circ f$ est dérivable en 0 et on a $\varphi'(0) = \frac{f'(0)}{2\sqrt{f(0)}} = 0$.

- **Autre exemple.** Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction T -périodique dérivable.

Montrons que f' est une fonction T -périodique.

On a l'égalité de nombres réels

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+T) = f(x)$$

que l'on peut traduire en une égalité de fonctions, à savoir $f \circ \tau = f$ où τ est la fonction $x \mapsto x+T$.

On sait que : $\begin{cases} \text{la fonction } \tau \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ (en tant que fonction affine) à valeurs dans } \mathbb{R} \\ \text{la fonction } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ (par hypothèse)} \end{cases}$

Par composition, la fonction $f \circ \tau$ est dérivable et $(f \circ \tau)' : x \mapsto \underbrace{\tau'(x)}_{=1} \times f'(x+T) = f'(x+T)$.

Reprenons l'égalité $f = f \circ \tau$ et dérivons (licite).

On obtient $f' = (f \circ \tau)'$, donc avec ce qui précède, on en déduit que $f' : x \mapsto f'(x+T)$.

Ainsi, f' est T -périodique.



11

Proposition (inverse). Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

- Si f est dérivable en a et si $f(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ (est bien définie au voisinage de a) est dérivable en a et

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f(a)^2}$$

- Si f est dérivable et ne s'annule pas sur I , alors $\frac{1}{f}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}$.

- En itérant un nombre fini de fois l'opération « fois », on obtient :

si f est dérivable sur I , alors pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, la fonction f^n est dérivable sur I et $(f^n)' = n f' f^{n-1}$.

- En combinant le produit et l'inverse, on obtient :

si f et g sont dérivables sur I et si g ne s'annule pas sur I , alors la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Dérivation d'une bijection

- On rappelle le résultat du chapitre précédent :

Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction bijective. Alors :

$$f \text{ continue sur l'intervalle } I \implies f^{-1} \text{ est continue sur l'intervalle } J$$

La bijection réciproque d'une fonction continue sur un intervalle est continue.

12

Proposition. Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction bijective.

- Soit $a \in I$ un point en lequel f est dérivable.

Alors

$$f^{-1} \text{ est dérivable en } f(a) \iff f'(a) \neq 0$$

Dans ce cas, $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$.

- On a :

$$\begin{cases} f \text{ dérivable sur } I \\ f' \text{ ne s'annule pas sur } I \end{cases} \implies f^{-1} \text{ est dérivable sur } J \quad \text{et} \quad (f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

- Si on pose $b = f(a)$ et $g = f^{-1}$, alors on a, sous couvert de dérivabilité,

$$(g \circ f)'(a) = g'(b) f'(a)$$

Ce qui permet de retenir facilement (et comprendre) la formule en un point a .

13

Proposition (non exhaustive !)

- La fonction $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée vaut $x \mapsto \frac{1}{x}$.
- La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut $x \mapsto e^x$.
- Pour $a > 0$, la fonction $x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut $x \mapsto (\ln a) a^x$.
- Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée vaut $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.
- Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a $(\cos)' = -\sin$ et $(\sin)' = \cos$.
- La fonction tangente est dérivable sur $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ et $\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$.
- La fonction Arcsinus est dérivable sur $] -1, 1[$ et $\text{Arcsin}' : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- La fonction Arccosinus est dérivable sur $] -1, 1[$ et $\text{Arccos}' : x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- La fonction Arctangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\text{Arctan}' : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

Encore des exemples à maîtriser parfaitement

14

Question. Montrer que la fonction $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et déterminer sa dérivée.

$$x \mapsto \ln|x|$$

15

Question. Dessiner l'allure du graphe de la fonction f . Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? Si oui, donner la dérivée.

sol → 21

- (i) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- $$x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- (ii) Soit $f: x \mapsto |x| \sin x$ définie sur $\mathbb{R}$.



III. Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Extrema

16

Définition. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- On dit que f admet un *maximum local* en a lorsque f est majorée par $f(a)$ au voisinage de a . Autrement dit, lorsqu'il existe un réel $\delta > 0$ tel que la fonction $f|_{I \cap [a-\delta, a+\delta]}$ admette un maximum en a , i.e. :

$$\forall x \in I \cap [a-\delta, a+\delta], f(x) \leq f(a).$$

- On définit de même la notion de *minimum local*.
- On dit que f admet un *extremum local* en a lorsque f admet en a un maximum ou un minimum local.

- Évidemment, la fonction f admet un maximum local en a si et seulement si $-f$ admet un minimum local en a .
- On utilise parfois la locution « maximum global » à la place de maximum. De même pour « minimum global » et « extremum global ».
- Un extremum global est évidemment un extremum local.

17

Le lemme de « l'extremum local ».

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in I$.

$$\begin{cases} a \text{ est un point intérieur à } I \\ f \text{ possède un extremum local en } a \in \overset{\circ}{I} \end{cases} \implies f'(a) = 0$$

- **Vocabulaire.** Un point critique est un point en lequel f est dérivable et de dérivée nulle. Le lemme peut donc s'énoncer :

Pour qu'une fonction dérivable $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admette un extremum local en un point intérieur $a \in \overset{\circ}{I}$, il est nécessaire que a soit un point critique.

- Il est important que a soit un point intérieur. Considérons par exemple $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.
$$x \longmapsto x + 3$$

Cette fonction est dérivable, admet un minimum en 0 (qui vaut 3) et un maximum en 1 (qui vaut 4), et pourtant $f'(0)$ et $f'(1)$ ne sont pas nuls.

- La réciproque est fausse : on peut avoir $f'(a) = 0$ sans que f ne possède d'extremum local en a .

Considérer par exemple

Théorème de Rolle

18

Théorème de Rolle.

Soit f définie sur un intervalle contenant $a < b$.

$$\begin{cases} f \text{ continue sur } [a, b] \\ f \text{ dérivable sur }]a, b[\\ f(a) = f(b) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{il existe } c \in]a, b[\text{ tel que } f'(c) = 0$$

- Les ingrédients de la preuve sont « Théorème des bornes atteintes » puis « le lemme de l'extremum local ».
- Dans ce théorème, il y a 3 hypothèses à vérifier.
- Ce théorème est un théorème d'existence (il fournit l'existence d'un c tel que ...).
- Il n'y a pas unicité de c .
Considérer par exemple, la fonction sinus sur $[0, 2\pi]$.
On a $\sin(0) = \sin(2\pi)$, et sa fonction dérivée $\cos$ s'annule deux fois sur $[0, 2\pi]$, à savoir en $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$.
- Des dessins :

Égalité des accroissements finis

19

Théorème des accroissements finis.

Soit f définie sur un intervalle contenant $a < b$.

$$\begin{cases} f \text{ continue sur } [a, b] \\ f \text{ dérivable sur }]a, b[\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{il existe } c \in]a, b[\text{ tel que } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- La conclusion s'écrit parfois sans dénominateur

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Ainsi, l'accroissement de f entre a et b s'exprime en fonction de la dérivée de f et de l'accroissement de x entre a et b .

- Géométriquement, ce théorème dit qu'il existe un point c intérieur en lequel la tangente à $\mathcal{C}_f$ est parallèle à la droite (AB) où $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$.
- Moralement, si on a des informations sur f' , alors on en a aussi sur f grâce à l'égalité des accroissements finis.
- Il est facile de constater que « TAF $\Rightarrow$ Rolle ».

Or, dans la preuve du TAF, on utilise Rolle, donc « Rolle $\Rightarrow$ TAF ».

Les deux énoncés sont donc logiquement équivalents, mais n'ont pas la même portée (pas le même impact psychologique). Donc apprendre les deux énoncés est une bonne chose.



20

Proposition. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

On suppose que $\begin{cases} I \text{ est un intervalle} \\ f \text{ est continue sur } I \\ f \text{ est dérivable sur } \overset{\circ}{I}. \end{cases}$ Alors : $f \text{ croissante sur } I \iff f' \text{ positive sur } \overset{\circ}{I}$

- **Autre énoncé.** Cette proposition est très générale car les hypothèses sont « faibles » : on demande « seulement » la dérivabilité sur l'intérieur.

Il est bon d'apprendre aussi la forme simplifiée suivante, très utile dans la pratique :

On suppose que $\begin{cases} I \text{ est un intervalle} \\ f \text{ est dérivable sur } I \end{cases}$ Alors : $f \text{ croissante sur } I \iff f' \text{ positive sur } I$

- **Exemple.** La fonction $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante. Quel résultat utilisez-vous ?

$$x \mapsto \sqrt{x}$$
- **Remarque.** Une fonction continue peut très bien être croissante sans être (partout) dérivable.
- **Attention.** Le résultat du théorème précédent est faux si l'on ne se place pas sur un *intervalle*.
 Par exemple, considérons la fonction $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ qui est dérivable de dérivée $f' : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ positive.

$$x \mapsto \frac{-1}{x}$$

 Pourtant f n'est pas croissante, puisque $f(-1) > f(1)$.

21

Proposition. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

On suppose que $\begin{cases} I \text{ est un intervalle} \\ f \text{ est continue sur } I \\ f \text{ est dérivable sur } \overset{\circ}{I}. \end{cases}$ Alors : $f \text{ décroissante sur } I \iff f' \text{ négative sur } \overset{\circ}{I}$

22

Proposition. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

On suppose que $\begin{cases} I \text{ est un intervalle} \\ f \text{ est continue sur } I \\ f \text{ est dérivable sur } \overset{\circ}{I}. \end{cases}$ Alors : $f \text{ constante sur } I \iff f' \text{ nulle sur } \overset{\circ}{I}$

23

sol $\rightarrow$ 21

Question.

1. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables vérifiant

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = \alpha$$

2. En déduire les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$$



Stricte monotonie

24

Proposition. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

On suppose que $\begin{cases} I \text{ est un intervalle} \\ f \text{ est continue sur } I \\ f \text{ est dérivable sur } \dot{I}. \end{cases}$

Alors :

$$f \text{ est strictement croissante} \iff \begin{cases} f' \text{ est positive sur } \dot{I} \\ \text{Il n'existe aucun couple } (a, b) \in I^2 \text{ vérifiant } a < b, \\ \text{tel que la restriction } (f')|_{]a,b[} \text{ soit la fonction nulle.} \end{cases}$$

- Dans la pratique, pour démontrer qu'une fonction dérivable est strictement monotone sur un intervalle, on pensera à regarder si sa dérivée est de signe strict et ne s'annule qu'en un nombre *fini* de points.

Autrement dit, il est bon d'avoir en tête la condition suffisante suivante

$$\begin{cases} f' \text{ est positive sur } \dot{I} \\ f' \text{ ne s'annule qu'en un nombre fini de points} \end{cases} \implies f \text{ est strictement croissante}$$

25

sol → 22

Question. Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x} - \ln(1+x)$.

26

Question. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \cos(x) - x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Inégalité des accroissements finis

27

Proposition. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\text{Si } \begin{cases} I \text{ est un intervalle} \\ f \text{ est continue sur } I \\ f \text{ est dérivable sur } \dot{I} \\ |f'| \text{ est majorée, disons par } K \end{cases} \quad \text{alors} \quad \forall x, x' \in I, \quad |f(x) - f(x')| \leq K|x - x'|$$

On dit alors que f est K -lipschitzienne.

- Il y a une réciproque à ce théorème :

Si f est K -lipschitzienne, alors la fonction $|f'|$ est majorée par K .

En effet, soit $a \in I$ un point en lequel f est dérivable.

Comme f est K -lipschitzienne, pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, on a $\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| \leq K$.

En faisant tendre x vers a dans cette inégalité, on obtient $|f'(a)| \leq K$.

- **Version double inégalité.** L'inégalité des accroissements finis écrite avec des valeurs absolues peut encore s'écrire :

$$-M|x - x'| \leq f(x) - f(x') \leq M|x - x'|.$$

On peut obtenir un encadrement plus précis si la majoration sur f' est donnée par une double inégalité plutôt qu'avec une seule inégalité et une valeur absolue.



Plus précisément,

$$\text{Si } \begin{cases} I \text{ est un intervalle} \\ f \text{ est continue sur } I \\ f \text{ est dérivable sur } \overset{\circ}{I} \\ \forall t \in \overset{\circ}{I}, m \leq f'(t) \leq M \end{cases} \quad \text{alors} \quad \forall a < b \in I, \quad m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

28 Question. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \cos(\sqrt{n})$ vérifie $u_{n+1} - u_n \rightarrow 0$, et que « pourtant », (u_n) n'a pas de limite.

Il est fréquent en Analyse d'avoir à établir des inégalités. Parmi les techniques usuelles auxquelles on doit spontanément penser, citons :

- l'étude des variations de fonctions,
- le théorème ou l'inégalité des accroissements finis.

29 Proposition (inégalités de convexité usuelles). On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| \leq |x| \quad \text{et} \quad \forall x \in]-1, +\infty[, \quad \ln(1+x) \leq x$$

Application aux suites $u_{n+1} = f(u_n)$

On s'intéresse ici aux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ où $f : I \rightarrow I$ est une fonction.

On notera bien l'hypothèse de stabilité, à savoir $f(I) \subset I$.

On a déjà démontré

$$\begin{cases} (u_n) \text{ converge vers } \ell \\ f \text{ continue en } \ell \in I \end{cases} \implies f(\ell) = \ell$$

La difficulté est alors de démontrer que la suite converge effectivement.

La proposition suivante permet de conclure dans certains cas.

30 Proposition. Soit $f : I \rightarrow I$ une fonction dérivable.

On suppose que $\begin{cases} f \text{ admet un point fixe } c \in I \\ \text{il existe } K \in [0, 1[\text{ tel que } \forall t \in I, |f'(t)| \leq K \end{cases}$

Alors toute suite u définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ converge vers c .

31 Question. Étudier la convergence de la suite définie par $\begin{cases} u_0 \in [0, 1] \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 - \frac{u_n^2}{4} \end{cases}$



Théorème de la limite de la dérivée

32

Proposition (quand la dérivée a une limite...)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\begin{cases} \text{continue sur } I \\ \text{dérivable sur } I \setminus \{a\} \end{cases}$

— Si $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

— Si $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \pm\infty$, alors $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow{x \rightarrow a} \pm\infty$.

33

Théorème de la limite (finie) de la dérivée.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\text{Si } \begin{cases} f \text{ est continue sur } I \\ f \text{ est dérivable sur } I \setminus \{a\} \\ f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{alors } \begin{cases} f \text{ est dérivable en } a \text{ et } f'(a) = \ell \\ f' \text{ est continue en } a \end{cases}$$

- Pour déterminer si une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, *a priori* continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$, est effectivement dérivable en a , on peut :

- ★ soit étudier le taux d'accroissement en a
- ★ soit utiliser le théorème de la limite de la dérivée, sans oublier de prouver la continuité de f en a . Cette méthode n'a d'intérêt que si la dérivée est plus simple à étudier que le taux d'accroissement.

- **Exemple.** Montrons que la fonction $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en 0.

$$x \mapsto \text{Arcsin}(1 - x^4)$$

— La fonction f est évidemment continue sur $[-1, 1]$.

— La fonction f est dérivable sur $] -1, 1[\setminus \{0\}$, par composition et on a $f' : x \mapsto \frac{-4x^3}{\sqrt{2x^4 - x^8}} = \frac{-4x}{\sqrt{2-x^4}}$.

— On a $f'(x) = \frac{-4x}{\sqrt{2-x^4}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

Ainsi, la fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

- **Autre exemple.** Montrons que la fonction $f : x \mapsto (1 - x^2) \text{Arcsin } x$, définie sur $[-1, 1]$ est dérivable en 1. Ici, il est plus simple de revenir à la définition en étudiant la limite du taux d'accroissement plutôt que d'utiliser le théorème de la limite de la dérivée.

On a :

$$\forall x \in [-1, 1] \setminus \{1\}, \quad \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -(1 + x) \text{Arcsin } x,$$

et donc :

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} -\pi.$$

Ainsi, f est dérivable en 1 et $f'(1) = -\pi$.



IV. Dérivées successives

34

Définition. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

On définit par récurrence les *dérivées successives de f* sous réserve d'existence en posant :

- $f^{(0)} = f$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $f^{(n)}$ est dérivable, $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f^{(n)}$, si elle existe, est appelée *dérivée n -ième de f* ou *dérivée de f d'ordre n* .

- Par convention, toute fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est 0 fois dérivable et $f^{(0)} = f$.

35

Proposition (à ne pas apprendre). Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ n -fois dérivable.

Si $\varphi^{(n)}$ est la fonction nulle, alors φ est une fonction polynomiale de degré $\leq n - 1$.

Classe $\mathcal{C}^1$

36

Définition.

On dit qu'une fonction est de *classe $\mathcal{C}^1$* lorsqu'elle est dérivable et que sa dérivée est continue.

- On note $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs réelles.
- Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est encore dite « continûment dérivable ».
- Toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est bien sûr dérivable. La réciproque est fausse.
- **Revoilà le théorème de la limite de la dérivée.**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\text{Si } \begin{cases} f \text{ est continue sur } I \\ f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \setminus \{a\} \\ f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{alors } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \text{ tout entier et } f'(a) = \ell$$

37

L'exemple de Baptiste. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

38

Question. Soit $\alpha > 0$. Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} x^\alpha & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Cette fonction f est continue (WHY?).

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et déterminer sa dérivée.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $\alpha \geq 1$.

39

Proposition. Soit a et b deux réels, avec $a < b$, et $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$. Alors :

- la dérivée f' est bornée
- en notant $K = \max_{t \in [a, b]} |f'(t)|$, la fonction f est K -lipschitzienne.



40

Définition (classe $\mathcal{C}^k$). Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

— Soit $k \in \mathbb{N}$.

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ lorsqu'elle est k fois dérivable et que sa fonction dérivée $k^{\text{ème}}$ est continue.

— On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ lorsqu'elle est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- On note $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs réelles.
- En particulier $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continues sur I .
- On désigne par $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I .
- On dispose ainsi de la chaîne (infinie) d'inclusions :

$$\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \supset \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \supset \dots \supset \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}).$$

- **Remarque importante.** Pour démontrer qu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, il suffit de vérifier que la fonction $f^{(n)}$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Souvent, on pourra procéder par récurrence en montrant qu'elle est n -fois dérivable pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans l'hérédité, pour montrer qu'une certaine fonction f est $(n+1)$ -fois dérivable, on pourra essayer de montrer que

$$\begin{array}{ll} \text{— } f \text{ est dérivable} & \text{ou bien} \quad \text{— } f \text{ est } n \text{ fois dérivable} \\ \text{— } f' \text{ est } n \text{ fois dérivable} & \text{— } f^{(n)} \text{ est dérivable} \end{array}$$

41

Proposition (fonctions usuelles).

— Soit $m \in \mathbb{N}$ et $f : x \mapsto x^m$.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\forall r \in \mathbb{N}$, $f^{(r)} : x \mapsto \begin{cases} m(m-1)\cdots(m-r+1)x^{m-r} & \text{si } r \leq m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

— La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} : x \mapsto \dots$

— La fonction logarithme est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln^{(n)} : x \mapsto \dots$

— La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

— Les fonctions sin et cos sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sin^{(n)} : x \mapsto \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \cos^{(n)} : x \mapsto \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$



42 **Proposition.** Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Soit $f, g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Alors la fonction $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}.$$

- Comme une combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et que la fonction nulle est bien sûr de classe $\mathcal{C}^n$, on en déduit que $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^I$.
De plus, l'application $D^n : \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^I$ est une application linéaire.
$$f \mapsto f^{(n)}$$

43 **Formule de Leibniz.**

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Soit $f, g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$. Alors la fonction fg est de classe $\mathcal{C}^n$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

- **Exemple.** Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = x^2 e^x$.
Posons $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto e^x$, qui sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
En tant que produit de f et g , la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $g^{(k)} = g$.
De plus $f' : x \mapsto 2x$, $f'' : x \mapsto 2$ et $f^{(k)} = 0$ pour tout $k \geq 3$.
La formule de Leibniz donne donc, pour tout entier $n \geq 2$:

$$\varphi^{(n)} = f g^{(n)} + n f' g^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} f'' g^{(n-2)},$$

soit :

$$\varphi^{(n)} : x \mapsto (x^2 + 2nx + n(n-1)) e^x.$$

On vérifie que cette expression est encore valable lorsque $n \in \{0, 1\}$.

44 **Proposition.**

Soit I et J deux intervalles d'intérieur non vide et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^n(J, \mathbb{R})$ avec $f(I) \subset J$,
Alors $g \circ f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.

45 **Proposition.**

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ qui ne s'annule pas.
Alors $\frac{1}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^n$.

- Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Pour montrer qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^n$, on pourra d'abord penser à utiliser les « théorèmes généraux ».
Si ceux-ci ne s'appliquent pas directement, on pourra essayer de montrer que f est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \leq n$, par récurrence sur k (finie, si $n \in \mathbb{N}$),



46

Proposition (Bijection de classe $\mathcal{C}^n$).

Soit $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, ainsi que I et J deux intervalles d'intérieur non vide et $f : I \rightarrow J$ une bijection strictement monotone de classe $\mathcal{C}^n$.

Si la dérivée première de f ne s'annule pas, alors la bijection réciproque f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$.

- À noter, toujours lorsque $n \geq 1$, que la condition pour que f^{-1} soit de classe $\mathcal{C}^n$ ne porte que sur la dérivée première, à savoir que la fonction f' ne s'annule pas.
- On ne dispose pas de formule « simple » pour calculer la dérivée n^e d'une bijection réciproque.
- Il y a même une équivalence dans le théorème précédent. Si f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$, alors f^{-1} est dérivable, et f' ne peut pas s'annuler.

Fonctions usuelles

On peut retenir que les fonctions usuelles sont toutes de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le domaine de définition de leur dérivée, à l'exception des fonctions $x \mapsto x^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ (cf. exercice de TD).

47

Question à l'oral.

- La fonction tangente est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition (WHY?).
- Les fonctions ch et sh sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (WHY?).
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto x^\alpha$ définie sur $]0, +\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (WHY?).
- La fonction Arctan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (WHY?).
- Les fonctions Arcsin et Arccos restreintes à $] -1, 1[$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Un exemple plus difficile

48

Une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie par morceaux.

Considérons la fonction suivante :

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Pour cela, prouvons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{H}_n$ suivante :

$$\text{« } f \text{ est } n\text{-fois dérivable et il existe } P_n \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(\frac{-1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ »}$$



V. Extension aux fonctions à valeurs complexes

Définition

Ce qui ne change pas : l'aspect opératoire

Ce qui change : les accroissements finis



Dérivation

preuve et éléments de correction

1) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

— La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, par opération.

Et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \times \left(\frac{-1}{x^2}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

— En 0, examinons le taux d'accroissement.

On a

$$\forall x \neq 0, \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

C'est le produit d'une quantité qui tend vers 0 et d'une quantité bornée, donc

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

BILAN : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2) Soit $f: x \mapsto |x| \sin x$ définie sur $\mathbb{R}$.

— La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, par opération.

Et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \begin{cases} \sin x + x \cos x & \text{si } x > 0 \\ -(\sin x + x \cos x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

— En 0, examinons le taux d'accroissement.

On a

$$\forall x \neq 0, \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x| \sin x}{x} = \pm \sin x$$

Comme $\sin x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

BILAN : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \sin x + x \cos x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -(\sin x + x \cos x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



1. Raisonnons par Analyse-Synthèse.

Analyse. Supposons qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable vérifiant la condition :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = \alpha$$

Posons $g : t \mapsto f(t) - \alpha t$. Cette fonction g est dérivable de dérivée nulle (par hypothèse faite sur f).

Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, on en déduit que g est constante.

Donc il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = \beta$, autrement dit tel que $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \alpha t + \beta$.

Bilan : si f existe, alors f est de la forme $t \mapsto \alpha t + \beta$.

Synthèse. Vérifions qu'une fonction de la forme $t \mapsto \alpha t + \beta$ est dérivable et vérifie la condition annoncée.

Qu'une fonction de ce type soit dérivable est évident, car c'est une fonction polynomiale (même affine!).

Et qu'elle vérifie bien la condition annoncée est également évident!

BILAN : les fonctions cherchées sont les fonctions affines.

2. Raisonnons par Analyse-Synthèse.

Analyse. Supposons qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable vérifiant la condition :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Soit $y \in \mathbb{R}$. En dérivant par rapport à la variable x (licite car f est dérivable), on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x+y) = f'(x)$$

On a donc obtenu

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f'(x+y) = f'(x)$$

En particulier, pour $x = 0$, on a

$$\forall y \in \mathbb{R}, f'(y) = f'(0)$$

Donc f' est constante.

Ainsi, d'après la question précédente, f est de la forme $x \mapsto \alpha x + \beta$.

En injectant cette information dans l'égalité "initiale", on a

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \alpha(x+y) + \beta = \alpha x + \beta + \alpha y + \beta$$

En prenant, $x = y = 0$, on a $\beta = 2\beta$, d'où $\beta = 0$.

Bilan : si f existe, alors f est de la forme $x \mapsto \alpha x$.

Synthèse. On vérifie facilement qu'une fonction du type $x \mapsto \alpha x$ est solution du problème (dérivable et vérifiant la condition annoncée).

BILAN : les fonctions cherchées sont les fonctions linéaires, c'est-à-dire du type $x \mapsto \alpha x$.

25

La fonction f est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

Elle est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a :

$$f' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{1+x} = \frac{(1-\sqrt{x})^2}{2(1+x)\sqrt{x}}.$$

L'étude du signe de f' est facile. D'où le tableau :

t	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$ <td></td> <td>+</td> <td>0</td> <td>+</td>		+	0	+
f				

