Dérivation

exercices

17exo-Derivation.pdf, 7 mars 2023, 16:17

Généralités

101 Autour de la définition

Les questions sont indépendantes.

1. Soit f une fonction dérivable en un point a. Montrer que
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = f'(a)$$
Réciproquement, si la limite précédente existe, peut-on dire que f est dérivable en a ?
2. Soit f une fonction dérivable en un point a. Étudier
$$\lim_{x\to a} \frac{xf(a)-af(x)}{x-a}$$
3. Soit $a\in\mathbb{R}$. Déterminer
$$\lim_{x\to a} \frac{\sin(x^2)-\sin(ax)}{x-a}$$
On pourra faire apparaître une différence de deux taux d'accroissement en introduisant $\sin a^2$

102 Raccordement

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable vérifiant $f(0)=f(1)$ avec f' continue en 0 et en 1.
On définit g sur $[0,1]$ par
$$g(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ f(2x-1) & \text{si } \frac{1}{2} < x \leqslant 1 \end{cases}$$
La fonction g est-elle continue ? dérivable ?
Si non, quelle(s) hypothèse(s) faut-il ajouter pour que ce soit le cas ?

103 Une fonction (0)

Soit $f : \begin{array}{rcl} [-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2+x^3} \end{array}$

Étudier la dérivabilité de f (éventuellement à droite et à gauche lorsque cela coince).
Étudier les variations de f et tracer l'allure du graphe.

104 Une fonction (1)

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto \begin{cases} x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ x^2\ln x & \text{si } x>0 \end{cases}$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Déterminer ses variations.
Montrer qu'il existe une asymptote oblique en $-\infty$.
Tracer le graphe.

105 Une fonction (2)

Soit
$$f : \begin{array}{rcl} I =]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x}{\ln|x|}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que f est continue sur I.
2. Montrer que f est dérivable sur I et déterminer f'.
3. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ?

106 **Une fonction (3)**

Soit $f: \begin{array}{ccl} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \\ 0 & \text{si } x=1 \\ \exp\left(\dfrac{1}{\ln x}\right) & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$

1. La fonction f est-elle continue en 0 ? Est-elle dérivable en 0 ?
2. La fonction f est-elle continue (gauche/droite) en 1 ?
3. La fonction f est-elle dérivable (gauche/droite) en 1 ?
4. Étudier les variations, limites de f.
5. Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$ en précisant les asymptotes, tangentes, demi-tangentes.

107 **Une fonction (4)**

Soit $f: \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{-\operatorname{sh}\left(\frac{1}{|x|}\right)} \end{array}$

Montrer que f peut être prolongée par continuité en une fonction $\tilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ dont on étudiera la dérivabilité puis le caractère $\mathcal{C}^1$.

108 **Une fonction (5)**

Soit $f: \begin{array}{ccl} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} & \text{si } x>0 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases} \end{array}$

Étudier la dérivabilité de f en 0, ainsi que le caractère $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$.

109 **Une fonction (6)**

Soit $f: \begin{array}{ccl} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (1-x^2)\operatorname{Arcsin} x \end{array}$. Quelle est la régularité de f sur $]-1,1[$?

Montrer que f est dérivable sur $[-1,1]$ et déterminer sa dérivée.

La fonction f est-elle deux fois dérivable sur $[-1,1]$?

110 **Régularité d'une famille de fonctions**

Étudier, en fonction de $\alpha \in]0,+\infty[$, la régularité de $x \mapsto \sqrt{x(1-x)^\alpha}$.

Réciproque

111 **À l'oral**

Soit $f : x \mapsto x^3 + x$.

Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Déterminer $(f^{-1})'(2)$.

112 **La fonction tangente hyperbolique**

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f est dérivable et que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1 - \big(f(x)\big)^2$.
2. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.
3. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]-1,1[$ et déterminer l'expression de sa dérivée.

Rolle et les polynômes

113 Rolle itéré

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit G_n le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $G_n = (X^2-1)^n$

On définit le polynôme P_n comme étant le polynôme dérivé n-ème de G_n c'est-à-dire $P_n = G_n^{(n)}$.

On considère la propriété $\diamondsuit$:

le polynôme P_n possède n racines réelles distinctes dans $]-1, 1[$.

1. Est-ce que la propriété $\diamondsuit$ est vraie pour $n = 0$? pour $n = 1$? $n = 2$?
2. Désormais, on fixe $n \geqslant 1$.
   Montrer que
   $$\forall\, p \in [\![0, n-1]\!], \qquad G_n^{(p)}(-1) = 0 \quad \text{et} \quad G_n^{(p)}(1) = 0$$
3. Montrer que la propriété $\diamondsuit$ est vraie. On pourra montrer que pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, $G_n^{(p)}$ *possède p racines réelles distinctes dans* $]-1, 1[$.

114 Racines simples

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ possédant n racines réelles distinctes.

Montrer que les racines du polynôme $P^2 + 1$ dans $\mathbb{C}$ sont toutes simples.

115 La rollerie simple !

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, que l'on suppose de degré $\geqslant 1$.

Montrer que P' est scindé à racines simples.

On rappelle qu'un polynôme non nul est scindé sur $\mathbb{K}$ lorsque
$\begin{cases} \text{il est constant } \textit{non nul} \quad \text{(c'est-à-dire de degré 0 exactement)} \\ \text{ou bien} \\ \text{il s'écrit comme produit de polynômes de degré 1} \end{cases}$

116 La rollerie ultime

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$, que l'on suppose de degré $\geqslant 1$.

Montrer que P' est scindé.

117 Exotique

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples.

Montrer que P ne peut avoir deux coefficients consécutifs nuls.

Que se passe-t-il pour les deux premiers coefficients ? Essayer de se ramener à ce cas en dérivant et en utilisant l'exercice 115.

118 Rolle itéré et révisions sur les Polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit F_n le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par
$$F_n = \frac{1}{2^n n!}(X^2-1)^n$$

On définit le polynôme P_n comme étant le polynôme dérivé n-ème de F_n, c'est-à-dire $P_n = F_n^{(n)}$.

1. Montrer que
   $$\forall\, p \in [\![0, n-1]\!], \quad F_n^{(p)}(1) = 0 \qquad \text{et} \qquad F_n^{(p)}(-1) = 0$$
   Puis montrer que P_n possède n racines réelles distinctes dans l'intervalle $]-1, 1[$.

Ce qui suit n'a rien à voir avec ce qui précède.

C'est juste histoire de réviser le chapitre Polynômes.

On définit
$$\forall\, k \in [\![0, n]\!], \quad B_{n,k} = (X+1)^k (X-1)^{n-k}$$

2. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.
3. Montrer que
   $$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^n} \binom{n}{k}^2 B_{n,k}$$
4. En déduire $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.
   Et montrer que $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$.
5. Montrer que
   $$\forall\, p \in [\![0, n-1]\!], \quad F_n^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} \frac{p!}{2^n n!} \binom{n}{k} \binom{n}{p-k} B_{2n-p,n-k}$$

119 Dérivées successives de arctan

Considérons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^2+1} \end{array}$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (WHY ?).

1. Calculer f' et f''.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale g_n telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{g_n(x)}{(x^2+1)^{n+1}}$$

3. Montrer qu'une telle fonction polynomiale est unique.
4. Établir une relation de récurrence vérifiée par la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On considère désormais la suite de polynômes formels

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} \ = \ (X^2+1)P_n' \ - \ 2(n+1)XP_n \end{cases}$$

5. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \deg P_n = n$.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner le coefficient dominant c_n de P_n à l'aide de factorielles.
7. En faisant le lien entre P_n et la dérivée n-ème de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$, montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n admet n racines réelles distinctes.
   On pourra utiliser le théorème de Rolle généralisé.

120 Polynômes de Hermite

Considérons $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{-x^2} \end{array}$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (WHY ?).

1. Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes réels $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $g^{(n)} : x \mapsto H_n(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le degré, le terme dominant, et la parité de H_n.
3. Montrer $\forall\, n \in \mathbb{N},\ H_{n+1}' = -2(n+1)H_n$.
4. En déduire une expression de la suite $\left(g^{(n)}(0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

121 Encore Hermite ?

Considérons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \end{array}$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (WHY ?).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère

$$H_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (-1)^n \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} f^{(n)}(x) \end{array}$$

1. Calculer H_0, H_1, H_2 et H_3.
2. Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ H_{n+1}(x) = xH_n(x) - nH_{n-1}(x)$$

   en remarquant que c'est équivalent à montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ -f^{(n+1)}(x) = xf^{(n)}(x) - nf^{(n-1)}(x)$$

3. Montrer que H_n est une fonction polynomiale.
   Déterminer le degré, le coefficient dominant et la parité du polynôme H_n associé.
4. Déterminer une expression de $f^{(n)}$.

Rolle et Accroissements finis

122 Une inégalité très classique

1. À l'aide de l'égalité des accroissements finis, montrer que

$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln x \leqslant \frac{1}{x}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. À l'aide de la question précédente, déterminer un équivalent de H_n.
3. Même question avec $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

123 Sinus & Tangente

Illustrer et montrer les inégalités suivantes

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin x| \leqslant |x| \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ |\tan x| \geqslant |x|$$

124 Rolle itéré

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On suppose que f s'annule en $(n+1)$ points distincts de $[a,b]$.
   Démontrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.
2. On suppose que $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = f(b) = 0$.
   Démontrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

125 Encore $f'(c) = 0$

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b]$, et telle que $f(a) = 0$ et $f(b)f'(b) < 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

126 Exo de khôlle (1)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer qu'il existe n réels $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 1$ tels que $\sum_{k=1}^{n} f'(x_k) = n$.

Commencer par le cas $n = 1$, puis tenter $n = 2$.

127 Exo de khôlle (2)

Soit P un polynôme. Montrer que l'équation $P(x) = e^x$ n'admet qu'un nombre fini de solutions.

128 Avec la dérivée seconde

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$ telle que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$.
Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = f''(c)$.
On pourra introduire une fonction auxiliaire dépendant de f, f' et exp.

129 Pas de nom !

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \ell$.

Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$.
Commencer par traiter le cas $\ell = 0$ avec la définition epsilonesque.

130 Expression sommatoire de e^a

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $g_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ définie sur $[0,1]$.

1. En appliquant judicieusement l'inégalité des accroissements finis à g_n, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left| \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - 1 \right| \leqslant \frac{1}{n!}$$
2. En déduire l'existence et la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Considérer $g_n : t \mapsto \exp(-at) \sum_{k=0}^{n} \frac{(at)^k}{k!}$ définie sur $[0,1]$, pour déterminer la somme infinie :
$$1 + a + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{4!}a^4 + \cdots + \frac{1}{n!}a^n + \cdots + \ = ???$$

131 Vers Taylor-Lagrange

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et K une constante quelconque.
On suppose que

— f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$
— $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a,b[$

Montrer que la fonction $\varphi : x \longmapsto f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k - K\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$ vérifie les hypothèses du théorème des accroissements finis, puis calculer la dérivée de φ.

132 Égalité de Taylor-Lagrange

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.
On suppose que

— f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$
— $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a,b[$

Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\quad f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$

133 Avec TL (1)

Soit f une fonction de $\mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$. On pose $m = \frac{a+b}{2}$.
En appliquant l'égalité de Taylor-Lagrange sur $[a,m]$ et $[m,b]$, montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que
$$\frac{f(a)+f(b)}{2} = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(c)$$

134 Avec TL (2)

Soit f une fonction de $\mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$ telle que $f'(a) = f'(b) = 0$. On pose $c = \frac{a+b}{2}$.
Justifier l'existence de $M = \sup\limits_{[a,b]} |f''|$. En utilisant l'égalité de Taylor-Lagrange sur $[a,c]$ et $[c,b]$, montrer que
$$|f(b) - f(a)| \leqslant \frac{(b-a)^2}{4} M$$

135 Inégalité des accroissements finis dans le cas complexe

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
On suppose qu'il existe $K \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in]a,b[, |f'(x)| \leqslant K$.

1. Montrer que si $f(a)$ et $f(b)$ sont réels alors $|f(b) - f(a)| \leqslant K(b-a)$.
2. Montrer cette inégalité dans le cas général.
Considérer la fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}(f(x) - f(a))$ où θ est un argument de $f(b) - f(a)$.

Attention

136 Fonction bizarre

Soit

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2\left(2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f'.
Montrer que f admet un minimum global en 0.
Montrer que f n'est monotone sur aucun intervalle du type $[0, \delta]$ avec $\delta > 0$. Penser à étudier le signe de f'.

137 Trouver un contre exemple

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable en 0 avec $f'(0) > 0$.
Alors il n'est pas vrai qu'il existe $\delta > 0$ tel que f soit croissante sur $[-\delta, \delta]$.
Trouver une fonction qui illustre cela. On pourra s'aider de $x \mapsto x^2 \sin(\frac{1}{x})$ et de $x \mapsto ax + b$.

Calcul de dérivées

138 La routine

Déterminer les domaines de dérivabilité puis calculer les dérivées des fonctions suivantes et simplifier les expressions afin de pouvoir lire facilement le signe de la fonction dérivée :

$a : x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{x}}}$

$b : x \mapsto \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

$c : x \mapsto \ln(\sqrt{2\sin x+1}+\sqrt{2\sin x-1})$

$d : x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{\ln x}{3}\right)$

$e : x \mapsto \mathrm{e}^x \operatorname{Arctan}(\mathrm{e}^x) - \ln\left(\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}\right)$

$f : x \mapsto \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \ln\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)$

$g : x \mapsto \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2x^2}{1+x^4}\right)$

$h : x \mapsto x^{x^2}$

$i : x \mapsto \frac{\operatorname{Arctan} x}{x} - \ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$j : x \mapsto \sqrt{x}\operatorname{Arcsin}(\sqrt{x}) + \sqrt{1-x}$

139 Des calculs techniques

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto x^n \ln x$, qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (WHY ?).

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide de la formule de Leibniz, montrer que

$$f_n^{(n)} : x \longmapsto n!\Big(\ln x + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\Big)$$

2. Montrer par récurrence que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n^{(n)} : x \longmapsto n!\Big(\ln x + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\Big)$$

3. En déduire que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

140 Un $n^{\text{ème}}$ calcul !

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \mathrm{e}^{x\sqrt{3}} \sin x$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} : x \mapsto 2^n \mathrm{e}^{x\sqrt{3}} \sin\left(x + \frac{n\pi}{6}\right)$.
2. Retrouver ce résultat à l'aide de l'exponentielle complexe.

Autres exos

141 Une suite récurrente

Étudier la suite récurrence définie par $u_0 \in]0,1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{u_n + 2}$.

142 Formel...

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell > 0$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

143 Encore la fonction nulle

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(a) = 0$ et $\forall x \in [a,b],\ f'(x)f(x) \leqslant \frac{1}{2}\big(f(x)\big)^2$.
Montrer que f est la fonction nulle.

144 Dérivabilité de la valeur absolue d'une fonction

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq 0$. Démontrer que $|f|$ est dérivable en x.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$.
   (a) Démontrer que si $f'(x) = 0$, alors $|f|$ est dérivable en x.
   (b) Démontrer que si $f'(x) \neq 0$, alors $|f|$ n'est pas dérivable en x.
3. Énoncer le théorème démontré.

145 Dérivées dans le même sens

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable.
On suppose que $f(a) = f(b) = 0$ et que $f'(a) > 0, f'(b) > 0$.
Démontrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.

146 Presque déjà vu en cours

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \exp\left(\dfrac{-1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale P_n telle que $f^{(n)} : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)\exp\left(\dfrac{-1}{x}\right) \end{array}$
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Les théorèmes à croiser une fois dans sa vie

147 Règle de l'Hospital

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$.

1. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a))$.
2. En déduire que si $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \ell$ (cela s'appelle la règle de l'Hopital)
3. Application : déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - e^x}{(x+1)e^x - 1}$

148 Le théorème de Rolle généralisé

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$ et telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ existe et vaut $f(a)$.

En considérant $g : t \mapsto \begin{cases} f(\tan t) & \text{si } t \neq \frac{\pi}{2} \\ \lim\limits_{+\infty} f & \text{si } t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ qui est définie sur ... montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Commentaires : il s'agit d'une généralisation du théorème de Rolle, car c'est comme si on avait $b = +\infty$ dans le théorème de Rolle. En effet, l'hypothèse $f(a) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ peut se traduire abusivement par $f(a) = f(+\infty)$.
L'idée est de se ramener à un segment. Comment « transformer l'infini en un réel » ?

149 Accroissements finis généralisés et application

1. Soit f, g deux fonctions continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$.
   Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$, tel que
   $$\Big(g(b) - g(a)\Big) f'(c) = \Big(f(b) - f(a)\Big) g'(c)$$
2. Soit φ dérivable sur $\mathbb{R}$.
   On suppose que $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(\varphi(x) + \varphi'(x)\big) = 0$.
   On veut montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi'(x) = 0$.
   - (2a) Appliquer la question précédente à $f : x \mapsto e^x$ et $g : x \mapsto e^x \varphi(x)$.
     En déduire que
     $$\forall a < b, \ \exists c \in]a, b[, \ |\varphi(b)| \leqslant |\varphi(c) + \varphi'(c)| + |\varphi(a)| e^{a-b}$$
   - (2b) Fixons $\varepsilon > 0$. Montrer l'assertion :
     $$\exists A, \ \forall x \geqslant A, \quad |\varphi(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + |\varphi(A)| e^{A-x}$$
     En déduire $\quad \exists B, \ \forall x \geqslant B, \quad |\varphi(x)| \leqslant \varepsilon$
   - (2c) Conclure.

150 Théorème de Darboux

Le théorème de Darboux stipule qu'une fonction dérivée vérifie la propriété des valeurs intermédiaires (bien que cette fonction ne soit pas nécessairement continue !).
Nous allons démontrer ce théorème.

1. Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable tel que $g'(a) < 0$ et $g'(b) > 0$.
   Montrer qu'il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $g'(x_0) = 0$.

   Montrer qu'il existe $x_1, x_2 \in]a, b[$ tels que $g(x_1) < g(a)$ et $g(x_2) < g(b)$.
2. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable.
   Soit y une valeur intermédiaire entre $f'(a)$ et $f'(b)$.
   Montrer qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $y = f'(x_0)$.

   On pourra introduire une fonction judicieuse et lui appliquer la question précédente.

151 La fonction nulle

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que f admette une limite finie ℓ en $+\infty$.
   Montrer qu'il existe une suite (c_n) tendant vers $+\infty$ telle que $f'(c_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   Utiliser le TAF sur des intervalles bien choisis de sorte à assurer la limite de (c_n).

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f^2 + (1+f')^2 \leqslant 1$.
   Montrer que f est identiquement nulle.

   Montrer que f est monotone, et étudier les limites en $\pm\infty$.

152 Limites de f et f' en $+\infty$

1. Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable.
   On suppose que les limites en $+\infty$ de f et f' existent et valent ℓ et ℓ'.
   Montrer que $\ell' = 0$.
2. Soit $g : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable.
   Vrai ou faux ?
   — Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x) = 0$, alors g possède-t-elle nécessairement une limite en $+\infty$?
   — Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ existe, alors g' possède-t-elle nécessairement une limite en $+\infty$?

153

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $\forall\, x \in [0, +\infty[,\ 0 < f(x) \leqslant f'(x)$.
La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$? Si oui, laquelle ?

154

Soit f une fonction dérivable sur $[0, +\infty[$ telle que $f'(0) \leqslant 0$ et

$$\forall x \in [0, +\infty\,[, \quad f(x) + f'(x) \geqslant 0$$

Démontrer que f a un signe constant.

155

On suppose que f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I avec

$$\forall x \in I, f(x)f''(x) = 0$$

Démontrer que f est une fonction affine.

Dérivation

corrigés

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto \begin{cases} x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ x^2\ln x & \text{si } x>0 \end{cases}$

Etude générale

- Sur $\mathbb{R}^*$, f est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ et la dérivée première est définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f' : x \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\left(1-\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x<0 \\ x(2\ln x+1) & \text{si } x>0 \end{cases}$$

- Continuité en 0 ?

$$f \text{ est continue en } 0 \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{0^-} f = 0 & \text{par produit de deux limites (qui valent toutes deux 0)} \\ \lim\limits_{0^+} f = 0 & \text{par croissances comparées} \\ f(0)=0 \end{cases}$$

- Dérivabilité en 0 ?
  Pour $x\neq 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} & \text{si } x<0 \\ x\ln x & \text{si } x>0 \end{cases}$ d'où $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \begin{cases} 0 & \text{si } a=0^- & \text{(c'est direct)} \\ 0 & \text{si } a=0^+ & \text{(par croissances comparées)} \end{cases}$

  Donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$.
- Pour le fun (?) : étude de la continuité de f' en 0

$$\forall\, x\neq 0,\quad f'(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\left(1-\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x<0 \\ x(2\ln x+1) & \text{si } x>0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to 0} f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } a=0^- & \text{(car } \lim\limits_{-\infty} te^t=0 \text{ par croiss. co} \\ 0 & \text{si } a=0^+ & \text{(par croissances comparées)} \end{cases}$$

  Comme $f'(0)=0$, la fonction f' est continue en 0.
  Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^1$ **sur $\mathbb{R}$**.

Variations

En étudiant le signe de f' et en utilisant le théorème qui relie le signe de la dérivée aux variations de la fonction (sur un intervalle), on obtient :

x	$-\infty$		0		$\mathrm{e}^{\frac{-1}{2}}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Justifiactions des limites aux bornes :
$\lim\limits_{-\infty} x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = -\infty$ (de manière directe, par produit) et $\lim\limits_{+\infty} x^2\ln x = +\infty$ (de manière directe, par produit)

Branches infinies

- En $-\infty$
  On a $\forall\, x<0$, $\dfrac{f(x)}{x} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 1$.
  On a $\forall\, x<0$, $f(x) - 1\times x = x(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1) = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$. Comme $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{t}=1$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x) = 1$.
  Donc $y=x+1$ est asymptote oblique à la courbe en $-\infty$.

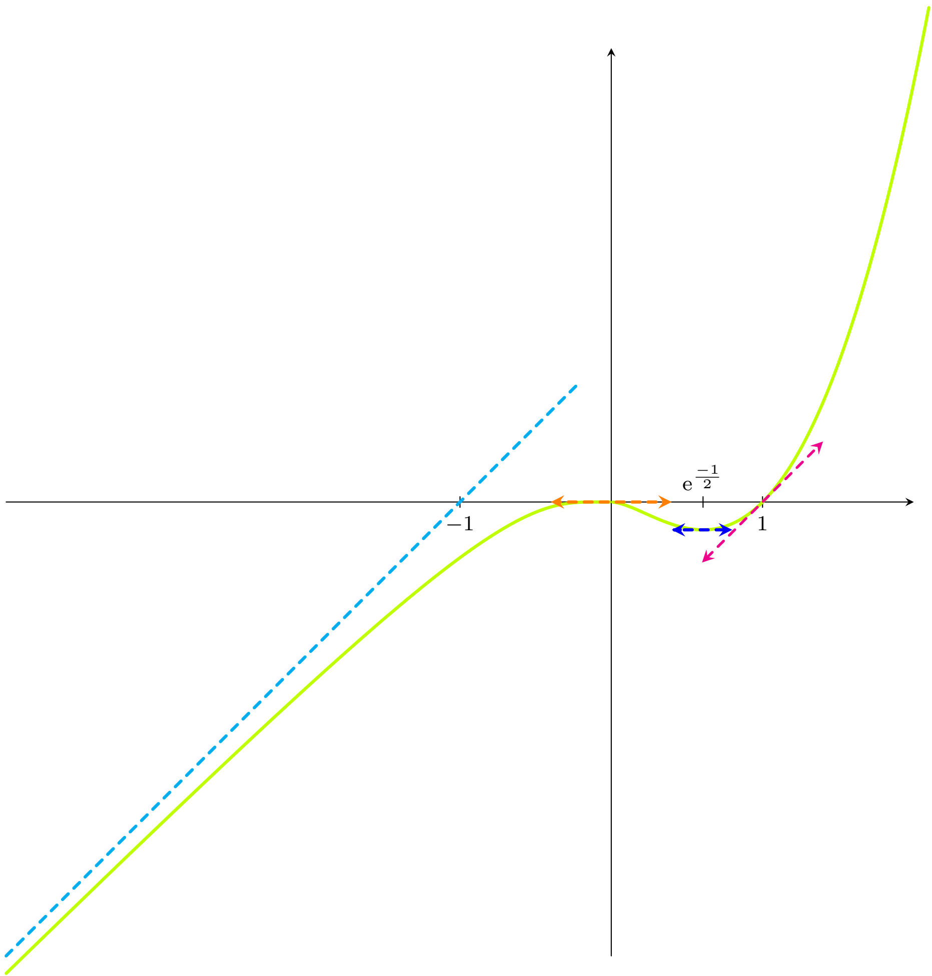
- En $+\infty$

  On a $\forall x > 0,\ \dfrac{f(x)}{x} = x\ln x$. D'où, par produit de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

  Donc $\mathcal{C}_f$ possède une branche parabolique de direction verticale.

L'allure du graphe

On trace les tangentes aux points d'abscisses 0, $\mathrm{e}^{\frac{-1}{2}}$ et 1 car on a $f'(0) = f'(\mathrm{e}^{\frac{-1}{2}}) = 0$ et $f'(1) = 1$ (donc les pentes sont simples).
On trace la droite $y = x + 1$, asymptote oblique en $-\infty$.



1. Montrer que f est continue sur I.
   - ▷ f est continue sur $I \setminus \{0\}$, par opérations.
   - ▷ Montrons que f est continue en 0. On a

   $$\forall\, x \in I^*, \quad \left| \frac{x}{\ln|x|} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leqslant \left| \frac{x}{\ln|x|} \right|$$

   Par opérations, on a $\lim\limits_{x\to 0} \left| \frac{x}{\ln|x|} \right| = 0$.

   Donc, d'après le théorème des Gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\ln|x|} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, qui vaut $f(0)$.

   Donc f est continue en 0.

2. Montrer que f est dérivable sur I.
   - ▷ f est dérivable sur I^* et on a (WHY ?)

   $$\forall\, x \in I^*, \quad f'(x) = \frac{\ln|x| - 1}{(\ln|x|)^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x\,\ln|x|} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

   - ▷ Étudions la dérivabilité en 0.

   $$\forall\, x \in I^*, \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{\ln|x|} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

   Prenons-en la limite quand $x \to 0$.

   On a le produit d'une fonction qui tend vers 0 par une fonction bornée.

   Ainsi

   $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

   Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

   Bilan. f est dérivable sur I et on a

   $$f' : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\ln|x| - 1}{(\ln|x|)^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{x\,\ln|x|} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

3. ⋆ f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ?

   On va montrer que f' n'est pas continue en 0.
   - ▷ La fonction f est classe $\mathcal{C}^1$ sur I^*.
   - ▷ f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. En effet, on va montrer que f' n'est pas continue en 0 en montrant que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ n'est pas finie (en fait, cette limite n'existe pas).

   • Le premier terme

   $$\frac{\ln|x| - 1}{(\ln|x|)^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

   est le produit d'une fonction qui tend vers 0 par une fonction bornée. Donc tend vers 0.

   • Examinons le deuxième terme $\frac{1}{x\,\ln|x|} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

   On va montrer que ce terme n'admet pas de limite finie. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\frac{1}{x\,\ln|x|} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \to \ell$.

   On a $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln|x| = 0^-$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} x\ln|x| = 0^+$. Bref $\lim\limits_{x\to 0} x\ln|x| = 0$.

   Donc

   $$\sin\left(\frac{1}{x}\right) = x\ln|x| \times \frac{1}{x\,\ln|x|} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \to \quad 0 \times \ell = 0$$

   Or, on sait bien que $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0. D'où la contradiction.

   • **Bilan.** $f'(x)$ est la somme d'un terme qui tend vers 0 et d'un terme qui n'a pas de limite, donc $f'(x)$ n'a pas de limite en 0.

On a facilement par composition $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
Notons encore f le prolongement par continuité de f en 0.

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \mathrm{e}^{-\operatorname{sh}\left(\frac{1}{|x|}\right)} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

• Étudions la dérivabilité en 0 de f.

Contrairement à ce que l'on pourrait penser, il n'y a pas besoin de distinguer 0^- et 0^+

On a

$$\forall x \neq 0, \quad \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\operatorname{sh}\left(\frac{1}{|x|}\right)} = \begin{cases} \frac{1}{|x|}\mathrm{e}^{-\operatorname{sh}\left(\frac{1}{|x|}\right)} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{1}{|x|}\mathrm{e}^{-\operatorname{sh}\left(\frac{1}{|x|}\right)} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On a $\begin{cases} \frac{1}{|x|} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty \\ t\mathrm{e}^{-\operatorname{sh} t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \end{cases}$ d'où, par composition, $\frac{1}{|x|}\mathrm{e}^{-\operatorname{sh}\left(\frac{1}{|x|}\right)} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

Justifions la deuxième limite.
On a

$$t\mathrm{e}^{-\operatorname{sh} t} = \frac{t}{\mathrm{e}^{\operatorname{sh} t}} = \underset{+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{\operatorname{sh} t}{\mathrm{e}^{\operatorname{sh} t}}\right)$$

On a aussi $\frac{y}{\mathrm{e}^y} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0$ *par croissances comparées, donc* (WHY ?) $\frac{\operatorname{sh} t}{\mathrm{e}^{\operatorname{sh} t}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.
Ces deux informations fournissent $t\mathrm{e}^{-\operatorname{sh} t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

On en déduit que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
Bilan : f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

• La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ par opérations et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \frac{|x|}{x^3}\operatorname{ch}\left(\frac{1}{|x|}\right)\mathrm{e}^{-\operatorname{sh}\left(\frac{1}{|x|}\right)}$$

En effet, sur $\mathbb{R}^*$, on a les calculs formels suivants :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|x| = \frac{|x|}{x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\operatorname{sh}\left(\frac{1}{|x|}\right)\right) = -\frac{\frac{|x|}{x}}{x^2}\operatorname{ch}\left(\frac{1}{|x|}\right)$$

• À ce stade, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{array}{rccl} f': & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{|x|}{x^3}\operatorname{ch}\left(\frac{1}{|x|}\right)\mathrm{e}^{-\operatorname{sh}\left(\frac{1}{|x|}\right)} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

• Montrons que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ par opérations.
Étudions la continuité en 0 de f' et pour cela examinons la limite de f' en 0.
Au signe près, $f'(x)$ vaut $\frac{1}{x^2}\operatorname{ch}\left(\frac{1}{|x|}\right)\mathrm{e}^{-\operatorname{sh}\left(\frac{1}{|x|}\right)}$.
Comme on a $\frac{1}{|x|} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$, il suffit de déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 \operatorname{ch} t\, \mathrm{e}^{-\operatorname{sh} t}$.
Comme $\operatorname{ch} t \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\mathrm{e}^t$, on a

$$t^2 \operatorname{ch} t\, \mathrm{e}^{-\operatorname{sh} t} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{-\operatorname{sh} t + t}$$

Or on a

$$\begin{cases} t^2\mathrm{e}^{-\operatorname{sh} t+t} = \frac{t^2}{\mathrm{e}^{\operatorname{sh} t - t}} = \underset{+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{\operatorname{sh} t - t}{\mathrm{e}^{\operatorname{sh} t - t}}\right) \\ \frac{\operatorname{sh} t - t}{\mathrm{e}^{\operatorname{sh} t - t}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \quad \text{par croissances comparées} \end{cases} \qquad \text{d'où } t^2\mathrm{e}^{-\operatorname{sh} t+t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

On déduit de tout cela que $t^2 \operatorname{ch} t\, \mathrm{e}^{-\operatorname{sh} t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.
Puis,

$$\frac{1}{x^2} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{|x|}\right) \mathrm{e}^{-\operatorname{sh}\left(\frac{1}{|x|}\right)} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Puis, $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Comme $f'(0) = 0$, on en déduit que f' est continue en 0.
BILAN : f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

• La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ par produit de telles fonctions.

• Montrons que f est dérivable en 1 et -1.
Comme f est impaire, il suffit de montrer qu'elle est dérivable 1 (elle sera alors automatiquement dérivable en -1, avec le même nombre dérivé qu'en 1).
On a :

$$\forall x \in [-1,1] \setminus \{1\}, \quad \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -(1+x)\,\mathrm{Arcsin}\, x,$$

et donc :

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} -\pi.$$

Ainsi, f est dérivable en 1 et $f'(1) = -\pi$.

Bilan. La fonction f est dérivable sur $[-1,1]$ et on a $f' : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} -2x\,\mathrm{Arcsin}\, x + \sqrt{1-x^2} & \text{si } x \in]-1,1[\\ -\pi & \text{si } x = \pm 1 \end{cases} \end{array}$

Re-bilan. On constate que la disjonction de cas peut être éliminée !
Ainsi, f est dérivable sur $[-1,1]$ et on a $f' : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -2x\,\mathrm{Arcsin}\, x + \sqrt{1-x^2} \end{array}$

Bonus. La fonction f est même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$.

• La fonction f est-elle deux fois dérivable sur $[-1,1]$.
Peut-on affirmer que $g = f'$ est dérivable sur $[-1,1]$ (sachant que $g : x \mapsto -2x\,\mathrm{Arcsin}\, x + \sqrt{1-x^2}$) ?

> **Commentaire.** La fonction Arcsin n'est pas dérivable en 1 et la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ n'est pas dérivable en 1. Mais pour l'instant, cela ne permet pas de dire que g n'est pas dérivable en 1.

La fonction f' est évidemment dérivable sur $]-1,1[$ (on avait déjà constaté que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle).
Et on a

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (f')'(x) \;=\; -2\,\mathrm{Arcsin}(x) - 3\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Cette fonction n'a pas de limite finie en 1 (idem en -1), plus précisément $(f')'(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} -\infty$.
En appliquant le théorème de limite de la dérivée (ou plutôt le premier résultat qui ne porte pas de nom) à la fonction f', on en déduit que la fonction f' n'est pas dérivable en 1 (idem en -1, par imparité de f').

Notons $f : x \mapsto \sqrt{x(1-x)^\alpha}$.

• Ensemble de définition.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence

$$\begin{aligned} \sqrt{x(1-x)^\alpha} \text{ existe} \quad &\iff \quad \begin{cases} 1-x>0 \\ x(1-x)^\alpha \geqslant 0 \end{cases} \\ &\iff \quad x \in [0,1[\end{aligned}$$

La fonction est donc définie sur $[0,1[$.

• Sur $[0,1[$**.**
On a : $\begin{cases} \text{la fonction } x \mapsto x(1-x)^\alpha \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]0,1[\text{ à valeurs dans }]0,+\infty[\\ \text{la fonction } t \mapsto \sqrt{t} \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]0,+\infty[\end{cases}$
Par composition, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1[$.

• En 0**.** Que se passe-t-il en 0 ?
On a : $\begin{cases} \text{la fonction } x \mapsto x(1-x)^\alpha \text{ est continue en } 0 \text{ et son image vaut } 0 \\ \text{la fonction } t \mapsto \sqrt{t} \text{ est continue en } 0 \end{cases}$
Par composition, la fonction f est continue en 0.

Étudions la dérivabilité en 0. On a

$$\forall\, x \neq 0, \quad \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{(1-x)^\alpha}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{(1-x)^\alpha}$$

Donc

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en 0.

Bilan. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1[$ et est continue en 0.

Remarque. La fonction f peut être prolongée par continuité en 1, ceci étant dû au fait que $\alpha > 0$, donc $(1-x)^\alpha \xrightarrow[x\to 1]{} 0$ (passer par la forme exponentielle pour s'en convaincre !).
On peut alors se poser la question de la régularité de ce prolongement $\widetilde{f} : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x<1 \\ 0 & \text{si } x=1 \end{cases} \end{array}$

Le taux d'accroissement en 1 vaut

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\frac{\sqrt{x}\sqrt{(1-x)^\alpha}}{1-x} \underset{x\to 1}{\sim} -\sqrt{(1-x)^{\alpha-2}} \xrightarrow[x\to 1]{} \begin{cases} -1 & \text{si } \alpha = 2 \\ 0 & \text{si } \alpha > 2 \\ -\infty & \text{si } \alpha < 2 \end{cases}$$

1. Le polynôme G_0 vaut 1 et possède 0 racine dans $]-1,1[$.
   Le polynôme G_1 vaut $2X$ et possède 1 racine dans $]-1,1[$.
   Le polynôme G_2 vaut $12X^2-4=12(X^2-\frac{1}{3})$ et possède 2 racines dans $]-1,1[$, à savoir $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.
   Donc $\diamondsuit$ est vrai pour $n\in\{0,1,2\}$.
2. Le polynôme G_n admet -1 et 1 comme racines de multiplicité n, car

$$G_n=(X+1)^n(X-1)^n$$

   Ainsi, par caractérisation de la multiplicité à l'aide des dérivées successives, on obtient directement

$$\forall\, p\in[\![0,n-1]\!],\qquad G_n^{(p)}(-1)=0 \quad \text{et} \quad G_n^{(p)}(1)=0$$

3. **Pour plus de lisibilité, on note G le polynôme G_n.**
   Pour tout $p\in[\![0,n]\!]$, notons $\mathcal{H}_p$ la propriété

   $\mathcal{H}_p$: « Le polynôme $G^{(p)}$ possède p racines distinctes dans l'intervalle $]-1,1[$ »

   On va prouver par récurrence (finie) que

$$\forall\, p\in[\![0,n]\!],\quad \mathcal{H}_p \text{ est vraie}$$

   Initialisation. La propriété $\mathcal{H}_0$ est vraie (WHY ?).

   Hérédité. Soit $p\in[\![0,n-1]\!]$ tel que la propriété $\mathcal{H}_p$ soit vraie. Montrons $\mathcal{H}_{p+1}$.
   D'après $\mathcal{H}_p$, le polynôme $G^{(p)}$ admet p racines distinctes dans l'intervalle $]-1,1[$.
   De plus, comme $p\leqslant n-1$, la question précédente dit que -1 et 1 sont également racines de $G^{(p)}$.
   Par conséquent, le polynôme $G^{(p)}$ admet $p+2$ racines dans l'intervalle $[-1,1]$.
   Notons-les $x_0,x_1,\dots,x_p,x_{p+1}$ et supposons que $x_0<x_1<\cdots<x_p<x_{p+1}$.
   Soit $i\in[\![0,p]\!]$.
   Le théorème de Rolle appliqué sur $[x_i,x_{i+1}]$ à la fonction polynomiale $G^{(p)}$ assure l'existence d'une racine pour le polynôme $(G^{(p)})'=G^{(p+1)}$ dans $]x_i,x_{i+1}[$.
   Comme il y a $p+1$ intervalles $]x_i,x_{i+1}[$ (tous inclus dans $]-1,1[$), on obtient l'existence de $p+1$ racines dans $]-1,1[$ pour le polynôme $G^{(p+1)}$.
   Donc $\mathcal{H}_{p+1}$ est vraie.

   BILAN. On a montré que :

$$\forall\, p\in[\![0,n]\!],\quad \mathcal{H}_p \text{ est vraie}$$

   En particulier, $\mathcal{H}_n$ est vraie, c'est-à-dire que le polynôme $G^{(n)}$ (qui vaut P_n) possède n racines distinctes dans l'intervalle $]-1,1[$.

   BONUS : comme le degré de P_n vaut n (WHY), on en déduit que toutes les racines de P_n sont distinctes et sont dans $]-1,1[$. C'est assez remarquable !

115

Le cas où le degré de P vaut 1 est immédiat, car alors P' est un polynôme constant non nul et est donc scindé. Par ailleurs, ses racines sont simples puisqu'il n'en a pas !

Désormais supposons $\deg P \geqslant 2$.
Notons $n = \deg P \geqslant 2$ et notons $\widetilde{P}$ la fonction polynomiale associée à P.
Comme P est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, alors P possède n racines réelles distinctes.
Notons $x_1 < \cdots < x_n$ ces fameuses racines de P.
Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, appliquons le théorème de Rolle à la fonction polynomiale $\widetilde{P}$ sur $[x_i, x_{i+1}]$.

— La fonction polynomiale $\widetilde{P}$ est continue sur $[x_i, x_{i+1}]$.

— La fonction polynomiale $\widetilde{P}$ est dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$.

— $\widetilde{P}(x_i) = \widetilde{P}(x_{i+1}) = 0$

D'après le théorème de Rolle, il existe donc $c_i \in \,]x_i, x_{i+1}[$ tel que $\widetilde{P}'(c_i) = 0$.
Comme $c_1 < c_2 < \cdots < c_{n-1}$, les c_i sont distincts.
On a donc trouvé $n-1$ racines réelles distinctes de P'.
Or P' est de degré $n-1$.
Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P' = \lambda(X - c_1)\cdots(X - c_{n-1})$.
Donc P' est scindé à racines simples.

116

Le cas où le degré de P vaut 1 est immédiat, car alors P' est un polynôme constant non nul et est donc scindé.

Désormais supposons $\deg P \geqslant 2$.
Notons $n = \deg P \geqslant 2$ et notons $\widetilde{P}$ la fonction polynomiale associée à P.
Comme P est scindé sur $\mathbb{R}$, alors P possède n racines réelles distinctes.
Notons $x_1 < \cdots < x_r$ les racines réelles distinctes de P.
Notons m_i la multiplicité de x_i.
Comme P est scindé sur $\mathbb{R}$, alors $n = m_1 + \cdots + m_r$.
L'objectif est de montrer que P' est scindé, c'est-à-dire que P' possède $n-1$ racines-comptées-avec-multiplicité.
• Pour tout $i \in [\![1, r-1]\!]$, appliquons le théorème de Rolle à la fonction polynomiale $\widetilde{P}$ sur $[x_i, x_{i+1}]$.

— La fonction polynomiale $\widetilde{P}$ est continue sur $[x_i, x_{i+1}]$.

— La fonction polynomiale $\widetilde{P}$ est dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$.

— $\widetilde{P}(x_i) = \widetilde{P}(x_{i+1}) = 0$

D'après le théorème de Rolle, il existe donc $c_i \in \,]x_i, x_{i+1}[$ tel que $\widetilde{P}'(c_i) = 0$.
Comme $c_1 < c_2 < \cdots < c_{r-1}$, les c_i sont distincts.
On a donc trouvé pour l'instant $r-1$ racines réelles distinctes de P'.

• Par ailleurs, x_i est racine de multiplicité $m_i - 1$ de P' (car x_i est racine de multiplicité m_i de P).

• Comme

$$n - 1 \;=\; \underbrace{1 + \cdots + 1}_{r-1 \text{ fois}} + (m_1 - 1) + \cdots + (m_r - 1)$$

les deux points précédents montre que l'on a trouvé toutes les racines de P'.

Ainsi, P' s'écrit $\lambda(X - c_1) \cdots (X - c_{r-1}) \displaystyle\prod_{i=1}^{r} (X - x_i)^{m_i - 1}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.

Donc P' est scindé.

117

Le résultat est immédiat dans le cas des deux premiers coefficients : si les coefficients de degré 0 et 1 sont nuls, le polynôme est divisible par X^2, donc 0 en est une racine double, ce qui est exclu. Le cas général s'en déduit à cause du fait que l'ensemble des polynômes réels simplement scindés est stable par dérivation, une conséquence immédiate du théorème de Rolle.

1. On voit que -1 et 1 sont des racines de multiplicité n de F_n, donc sont racines de $F_n^{(p)}$ pour tout $p \in [\![0, n-1]\!]$.

• Montrons que P_n possède n racines réelles distinctes dans l'intervalle $]-1,1[$.
Pour plus de lisibilité, on note F le polynôme F_n.
Pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, notons $\mathcal{H}_p$ la propriété

$\mathcal{H}_p$: « Le polynôme $F^{(p)}$ possède p racines distinctes dans l'intervalle $]-1,1[$ »

On va prouver par récurrence (finie) que

$$\forall\, p \in [\![0, n]\!], \quad \mathcal{H}_p \text{ est vraie}$$

Initialisation. La propriété $\mathcal{H}_0$ est vraie (WHY ?).

Hérédité.

Soit $p \in [\![0, n-1]\!]$ tel que la propriété $\mathcal{H}_p$ soit vraie. Montrons $\mathcal{H}_{p+1}$.
D'après $\mathcal{H}_p$, le polynôme $F^{(p)}$ admet p racines distinctes dans l'intervalle $]-1,1[$.
De plus, comme $p \leqslant n-1$, la question précédente dit que -1 et 1 sont également racines de $F^{(p)}$.
Par conséquent, le polynôme $F^{(p)}$ admet $p+2$ racines dans l'intervalle $[-1,1]$.
Notons-les $x_0, x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}$ et supposons que $x_0 < x_1 < \cdots < x_p < x_{p+1}$.
Soit $i \in [\![0, p]\!]$. Le théorème de Rolle appliqué sur $[x_i, x_{i+1}]$ à la fonction polynomiale $F^{(p)}$ assure l'existence d'une racine pour le polynôme $(F^{(p)})' = F^{(p+1)}$ dans $]x_i, x_{i+1}[$.
Comme il y a $p+1$ intervalles disjoints $]x_i, x_{i+1}[$ (tous inclus dans $]-1,1[$), on obtient l'existence de $p+1$ racines distinctes dans $]-1,1[$ pour le polynôme $F^{(p+1)}$.
Donc $\mathcal{H}_{p+1}$ est vraie.

BILAN. On a montré que :

$$\forall\, p \in [\![0, n]\!], \quad \mathcal{H}_p \text{ est vraie}$$

En particulier, $\mathcal{H}_n$ est vraie, c'est-à-dire que le polynôme $F^{(n)}$ (qui vaut P_n) possède n racines distinctes dans l'intervalle $]-1,1[$.

BONUS : comme le degré de P_n vaut n (WHY), on en déduit que toutes les racines de P_n sont distinctes et dans $]-1,1[$. C'est assez remarquable !

2. Déterminons le degré et le coefficient dominant de P_n.

• On a $\deg F_n = 2n$, donc $\deg F_n^{(n)} = 2n - n = n$.
Autrement dit

$$\deg P_n = n$$

• Déterminons le coefficient dominant de P_n.
On a

$$F_n = \frac{1}{2^n n!}(X^{2n} + R) \qquad \text{avec } \deg R < 2n$$

La dérivée k-ème de X^{2n} est $\frac{(2n)!}{(2n-k)!}X^{2n-k}$ d'où

$$F_n^{(k)} = \frac{1}{2^n n!}\left(\frac{(2n)!}{(2n-k)!}X^{2n-k} + R^{(k)}\right)$$

D'où

$$P_n = F_n^{(n)} = \frac{1}{2^n n!}\left(\frac{(2n)!}{n!}X^n + R^{(n)}\right) \qquad \text{avec } \deg R^{(n)} < n$$

BILAN : le coefficient dominant de P_n est

$$\frac{1}{2^n}\frac{(2n)!}{n!\,n!} = \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}$$

3. Montrer que

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^n} \binom{n}{k}^2 B_{n,k}$$

On a

$$F_n = \frac{1}{2^n n!}(X-1)^n(X+1)^n$$

Ainsi, F_n se présente comme le produit de deux polynômes. En appliquant la formule de Leibniz :

$$F_n^{(n)} = \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!}(X-1)^{n-k} \times \frac{n!}{k!}(X+1)^k$$

D'où

$$\begin{aligned} F_n^{(n)} &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{k}(X-1)^{n-k}(X+1)^k \\ P_n = F_n^{(n)} &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 B_{n,k} \end{aligned}$$

4. On a

$$B_{n,k}(1) = (1+1)^k(1-1)^{n-k} = \begin{cases} 0 & \text{si } n-k \neq 0 \\ 2^n & \text{si } n-k = 0 \end{cases}$$

$$B_{n,k}(-1) = (-1+1)^k(-1-1)^{n-k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 0 \\ (-2)^n & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Ainsi

$$P_n(1) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}^2 2^n = 1 \qquad \text{et} \qquad P_n(-1) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}^2 (-2)^n = (-1)^n$$

On a

$$B_{n,k}(-X) = (-X+1)^k(-X-1)^{n-k} = (-1)^k(X-1)^k(-1)^{n-k}(X+1)^{n-k} = (-1)^n B_{n,n-k}$$

On a

$$\begin{aligned} P_n(-X) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}^2 \underbrace{B_{n,k}(-X)}_{(-1)^n B_{n,n-k}} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2^n}\binom{n}{n-j}^2 (-1)^n B_{n,j} \\ &= (-1)^n \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2^n}\binom{n}{j}^2 B_{n,j} \\ &= (-1)^n P_n(X) \end{aligned}$$

5. On montre avec la formule de Leibniz que

$$\forall\, p \in [\![0, n-1]\!], \quad F_n^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} \frac{p!}{2^n n!}\binom{n}{k}\binom{n}{p-k} B_{2n-p,n-k}$$

En évaluant en 1 et -1, on retrouve que :

$$\forall\, p \in [\![0, n-1]\!], \quad F_n^{(p)}(1) = 0 \qquad \text{et} \qquad F_n^{(p)}(-1) = 0$$

La fonction f est l'inverse de $x \mapsto x^2+1$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et qui ne s'annule jamais. D'après le cours, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

1. On a $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2} \qquad$ et $\qquad \forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = 2\dfrac{3\,x^2-1}{(x^2+1)^3}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{H}_n$:

   « Il existe une fonction polynomiale g_n telle que $\forall x \in \mathbb{R},\quad f^{(n)}(x) = \dfrac{g_n(x)}{(x^2+1)^{n+1}}$ »

   ▷ Initialisation. On a $f^{(0)}x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$. Posons $g_0 : x \mapsto 1$. On a alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(0)}(x) = \dfrac{g_0(x)}{(x^2+1)^{0+1}}$.
   Donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.

   ▷ Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Sq $\mathcal{H}_n$ est vraie. Mq $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
   Calculons la dérivée $(n+1)$-ème de f.
   On a :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) \overset{\mathcal{H}_n}{=} \frac{g_n'(x)(x^2+1)^{n+1} - g_n(x)(n+1)2x(x^2+1)^n}{\left((x^2+1)^{n+1}\right)^2}$$
   En simplifiant par $(x^2+1)^n$, on obtient
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n+1)}(x) = \frac{g_n'(x)(x^2+1) - g_n(x)(n+1)2x}{(x^2+1)^{n+2}}$$
   On pose $g_{n+1} : x \mapsto (x^2+1)g_n'(x) - 2(n+1)xg_n(x)$.
   Il s'agit d'une fonction polynomiale : en effet, les quatre fonctions
   $$g_n', \quad g_n, \quad x \mapsto x^2+1, \quad x \mapsto 2(n+1)x$$
   le sont.
3. Supposons qu'il existe g_n et h_n deux fonctions polynomiales comme dans la question précédente. On a alors
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{g_n(x)}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{h_n(x)}{(x^2+1)^{n+1}}$$
   D'où en multipliant par le dénominateur
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n(x) = h_n(x)$$
   Cela signifie que $g_n = h_n$, ce qu'il fallait démontrer.
4. Dans l'hérédité de la récurrence, on voit que
   $$f^{(n+1)}(x) = \frac{x^2+1)g_n'(x) \;-\; 2(n+1)xg_n(x)}{(x^2+1)^{n+2}}$$
   D'après la question 3, par unicité de la fonction polynomiale telle que…, on a
   $$g_{n+1} : x \longmapsto (x^2+1)g_n'(x) - 2(n+1)xg_n(x)$$
   Pour que la relation de récurrence permette de définir complètement la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il nous faut la fonction g_0.
   Comme $f_0(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^{0+1}}$, et par unicité de g_0, on a $g_0 : x \mapsto 1$.

   Bilan :
   $g_0 : x \mapsto 1 \quad$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ g_{n+1} : x \mapsto (x^2+1)g_n'(x) - 2(n+1)xg_n(x)$
5. Montrons par récurrence que $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ P_n$ est de la forme $\quad a_nX^n + S_n$ avec $S_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$
   • $P_0 = 1$ est bien de la forme $a_0X^0 + S_0$ avec $a_0 = 1$ et $S_0 = 0$ qui est bien de degré $\leqslant -1$.
   • Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P_n = a_nX^n + S_n$ avec $S_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
   Montrons que P_{n+1} s'écrit $a_{n+1}X^{n+1} + S_{n+1}$ avec $S_{n+1} \in \mathbb{R}_n[X]$.

   Utilisons la définition de P_{n+1} et l'hypothèse de récurrence :
   $$P_{n+1} = (X^2+1)P_n' - 2(n+1)XP_n = (X^2+1)\left(na_nX^{n-1} + S_n'\right) - 2(n+1)X\left(a_nX^n + S_n\right)$$
   D'où $P_{n+1} = -(n+2)a_nX^{n+1} + S_{n+1}$ avec $S_{n+1} = na_nX^{n-1} + (X^2+1)S_n' - 2(n+1)XS_n$ qui est de degré $\leqslant n$ (car S_n est de degré $\leqslant n-1$ d'après l'hyp. de réc.)

6. D'après la question précédente, on a la relation de récurrence pour le coefficient dominant de P_n :
$\begin{cases} c_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ c_{n+1} \ = \ -(n+2)c_n \end{cases}$
On voit à la main que $c_1 = -2$, $c_2 = 6$, puis $c_3 = -24$.
On conjecture donc que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $c_n = (-1)^n(n+1)!$.
On peut prouver cela par récurrence (je vous laisse faire).

Voilà une autre preuve possible sans récurrence.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Examinons le produit suivant $\prod_{k=1}^{n} \frac{c_k}{c_{k-1}}$. D'après la relation de récurrence vérifiée par la suite c (à savoir $c_k = -(k+1)c_{k-1}$), on a

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{c_k}{c_{k-1}} \ = \ \prod_{k=1}^{n} -(k+1) \ = \ (-1)^n(n+1)!$$

Or ce produit est télescopique et vaut $\frac{c_n}{c_0} = c_n$ (car $c_0 = 1$).
Bilan : $c_n = (-1)^n(n+1)!$.

7. La suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est liée aux dérivées successives de f. En effet, on a $f^{(n)}$: $x \mapsto \frac{P_n(x)}{(x^2+1)^{n+1}}$.
Ainsi, on obtient une information sur l'évaluation de P_n en un réel x :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) \ = \ (x^2+1)^{n+1} f^{(n)}(x)$$

Bilan de cette mini-étude : Une racine de P_n est donc un zéro de $f^{(n)}$ et réciproquement.

Allons-y pour la récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons

$$\mathcal{H}_n : \quad P_n \text{ admet } n \text{ racines réelles distinctes}$$

▷ Initialisation. Le polynôme formel $P_0 = 1$ admet 0 racine.

▷ Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}_n$ est vraie.
Il existe donc n racines réelles distinctes de P_n. Notons-les $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$
Ces x_k sont des zéros de $f^{(n)}$ d'après la remarque bleue.
Appliquons le th de Rolle à la fonction $f^{(n)}$ entre x_k et x_{k+1}.
On a

- ▷ $f^{(n)}$ continue sur $[x_k, x_{k+1}]$
- ▷ $f^{(n)}$ dérivable sur $]x_k, x_{k+1}[$
- ▷ $f^{(n)}(x_k) = f^{(n)}(x_{k+1})$ (car cela vaut 0)

Donc il existe $y_k \in\,]x_k, x_{k+1}[$ tel que $f^{(n+1)}(y_k) = 0$.

On a trouvé $y_1 < \cdots < y_{n-1}$ qui sont des zéros de $f^{(n+1)}$, donc des racines de P_{n+1}.

Bilan intermédiaire. Il reste à trouver deux racines pour P_{n+1}.
Ceci va se faire grâce au théorème de Rolle généralisé.

Première racine manquante pour P_{n+1}
On a

- ▷ $f^{(n)}$ continue sur $]-\infty, x_1]$
- ▷ $f^{(n)}$ dérivable sur $]-\infty, x_1[$

- $\lim_{-\infty} f^{(n)} = f^{(n)}(x_1)$

  Justification :

  D'une part, $f^{(n)}(x_1) = 0$.

  D'autre part, $f^{(n)} : x \mapsto \dfrac{g_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$ donc $f^{(n)}$ est le quotient d'une fonction polynomiale de degré n (d'après la question 6) et d'une fonction polynomiale de degré $2(n+1)$, donc $\lim_{-\infty} f^{(n)} = 0$.

D'après le théorème de Rolle généralisé, il existe $y_0 \in]-\infty, x_1[$ tel que $(f^{(n)})'(y_0) = 0$, donc tel que $f^{(n+1)}(y_0) = 0$.
Ainsi $P_{n+1}(y_0) = 0$.

Deuxième racine manquante pour P_{n+1}
On a

- $f^{(n)}$ continue sur $[x_n, +\infty[$
- $f^{(n)}$ dérivable sur $]x_n, +\infty[$
- $\lim_{+\infty} f^{(n)} = f^{(n)}(x_n)$

  D'une part, $f^{(n)}(x_n) = 0$.

  D'autre part, $f^{(n)} : x \mapsto \dfrac{g_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$ donc $f^{(n)}$ est le quotient d'une fonction polynomiale de degré n (d'après la question 5) et d'une fonction polynomiale de degré $2(n+1)$, donc $\lim_{+\infty} f^{(n)} = 0$.

D'après le théorème de Rolle généralisé, il existe $y_n \in]x_n, +\infty[$ tel que $(f^{(n)})'(y_n) = 0$, donc tel que $f^{(n+1)}(y_n) = 0$.
Ainsi $P_{n+1}(y_n) = 0$.

Bilan de l'hérédité. On a trouvé $y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n$ qui sont des zéros de $f^{(n+1)}$, donc des racines de P_{n+1}.

Ainsi, $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie : on a bien prouvé que P_{n+1} admet $n+1$ racines réelles distinctes.

1. $H_0 = 1$, $H_1 = -(2X)$, $H_2 = 4X^2 - 2$, etc. On a la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, H_{n+1} = H_n' - 2XH_n.$$

2. On a $H_n = (-2)^n X^n + \cdots$, et c'est un polynôme de même parité que n.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ l'assertion « $P_{n+1}' = -2(n+1)P_n$. »
Montrons $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ par récurrence.

Initialisation. $H_1' = -2$, ce qui montre $P(0)$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$. Montrons $P(n+1)$. On a

$$\begin{aligned}
(H_{n+2})' &= \left(H_{n+1}' - 2XH_{n+1}\right)' && \text{(rel. réc.)}\\
&= H_{n+1}'' - 2XH_{n+1}' - 2H_{n+1}\\
&= -2(n+1)H_n' + 4(n+1)XH_n - 2H_{n+1} && \text{(d'après } P(n))\\
&= -2(n+1)\left[H_n' - 2XH_n\right] - 2H_{n+1}\\
&= -2(n+1)H_{n+1} - 2H_{n+1} && \text{(rel. réc)}\\
&= -2(n+2)H_{n+1},
\end{aligned}$$

ce qui montre $P(n+1)$ et clôt la récurrence.

4. La question précédente permet de réécrire la récurrence sous la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}, H_{n+2} = -2(n+1)H_n - 2XH_{n+1},$$

d'où l'on tire

$$\forall n \in \mathbb{N}, H_{n+2}(0) = -2(n+1)H_n(0).$$

On en déduit facilement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$g^{(n)}(0) = H_n(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair}\\ (-2)^{n/2} \prod_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n\\ k \text{ impair}}} k = (-2)^{n/2}\,(n-1)!! & \text{si } n \text{ est pair.}\end{cases}$$

121

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.
La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, en tant que composées de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

1. On a $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, puis $f' : x \mapsto -x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, puis $f'' : x \mapsto (-1)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + (-x)(-x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = (x^2-1)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$,
puis $f^{(3)} : x \mapsto (3x - x^3)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$,
Comme $H_n : x \mapsto (-1)^n \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} f^{(n)}(x)$, on a :

$$H_0 : x \ \mapsto 1 \qquad H_1 : x \ \mapsto x \qquad H_2 : x \ \mapsto x^2 - 1 \qquad H_3 : x \ \mapsto 3x - x^3$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$H_{n+1}(x) \ = \ (-1)^{n+1}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} f^{(n+1)}(x) \ = \ (-1)^n \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\Big[- f^{(n+1)}(x)\Big]$$

et

$$xH_n(x) - nH_{n-1}(x) \ = \ (-1)^n\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} x f^{(n)}(x) - n(-1)^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} f^{(n-1)}(x) \ = \ (-1)^n\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\Big[x f^{(n)}(x) + n f^{(n-1)}(x)\Big]$$

L'égalité à montrer est donc équivalente à l'égalité des deux « crochets » :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ -f^{(n+1)}(x) = x f^{(n)}(x) + n f^{(n-1)}(x)$$

• **Par récurrence.** Montrons cela par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation On a $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, donc $f' : x \mapsto -x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, donc $f'' : x \mapsto (-1)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + (-x)(-x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = (x^2-1)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -f''(x) = x f'(x) + f(x)$$

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -f^{(n+1)}(x) = x f^{(n)}(x) - n f^{(n-1)}(x)$$

En dérivant (licite, toutes les fonctions sont dérivables), on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -f^{(n+2)}(x) \ = \ 1 \times f^{(n)}(x) + x \times f^{(n+1)}(x) + n f^{(n)}(x)$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -f^{(n+2)}(x) \ = \ x f^{(n+1)}(x) - (n+1) f^{(n)}(x)$$

D'où la propriété au rang $n+1$.

• **Sans récurrence.** On peut aussi procéder de manière directe, sans récurrence, avec Leibniz, en remarquant que

$$f^{(n+1)} = (f')^{(n)} \qquad \text{avec } f' : x \mapsto -x \times \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

Comme f' est le produit de $g : x \mapsto -x$ par $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, on a avec la formule de Leibniz :

$$(f')^{(n)} \ = \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)} f^{(n-k)}$$

On a $g^{(k)} = 0$ si $k \geqslant 2$. Ainsi, la somme ne comporte que deux termes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n+1)}(x) \ = \ \binom{n}{0} g^{(0)}(x) f^{(n)}(x) + \binom{n}{1} g^{(1)}(x) f^{(n-1)}(x) \ = \ -x f^{(n)}(x) + n(-1) f^{(n-1)}(x)$$

En multipliant par -1, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -f^{(n+1)}(x) \ = \ x f^{(n)}(x) + n f^{(n-1)}(x)$$

D'où la relation annoncée.

3. Par récurrence double immédiate, on montre que H_n est une fonction polynomiale.
   Par récurrence double (tout aussi immédiate), on montre que le polynôme H_n est de degré n, et de coefficient dominant 1.
   Enfin, on montre que $H_n(-X) = (-1)^n H_n(X)$, toujours par récurrence double.
   Voici un morceau de l'hérédité. D'après la relation vérifiée par les polynômes de Hermite, on a
   $$H_{n+1}(-X) = -XH_n(-X) - nH_{n-1}(-X) = -X(-1)^n H_n - n(-1)^{n-1}H_{n-1} = (-1)^{n+1}(XH_n - nH_{n-1})$$
4. On en déduit que $f^{(n)}$ est de la forme
   $$(-1)^n H_n(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$
   où H_n est un polynôme bien concret !

1. Posons $f: \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \ln t \end{array}$.

   Cette fonction est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall\, t \in \,]0,+\infty[, \quad f'(t) = \frac{1}{t}$$

   Appliquons les accroissements finis à f, non pas sur $]0,+\infty[$, mais sur $[x, x+1]$ en ayant fixé $x > 0$ au préalable !

   Première façon de conclure. On a $\begin{cases} f \text{ est continue sur } [x,x+1] \\ f \text{ est dérivable sur }]x,x+1[\\ \forall\, t \in \,]x,x+1[, \ \dfrac{1}{x+1} \leqslant f'(t) \leqslant \dfrac{1}{x} \end{cases}$

   D'après l'inégalité des accroissements finis (version double inégalité), on trouve

$$\frac{1}{x+1} \ \leqslant\ \frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x} \ \leqslant\ \frac{1}{x}$$

   Deuxième façon de conclure. On a $\begin{cases} f \text{ est continue sur } [x,x+1] \\ f \text{ est dérivable sur }]x,x+1[\end{cases}$

   On utilise le théorème (l'égalité) des accroissements finis :

   il existe $c \in \,]x,x+1[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}$.

   Or $\forall\, t \in \,]x,x+1[, \ \dfrac{1}{x+1} \leqslant f'(t) \leqslant \dfrac{1}{x}$. Pour $t = c$, on obtient avec l'expression de $f'(c)$ l'encadrement :

$$\frac{1}{x+1} \ \leqslant\ \frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x} \ \leqslant\ \frac{1}{x}$$

2. On utilise la question précédente avec $x = k \in \mathbb{N}^*$ qui est bien > 0 :

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad \frac{1}{k+1} \ \leqslant\ \ln(k+1) - \ln k \ \leqslant\ \frac{1}{k}$$

   À partir de maintenant, plusieurs possibilités s'offrent à nous. Elles fournissent toutes le même résultat final, mais les inégalités intermédiaires obtenues ne sont pas exactement les mêmes. Certaines sont plus précises que d'autres.

   • Si on met tout de suite $\frac{1}{k}$ au centre, on a

$$\forall\, k \geqslant 2, \quad \ln(k+1) - \ln k \ \leqslant\ \frac{1}{k} \ \leqslant\ \ln k - \ln(k-1)$$

   Par somme pour $k \in [\![2,n]\!]$ (avec $n \geqslant 2$), on obtient par télescopie :

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad \ln(n+1) - \ln 2 \ \leqslant\ H_n - 1 \ \leqslant\ \ln n$$

   d'où

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad \ln(n+1) - \ln 2 + 1 \ \leqslant\ H_n \ \leqslant\ 1 + \ln n$$

   On s'aperçoit que cet encadrement est même valable pour $n = 1$, car on a alors des égalités partout.

   • Si on somme tout de suite pour $k \in [\![1,n]\!]$, on obtient

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad H_{n+1} - 1 \ \leqslant\ \ln(n+1) \ \leqslant\ H_n$$

   En cachant le membre gauche, on obtient l'inégalité $\ln(n+1) \leqslant H_n$.

   En cachant le membre droit, on obtient l'inégalité $H_{n+1} \leqslant 1 + \ln(n+1)$.

   Ceci étant vrai pour $n \geqslant 1$, en décalant les indices, on obtient les inégalités suivantes pour $n \geqslant 2$:

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad \ln n \ \leqslant\ H_n \ \leqslant\ 1 + \ln n$$

   • On reprend le point précédent, mais on termine différemment.

On essaie de faire apparaître du $n+1$ partout en écrivant $H_n = H_{n+1} - \dfrac{1}{n+1}$. D'où

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad H_{n+1} - 1 \ \leqslant\ \ln(n+1) \ \leqslant\ H_{n+1} - \frac{1}{n+1}$$

D'où

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad H_n - 1 \ \leqslant\ \ln n \ \leqslant\ H_n - \frac{1}{n}$$

D'où

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad \ln n - \frac{1}{n} \ \leqslant\ H_n \ \leqslant\ 1 + \ln n$$

Reprenons. Après avoir obtenu une des doubles inégalités où H_n est au centre, on peut alors déterminer un équivalent de H_n.

On constate que le membre gauche est équivalent à $\ln n$ et le membre droit également (que l'on prenne une des trois inégalités).

Ainsi, en divisant par $\ln n$ la double inégalité, on a une double inégalité où membres gauche et droit tendent tous les deux vers 1.

D'après le théorème des gendarmes, le membre du milieu, à savoir $\dfrac{H_n}{\ln n}$ tend également vers 1, autrement dit $H_n \sim \ln n$.

3. On utilise la question précédente avec $x = k \in \mathbb{N}^*$ qui est bien > 0 :

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad \frac{1}{k+1} \ \leqslant\ \ln(k+1) - \ln k \ \leqslant\ \frac{1}{k}$$

Par somme pour $k \in [\![n, 2n]\!]$, on a

$$\ln(2n+1) - \ln n \ \leqslant\ \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \ \leqslant\ \ln(2n) - \ln(n-1)$$

En écrivant le membre gauche sous la forme $\ln\left(\dfrac{2n+1}{n}\right)$, on constate que ce membre gauche tend vers $\ln 2$. Idem pour le membre droit.

D'après le théorème des Gendarmes, on obtient que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ existe et vaut $\ln 2$.

1. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, posons $\mathcal{H}_k$ l'assertion suivante :

$$« f^{(k)} \text{ s'annule en } n+1-k \text{ points de } \begin{cases} \text{de } [a, b] & \text{si } k = 0 \\ \text{de }]a, b[& \text{si } k \geqslant 1 \end{cases} »$$

Initialisation. D'après l'énoncé, $\mathcal{H}_0$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\mathcal{H}_k$.

Montrons $\mathcal{H}_{k+1}$.

D'après $\mathcal{H}_k$, il existe $x_1 < \cdots < x_{n+1-k}$ des points distincts de $[a, b]$ en lesquels $f^{(k)}$ s'annule.

Pour tout $i \in [\![1, n-k]\!]$, appliquons le théorème de Rolle à la fonction $g = f^{(k)}$ qui vérifie :

— g est continue sur $[x_i, x_{i+1}]$ (car f est n fois dérivable, donc $g = f^{(k)}$ est $n-k$ fois dérivable, donc a fortiori 1 fois dérivable (car $k \leqslant n-1$), donc a foriori continue).

— g est dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$ (même type d'argument)

— $g(x_i) = g(x_{i+1}) = 0$

Il existe donc $c_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $g'(c_i) = 0$, c'est-à-dire tel que $f^{(k+1)}(c_i) = 0$.

Il reste à justifier le fait que les c_i sont tous distincts et sont bien dans $]a, b[$: ce qui est clair car $a \leqslant x_1 < c_1 < \cdots < c_{n-k} \leqslant x_{n+1-k} < b$.

D'où $\mathcal{H}_{k+1}$.

BILAN : pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, la proposition $\mathcal{H}_k$ est vraie. En particulier, $\mathcal{H}_n$ est vraie et fournit le résultat annoncé !

2. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, posons $\mathcal{H}_k$ l'assertion suivante :

$$« f^{(k)} \text{ s'annule } \begin{cases} \text{sur }]a, b] & \text{si } k = 0 \\ \text{sur }]a, b[& \text{si } k \geqslant 1 \end{cases} »$$

Initialisation. D'après l'énoncé, $\mathcal{H}_0$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\mathcal{H}_k$.

Montrons $\mathcal{H}_{k+1}$.

D'après $\mathcal{H}_k$, il existe $c_k \in]a, b]$ tel que $f^{(k)}(c_k) = 0$.

Or d'après l'énoncé, $f^{(k)}(a) = 0$.

D'après le théorème de Rolle appliqué à la fonction $f^{(k)}$ sur $[a, c_k]$ (licite car $f^{(k)}$ a la bonne régularité), on en déduit qu'il existe $c_{k+1} \in]a, c_k[$ tel que $(f^{(k)})'(c_{k+1}) = 0$.

Ce réel c_{k+1} est a fortiori dans $]a, b[$. D'où $\mathcal{H}_{k+1}$.

BILAN : pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, la proposition $\mathcal{H}_k$ est vraie. En particulier, $\mathcal{H}_n$ est vraie et fournit le résultat annoncé !

125

Il y a deux cas à traiter (en fait, on verra à la fin qu'il n'y en a essentiellement qu'un seul, car on peut toujours se ramener au premier).
• On suppose $f(a) = 0$ et $f(b) > 0$ et $f'(b) < 0$.
Il existe un $x_1 \in]a, b[$ tel que $f(x_1) > f(b)$. En effet, si pour tout $t \in]a, b[$, on avait $f(t) \leqslant f(b)$, on aurait $\dfrac{f(t) - f(b)}{t - b} \geqslant 0$, d'où par passage à la limite en b, on aurait $f'(b) \geqslant 0$.
La fonction f est continue sur le segment $[a, b]$, donc elle admet un maximum, qui est atteint à *l'intérieur* de $[a, b]$, car $x_1 \in]a, b[$ et $f(x_1)$ est supérieur à $f(a)$ et $f(b)$.
Considérons $c \in]a, b[$ tel que $\max\limits_{[a,b]} f = f(c)$.
D'après le lemme de l'extremum local, on en déduit $f'(c) = 0$.

• L'autre cas (à savoir $f(a) = 0$ et $f(b) < 0$ et $f'(b) > 0$) peut ou bien se traiter de la même façon, ou bien se traiter en se ramenant au premier cas.
La fonction $-f$ satisfait toutes les hypothèses de régularité de l'énoncé et satisfait $(-f)(a) = 0$ et $(-f)(b) > 0$ et $(-f)'(b) < 0$, donc le premier cas s'applique et fournit l'existence d'un $c \in]a, b[$ tel que $(-f)'(c) = 0$, c'est-à-dire tel que $f'(c) = 0$.

126

Traitons le cas $n = 1$.
Appliquons le théorème des accroissements finis à f (qui est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$).
Il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$, donc tel que $f'(c) = 1$.

Traitons le cas général.
Appliquons le théorème des accroissements finis à f sur $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.
Il existe $c_k \in]\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}[$ tel que $f'(c_k) = \dfrac{f(\frac{k}{n}) - f(\frac{k-1}{n})}{\frac{1}{n}}$.
Par somme et télescopie, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} f'(c_k) = \frac{f(\frac{n}{n}) - f(\frac{0}{n})}{\frac{1}{n}}$$

d'où $\sum\limits_{k=1}^{n} f'(c_k) = n$.

127

Le cas du polynôme nul est facile.
Désormais, supposons $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ et notons $n = \deg P \in \mathbb{N}$.
Raisonnons par l'absurde en supposant que l'équation admet un nombre infini de solutions.
En particulier, il existe au moins $n+2$ points pour lesquels la fonction $\varphi : x \mapsto \mathrm{e}^x - P(x)$ s'annule.
D'après l'exercice 124, on obtient que $\varphi^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois (il faut savoir redémontrer cela !).
Or comme $n = \deg P$, on a $\varphi^{(n+1)} = \exp$ et la fonction exponentielle ne s'annule pas !
D'où la contradiction.

128

Idée. Les hypothèses se réécrivent $\big(f(a) - f'(a)\big)\mathrm{e}^a = 0$ et $\big(f(b) - f'(b)\big)\mathrm{e}^b = 0$.

Début de la preuve. Posons $\varphi : x \mapsto \big(f(x) - f'(x)\big)\mathrm{e}^x$

On a les hypothèses suivantes : $\begin{cases} \text{la fonction } \varphi \text{ est continue sur } [a, b] \\ \text{la fonction } \varphi \text{ dérivable sur }]a, b[\\ \varphi(a) = \varphi(b) = 0 \end{cases}$

D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$.
Or $\varphi' : x \mapsto \big(f(x) - f''(x)\big)\mathrm{e}^x$.
D'où $f(c) = f''(c)$.

129

Le cas particulier $\ell = 0$
On suppose que $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Montrons que $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
Soit $\varepsilon > 0$.
Comme $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, il existe $A \in \mathbb{R}$ que l'on peut supposer > 0 tel que

$$\forall t \geqslant A, \quad |f'(t)| \leqslant \varepsilon$$

D'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à f sur $[A, +\infty[$, on obtient

$$\forall x \geqslant A, \quad |f(x) - f(A)| \ \leqslant \ \varepsilon|x - A|$$

et par inégalité triangulaire

$$\forall x \geqslant A, \quad |f(x)| \ \leqslant \ |f(A)| + \varepsilon|x - A|$$

D'où en divisant par $|x| = x > 0$ (car $A > 0$), on obtient :

$$(\bigstar) \qquad \forall x \geqslant A, \quad \left|\frac{f(x)}{x}\right| \ \leqslant \ \left|\frac{f(A)}{x}\right| + \varepsilon \underbrace{\frac{x - A}{x}}_{\leqslant 1}$$

Comme $\dfrac{f(A)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \geqslant B, \quad \left|\frac{f(A)}{x}\right| \leqslant \varepsilon$$

En reprenant $(\bigstar)$, et en posant $x_0 = \max(A, B)$, on obtient

$$\forall x \geqslant x_0, \quad \left|\frac{f(x)}{x}\right| \ \leqslant \ 2\varepsilon$$

D'où $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Le cas général. On se ramène au cas précédent en remarquant que l'hypothèse $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$ peut se réécrire $f'(x) - \ell \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
On pose $\varphi : x \mapsto f(x) - \ell x$.
Cette fonction φ est dérivable et la fonction $\varphi' : x \mapsto f'(x) - \ell$ vérifie $\varphi'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

D'après le cas précédent, on en déduit que $\dfrac{\varphi(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
Or $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\varphi(x)}{x} + \ell$. D'où

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$$

Remarque. La réciproque est fausse. Prenons la fonction sinus.
On a $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, mais la fonction $f' = \cos$ n'a pas de limite en $+\infty$.

1. Fixons $n \in \mathbb{N}$.
   On a $g_n(1) = \mathrm{e}^{-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $g_n(0) = 1$ (WHY).
   Appliquons l'inégalité des accroissements finis à g_n sur $[0,1]$:
   — La fonction g_n est dérivable sur $[0,1]$ et
   $$\forall x \in [0,1], \quad g_n'(x) \;=\; \mathrm{e}^{-x}\left(-\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\right) \;=\; -\mathrm{e}^{-x}\,\frac{x^n}{n!}$$
   — La valeur absolue de la dérivée est majorée :
   $$\forall t \in [0,1], \quad |g_n'(t)| = \left|-\mathrm{e}^{-t}\frac{t^n}{n!}\right| \;=\; \mathrm{e}^{-t}\,t^n\,\frac{1}{n!} \;\overset{\text{WHY}}{\leqslant}\; \mathrm{e}^{-0}1^n\frac{1}{n!} \;=\; \frac{1}{n!}$$
   Ainsi, l'inégalité des accroissements finis fournit :
   $$\big|g_n(1) - g_n(0)\big| \;\leqslant\; \frac{1}{n!}|1-0|$$
   D'où
   $$\left|\frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \;-\; 1\right| \;\leqslant\; \frac{1}{n!}$$
2. D'après la question précédente, on a
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left|\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \;-\; \mathrm{e}\right| \;\leqslant\; \frac{\mathrm{e}}{n!}$$
   La limite du membre droit vaut 0.
   D'après le théorème des Gendarmes, on en déduit que
   $$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \text{ existe et vaut e}$$
3. On a $g_n(1) = \mathrm{e}^{-a}\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}$ et $g_n(0) = 1$ (WHY).
   Appliquons l'inégalité des accroissements finis à g_n sur $[0,1]$:
   — La fonction g_n est dérivable sur $[0,1]$ et
   $$\forall t \in [0,1], \quad g_n'(t) \;=\; \mathrm{e}^{-at}\left(-\,a\sum_{k=0}^{n}\frac{(at)^k}{k!} + \sum_{k=1}^{n}\frac{a^k t^{k-1}}{(k-1)!}\right) \;=\; -a\mathrm{e}^{-at}\,\frac{(at)^n}{n!}$$
   — La valeur absolue de la dérivée est majorée :
   $$\forall t \in [0,1], \quad |g_n'(t)| = \left|-a\mathrm{e}^{-at}\frac{(at)^n}{n!}\right| \;=\; |a|\mathrm{e}^{-at}\,|a|^n t^n\,\frac{1}{n!} \;\overset{\text{WHY}}{\leqslant}\; \mathrm{e}^{-0}|a|^{n+1}\frac{1}{n!} \;=\; \frac{|a|^{n+1}}{n!}$$
   Ainsi, l'inégalité des accroissements finis fournit :
   $$\big|g_n(1) - g_n(0)\big| \;\leqslant\; \frac{|a|^{n+1}}{n!}|1-0|$$
   D'où
   $$\left|\mathrm{e}^{-a}\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!} \;-\; 1\right| \;\leqslant\; \frac{|a|^{n+1}}{n!}$$
   Il faut être capable de démontrer que $\frac{|a|^{n+1}}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Allons-y.
   On peut distinguer les cas $|a| < 1$ puis $|a| = 1$ et $|a| > 1$. On peut même traiter directement le cas de $|a| \leqslant 1$. En effet, dans ce cas, la suite de terme général $|a|^{n+1}$ est bornée par 1, donc en multipliant par $\frac{1}{n!}$ qui tend vers 0, on obtient une suite qui tend vers 0.
   Le cas $|a| > 1$ se traite par croissances comparées.

131

Montrons que

$$\varphi : x \longmapsto f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k - K\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

vérifie les hypothèses du théorème des accroissements finis.

— La fonction φ est continue sur $[a, b]$.
  En effet, comme f est de classe $\mathcal{C}^n$, les fonctions $f^{(k)}$ sont continues pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

— La fonction φ est dérivable sur $]a, b[$.
  En effet, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, les fonctions $f^{(k)}$ sont dérivables (comme f est de classe $\mathcal{C}^n$, les $f^{(k)}$ sont dérivables pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, et de plus $f^{(n)}$ est dérivable par hypothèse).

Ainsi, φ vérifie les hypothèses du théorème des accroissements finis.
De plus, pour tout $x \in]a, b[$, on a :

$$\varphi'(x) = -\sum_{k=0}^{n} \left[\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k - \frac{f^{(k)}(x)}{k!}k(b-x)^{k-1} \right] + K\frac{(b-x)^n}{n!}$$

En posant $u_{k+1} = \dfrac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k$, on a (WHY ?) :

$$\varphi'(x) = -\sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) + K\frac{(b-x)^n}{n!}$$

Comme $u_0 = 0$, on a, par télescopie :

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= -u_{n+1} + K\frac{(b-x)^n}{n!} \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n + K\frac{(b-x)^n}{n!} \\ &= \frac{(b-x)^n}{n!}\Big(K - f^{(n+1)}(x)\Big) \end{aligned}$$

Appelons K l'unique réel défini par l'égalité :

$$f(b) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \;+\; \frac{K}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

Et posons

$$\varphi : x \;\longmapsto\; f(b) \;-\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k \;-\; K\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

où K est le réel précédent, de sorte que $\varphi(a) = 0$ par définition de K.
On a aussi $\varphi(b) = 0$.
On a montré que φ vérifie les hypothèses du théorème des accroissements finis avec en plus $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.
D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in \,]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, donc tel que

$$\frac{(b-c)^n}{n!}\Big(K - f^{(n+1)}(c)\Big) = 0$$

Comme $c \neq b$, on a $K = f^{(n+1)}(c)$.

En reportant dans la définition de K, on a montré l'existence d'un c tel que

$$f(b) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \;+\; \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

ce qu'il fallait démontrer.

142

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell > 0$.
Montrons que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Idée. Faire un dessin, utiliser le TAF, et conclure par théorème de comparaison sur les limites.

Début de la preuve.
Comme $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell > 0$, il existe un voisinage de $+\infty$ sur lequel $f'(t) \geqslant \dfrac{\ell}{2}$.
Précisément, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $\quad \forall\, t \geqslant A, \quad f'(t) \geqslant \dfrac{\ell}{2}$.

• Montrons maintenant que $\quad \forall\, x \geqslant A, \quad f(x) \;\geqslant\; \dfrac{\ell}{2}(x-A) + f(A)$
Fixons $x \geqslant A$.
Exploitons le théorème des accroissements finis sur $[x, A]$ (licite, WHY ?).
On obtient (après petit calcul sur l'égalité fournie par le TAF) :

$$\exists\, c_x \in \,]A, x[, \qquad f(x) \;=\; f'(c_x)(x-A) + f(A)$$

On a $f'(c_x) \geqslant \dfrac{\ell}{2}$ (en effet, $c_x \geqslant A$ et, de plus, pour tout $t \geqslant A$, on a $f'(t) \geqslant \dfrac{\ell}{2}$).
En multipliant cette dernière inégalité par $x - A \geqslant 0$ et en ajoutant $f(A)$, on obtient

$$f(x) \;\geqslant\; \frac{\ell}{2}(x-A) + f(A)$$

• Passons à la limite quand $x \to +\infty$ dans l'inégalité : $\qquad \forall\, x \in A, \quad f(x) \;\geqslant\; \dfrac{\ell}{2}(x-A) + f(A)$
Comme $\ell > 0$, le membre droit tend vers $+\infty$.
Par théorème de comparaison, le membre gauche tend aussi vers $+\infty$.
D'où $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

Attention à l'argument faux suivant.
On a

$$\forall\, x \geqslant A, \qquad f(x) \;=\; f'(c_x)(x-A) + f(A) \qquad \text{où } c_x \in \,]A, x[$$

Jusque-là, tout va bien.
On a $x - A \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $f'(c_x) > 0$, donc par produit, on a $f'(c_x)(x-A) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
Puis, par somme avec $f(A)$ indépendant de x, on obtient $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Il y a une **erreur**. Où ?

On a bien $f'(c_x) > 0$, mais comme cette expression dépend de x, il faut également considérer sa limite. Or nous n'avons pas d'information sur la limite de c_x, donc on ne peut pas déterminer cette limite !

147

1. Considérons la fonction $h : x \longmapsto \big(g(b) - g(a)\big) f(x) - \big(f(b) - f(a)\big) g(x)$.
   Cette fonction h vérifie les hypothèses du théorème de Rolle (WHY ?) :

   ▷ h est continue sur $[a, b]$

   ▷ h est dérivable sur $]a, b[$ et sa dérivée est $x \mapsto \big(g(b) - g(a)\big) f'(x) - \big(f(b) - f(a)\big) g'(x)$

   ▷ $h(a) = h(b)$ (WHY ?)

   D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in \,]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$, c'est-à-dire tel que

   $$\big(g(b) - g(a)\big) f'(c) - \big(f(b) - f(a)\big) g'(c) = 0$$

2. En appliquant le résultat de la question précédente avec $b = x$, on obtient :

   $$\forall\, x \in [a, b], \quad \exists\, c_x \in [a, x], \quad \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'\,(c_x)}{g'\,(c_x)}$$

   Mais lorsque $x \to a$, on a $c_x \to a$ (WHY ?). De plus, par hypothèse, on a $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to \ell$.
   En composant ces deux limites, on obtient :

   $$\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \to \ell$$

   Ainsi

   $$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \to \ell$$

3. En posant $f(x) = \cos x - \mathrm{e}^x$ et $g(x) = (x + 1)\mathrm{e}^x$, on est exactement dans les conditions de la question précédente.
   On a

   $$f'(x) = -\sin(x) - \mathrm{e}^x \qquad \text{et} \qquad g'(x) = (x + 2)\mathrm{e}^x$$

   d'où $f'(0) = -1$ et $g'(0) = 2$.
   D'après la question précédente, la limite cherchée vaut $-\frac{1}{2}$.

148

Introduisons $g : t \mapsto \begin{cases} f(\tan t) & \text{si } t \neq \frac{\pi}{2} \\ \lim\limits_{+\infty} f & \text{si } t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ qui est définie sur $[\operatorname{Arctan} a, \frac{\pi}{2}]$ (WHY ?).

Les trois points suivants nécessitent une justification (laquelle) :

- ▷ g est continue sur $[\operatorname{Arctan} a, \frac{\pi}{2}]$ (ici, on utilise l'hypothèse $f(a) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ pour assurer la continuité de g en $\frac{\pi}{2}$)
- ▷ g est dérivable sur $]\operatorname{Arctan} a, \frac{\pi}{2}[$ et on a $g' : t \mapsto (1 + \tan^2 t) f'(\tan t)$.
- ▷ $g(\operatorname{Arctan} a) = g(\frac{\pi}{2})$

On peut appliquer le théorème de Rolle à g.
Cela fournit un $\gamma \in\,]\operatorname{Arctan} a, \frac{\pi}{2}[$ tel que $g'(\gamma) = 0$, c'est-à-dire tel que $(1 + \tan^2 \gamma) f'(\tan \gamma) = 0$, d'où $f'(\tan \gamma) = 0$.

On pose $c = \tan \gamma$.
Ce réel vérifie les deux points suivants (WHY) :

- ▷ $c \in\,]a, +\infty[$
- ▷ $f'(c) = 0$

1. Considérons la fonction $h : x \longmapsto \big(g(b)-g(a)\big)f(x) - \big(f(b)-f(a)\big)g(x)$.
   Cette fonction h vérifie les hypothèses du théorème de Rolle :
   - ▷ h est continue sur $[a,b]$
   - ▷ h est dérivable sur $]a,b[$ et sa dérivée est $x \mapsto \big(g(b)-g(a)\big)f'(x) - \big(f(b)-f(a)\big)g'(x)$
   - ▷ $h(a) = h(b)$ (WHY ?)

   D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $h'(c) = 0$, c'est-à-dire tel que
   $$\big(g(b)-g(a)\big)f'(c) - \big(f(b)-f(a)\big)g'(c) = 0$$

2. Fixons $a < b$.
   Il est licite d'appliquer la question précédente aux fonctions f et g qui ont bien la régularité attendue (puisque φ est dérivable sur $\mathbb{R}$).
   Il existe alors $c \in]a,b[$ tel que
   $$\frac{\mathrm{e}^b\varphi(b) - \mathrm{e}^a\varphi(a)}{\mathrm{e}^b - \mathrm{e}^a} \;=\; \varphi(c) + \varphi'(c)$$
   d'où, en multipliant numérateur et dénominateur par e^{-b} :
   $$\frac{\varphi(b) - \mathrm{e}^{a-b}\varphi(a)}{1 - \mathrm{e}^{a-b}} \;=\; \varphi(c) + \varphi'(c)$$
   D'où
   $$\varphi(b) \;=\; (1-\mathrm{e}^{a-b})(\varphi(c)+\varphi'(c)) \;+\; \mathrm{e}^{a-b}\varphi(a)$$
   D'après l'inégalité triangulaire, on a
   $$\big|\varphi(b)\big| \;\leqslant\; |1-\mathrm{e}^{a-b}|\,|\varphi(c)+\varphi'(c)| \;+\; |\mathrm{e}^{a-b}\varphi(a)|$$
   Comme $|1-\mathrm{e}^{a-b}| \leqslant 1$, on a
   $$\big|\varphi(b)\big| \;\leqslant\; |\varphi(c)+\varphi'(c)| \;+\; \mathrm{e}^{a-b}|\varphi(a)|$$

3. Comme $\big(\varphi(x)+\varphi'(x)\big) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, et ε étant fixé dans l'énoncé, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que
   $$\forall\, x \geqslant A, \quad \big|\varphi(x)+\varphi'(x)\big| \;\leqslant\; \frac{\varepsilon}{2}$$
   Montrons maintenant
   $$\forall\, x \geqslant A, \quad |\varphi(x)| \;\leqslant\; \frac{\varepsilon}{2} \;+\; |\varphi(A)|\mathrm{e}^{A-x}$$
   Fixons $x \geqslant A$.
   Appliquons la question précédente avec $a = A$ et $b = x$.
   Il existe alors $c \in]A,x[$ tel que
   $$\big|\varphi(x)\big| \;\leqslant\; |\varphi(c)+\varphi'(c)| \;+\; |\varphi(A)|\mathrm{e}^{A-x}$$
   Comme $|\varphi(A)|\mathrm{e}^{A-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, on en déduit qu'il existe $A_1 \in \mathbb{R}$ tel que
   $$\forall\, x \geqslant A_1, \quad |\varphi(A)|\mathrm{e}^{A-x} \;\leqslant\; \frac{\varepsilon}{2}$$
   En posant $B = \max(A, A_1)$, on obtient
   $$\forall\, x \geqslant B, \quad |\varphi(x)| \;\leqslant\; \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

4. On vient de montrer que $\varphi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
   Par hypothèse, on a aussi $\big(\varphi(x)+\varphi'(x)\big) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$,
   Comme
   $$\varphi'(x) \;=\; \big(\varphi(x)+\varphi'(x)\big) - \varphi(x)$$
   on en déduit par opération sur les limites que $\varphi'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

1. Montrons qu'il existe $x_1 \in]a, b[$ tel que $g(x_1) < g(a)$.

   On raisonne par l'absurde en supposant que $\forall t \in]a, b[,\ g(t) \geqslant g(a)$.

   Alors $\forall t > a$, $\dfrac{g(t) - g(a)}{t - a}$ est positif.

   En prenant la limite quand $t \to a$ (c'est licite car g est dérivable en a), on a $g'(a) \geqslant 0$.

   On aboutit à une absurdité avec l'hypothèse de l'énoncé $g'(a) < 0$.

   Bilan : il existe $x_1 \in]a, b[$ tel que $g(x_1) < g(a)$.

   On démontre de la même façon qu'il existe $x_2 \in]a, b[$ tel que $g(x_2) < g(b)$.

   • Déduisons-en qu'il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $g'(x_0) = 0$.
   La fonction g est continue sur le segment $[a, b]$, donc par théorème, elle admet un minimum.
   Ce minimum ne peut pas être atteint en a et en b d'après ce qui précède (x_1 et x_2 sont des témoins de cela !).
   Donc le minimum est atteint en un point intérieur, notons-le x_0.
   D'après le lemme de l'extremum local, on en déduit qu'en ce point x_0 la dérivée de g s'annule.

2. Raisonnons par disjonction de cas.

   • Cas 1 : y est égal à $f'(a)$ ou à $f'(b)$. Dans ce cas, le résultat est clair : pour x_0, il suffit de prendre a ou b.

   • Cas 2 : y est strictement entre $f'(a)$ et $f'(b)$.

   Considérons $g : t \mapsto f(t) - yt$.

   La fonction g est dérivable (comme différence de fonctions dérivables, à savoir f et la fonction $t \mapsto yt$).
   Et la dérivée de g vaut $g' : t \mapsto f'(t) - y$.

   On a :
   $g'(a) = f'(a) - y$
   $g'(b) = f'(b) - y$

   Par hypothèse sur y (à savoir y compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$), on a $g'(a)$ et $g'(b)$ qui sont de signe contraire.
   En appliquant la question 1 à la fonction g ou à la fonction $-g$, on obtient qu'il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $g'(x_0) = 0$. C'est-à-dire tel que $f'(x_0) = y$.

1. Comme $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists A_n \in \mathbb{R}, \quad \forall x \geqslant A_n, \quad |f(x) - \ell| \leqslant \frac{1}{n}$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$(\bigstar) \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists A_n \in \mathbb{R}, \quad \forall x, x' \geqslant A_n, \quad |f(x) - f(x')| \leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$$

Il suffit d'écrire $|f(x) - f(x')| = |(f(x) - \ell) - (f(x') - \ell)| \leqslant |f(x) - \ell| + |f(x') - \ell|$.

Construisons une suite (c_n) ayant les qualités requises.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Cherchons un c_n.
D'après ($\bigstar$), il existe $A_n \in \mathbb{R}$ tel que ...
Prenons un tel A_n.
Choisissons un $x_n \in [A_n, +\infty[$ en imposant aussi $x_n \geqslant n$:
on choisit donc x_n tel que $x_n \geqslant \max(A_n, n)$.
D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_n \in]x_n, x_n + 1[$ tel que

$$f(x_n + 1) - f(x_n) = f'(c_n)$$

On a donc d'après ($\bigstar$) (appliquée à $x = x_n + 1$ et $x' = x_n$) l'inégalité $|f'(c_n)| \leqslant \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n}$.

Reprenons. On a donc construit une suite (c_n) vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ c_n \geqslant n \ (\text{WHY?}) \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |f'(c_n)| \leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$$

D'après le théorème de majoration et le théorème des Gendarmes, on en déduit

$$c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad f'(c_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

2. L'inégalité $f^2 + (1 + f')^2 \leqslant 1$ implique que

$$f^2 \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad (1 + f')^2 \leqslant 1$$

On en déduit que :

$$f \text{ est bornée} \qquad \text{et} \qquad f' \text{ est négative}$$

Ainsi, f est décroissante et bornée. Le théorème de la limite monotone implique que f admet des limites *finies* en $-\infty$ et en $+\infty$, que nous notons ℓ_- et ℓ_+.
On peut appliquer la question 1 qui fournit l'existence d'une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que

$$c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad f'(c_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Évaluons l'inégalité de l'énoncé en c_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \big(f(c_n)\big)^2 + \big(1 + f'(c_n)\big)^2 \leqslant 1$$

Par passage à la limite (licite, car chaque terme admet une limite) :

$$\ell_+^2 + (1 + 0)^2 \leqslant 1$$

d'où $\ell_+ = 0$.

Un raisonnement analogue à celui de la question 1 fournit une suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que

$$d_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty \qquad \text{et} \qquad f'(d_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Par le même raisonnement, on trouve $\ell_- = 0$.

Résumons. La fonction f est décroissante de limite nulle en $-\infty$ et en $+\infty$.
Donc f est la fonction nulle.

1.

2. — Penser à une fonction qui ne fait que d'osciller, mais qui oscille de plus en plus lentement.

- Par exemple $g : x \mapsto \cos\sqrt{x}$.

  La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a $g' : x \mapsto \dfrac{-1}{2\sqrt{x}} \sin\sqrt{x}$.

  En $+\infty$, on a $g'(x) \to 0$ et pourtant g n'a pas de limite (WHY ?).

  Justifions le WHY.
  Par l'absurde, supposons que $\cos\sqrt{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} L$.
  Alors la fonction cosinus admet pour limite L en $+\infty$.

  En effet, si on a $\begin{cases} x^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \\ \cos\sqrt{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} L \end{cases}$ alors $\cos x \xrightarrow[x\to+\infty]{} L$

  Comme cosinus est bornée, on a nécessairement $L \in \mathbb{R}$.
  On contemple les égalités suivantes valables pour tout $x \in \mathbb{R}$

  $$\begin{cases} \cos(x+1) + \cos(x-1) &= 2\cos x \cos 1 \\ \cos(x+1) - \cos(x-1) &= -2\sin x \cos 1 \\ \cos^2 x + \sin^2 x &= 1 \end{cases}$$

  La première égalité fournit par passage à la limite (licite) $L + L = 2L\cos 1$. Comme $\cos 1 \neq 0$, on obtient $L = 0$.
  La deuxième égalité fournit l'existence de la limite de la fonction sinus en $+\infty$, que nous notons L' : pour s'en convaincre, écrire $\sin x = \dfrac{-1}{2\cos 1}\Big(\cos(x+1) - \cos(x-1)\Big)$.
  Puis un passage à la limite fournit $L' = 0$.
  La troisième égalité fournit par passage à la limite $L^2 + L'^2 = 1$, d'où $0^2 + 0^2 = 1$.

- Un élève remarquera que la réponse n'est pas encore super satisfaisante, car on demande dans l'énoncé une fonction dérivable sur $[0, +\infty[$ tout entier.

  Pour palier ce léger problème, il suffit :

  — ou bien de considérer $h : x \mapsto \cos(\sqrt{x+3})$ qui est dérivable sur $]-3, +\infty[$ et vérifie les mêmes propriétés que g ;

  — ou bien de remarquer que la fonction g est en fait dérivable en 0.
  Ou bien avec un taux d'accroissement classique.
  Ou bien en remarquant que g est continue sur $[0, +\infty[$ tout entier, dérivable sur $]0, +\infty[$ et que g' admet une limite finie en 0. Si bien que le théorème de limite de la dérivée assure que g est dérivable en 0, donc sur $[0, +\infty[$ tout entier.

— L'idée est de considérer une fonction qui tend vers ℓ et qui oscille de plus en plus vite autour de ℓ.

Par exemple, la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}\sin(x^2)$ fait l'affaire.

Il est facile de voir que g tend vers 0 en $+\infty$.

Mais $g' : x \mapsto \dfrac{-1}{x^2}\sin(x^2) + 2\cos(x^2)$ n'a pas de limite en $+\infty$ (WHY ?).

Justifions le WHY.
Par l'absurde, supposons que $g'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L$.
Alors $\cos(x^2)$ admet une limite finie en $+\infty$.

En effet, on a $2\cos(x^2) = g'(x) + \dfrac{-1}{x^2}\sin(x^2)$

Comme $\begin{cases} g'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L \\ \dfrac{-1}{x^2}\sin(x^2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \end{cases}$ alors par somme $2\cos(x^2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L$.

D'où $\cos(x^2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{L}{2}$.

Or, on sait que $\cos(x^2)$ n'a pas de limite en $+\infty$. D'où l'absurdité.

Supposons par l'absurde que $\cos x^2 \xrightarrow[t\to+\infty]{} L$.

On a alors

$\begin{cases} \sqrt{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \\ \cos(t^2) \xrightarrow[t\to+\infty]{} L \end{cases}$ d'où par composition $\cos x \xrightarrow[x\to+\infty]{} L$

D'où l'absurdité (cosinus n'a pas de limite en ∞).

Encore une fois, un élève pourrait me reprocher de ne pas avoir pris une fonction définie sur $[0, +\infty[$! !
Il suffit de considérer la fonction $h : x \mapsto \dfrac{1}{x+3}\sin(x^2)$, qui est définie et dérivable sur $[0, +\infty[$.