

Convexité

I Du vocabulaire et des résultats « élémentaires »	2
II Fonctions convexes et fonctions concaves	3
Définition	
Opérations	
Inégalité de convexité généralisée (HP)	
III Caractérisation de la convexité	7
Pour une fonction quelconque	
Régularité des fonctions convexes (HP)	
Pour une fonction dérivable	
Pour une fonction deux fois dérivable	
IV Des inégalités	13
V Extremums locaux et point d'inflexion	15



I. Du vocabulaire et des résultats « élémentaires »

1

Définition.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$.

- Une combinaison *linéaire* de a et b est un nombre réel qui est de la forme $\lambda a + \mu b$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- Une combinaison *convexe* de a et b est un nombre réel qui est de la forme $\lambda a + \mu b$ avec λ, μ positifs de somme 1.
Ou encore qui s'écrit $(1 - t)a + tb$ avec $t \in [0, 1]$.

- Le nombre 3 est combinaison *linéaire* de 70 et 71, WHY?
Mais 3 n'est pas combinaison *convexe* de 70 et 71!

2

Proposition. Soit $a < b \in \mathbb{R}$.

L'ensemble des combinaisons convexes de a et b est l'ensemble des nombres réels du segment $[a, b]$.

Autrement dit

$$\begin{aligned}[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \lambda, \mu \text{ positifs de somme 1, } x = \lambda a + \mu b\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists t \in [0, 1], x = (1 - t)a + tb\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists s \in [0, 1], x = sa + (1 - s)b\}\end{aligned}$$

- On dit que $(1 - t)a + tb$ est une paramétrisation du segment $[a, b]$ (et t est le paramètre, on peut y penser comme un temps).
- Il est bon de voir la quantité $(1 - t)a + tb$ comme une expression affine de t via $a + t(b - a)$.
- Au cours de la preuve précédente, on a vu qu'un réel $x \in [a, b]$ s'écrit de manière explicite comme combinaison convexe de a et b :

$$x = \frac{b - x}{b - a}a + \frac{x - a}{b - a}b$$

3

preuve

Proposition. Soit I un intervalle.

— On a :

$$\forall a, b \in I, \quad \forall \lambda, \mu \text{ réels positifs de somme 1,} \quad \lambda a + \mu b \in I$$

— On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x_1, \dots, x_n \in I, \quad \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ réels positifs de somme 1,} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in I$$

Autrement dit, un intervalle est stable par combinaison convexe finie.

On dit qu'un intervalle est une partie convexe de $\mathbb{R}$.

On peut faire une preuve par récurrence « à la Jensen ».

On peut aussi considérer un indice m et M tels que $x_m = \min x_i$ et $x_M = \max x_i$.

On a donc $x_m \leq x_i \leq x_M$. On multiplie par λ_i et on somme.

On obtient

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in [x_m, x_M] \quad \text{segment qui est inclus dans } I$$



Petit lemme.

Soit $a < b \in \mathbb{R}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

On considère les deux points du plan suivants $A(a, \alpha)$ et $B(b, \beta)$.

- i) Soit x_0 un réel de $[a, b]$ que l'on écrit $x_0 = a + t_0(b - a)$ avec $t_0 \in [0, 1]$.

Le point d'abscisse x_0 appartenant à $[AB]$ a pour ordonnée $y_0 = \dots$

- ii) Soit x un réel de $[a, b]$ que l'on écrit $x = \lambda a + \mu b$ avec λ, μ positifs de somme 1.

Le point d'abscisse x appartenant à $[AB]$ a pour ordonnée $\dots$

- iii) Supposons A et B sur la courbe d'une fonction f de sorte que $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$.

Soit x un réel de $[a, b]$ que l'on écrit $x = \lambda a + \mu b$ avec λ, μ positifs de somme 1.

Le point d'abscisse x appartenant à $[AB]$ a pour ordonnée $\dots$

- i) L'équation de la droite (AB) est $y = \frac{\beta - \alpha}{b - a}(x - a) + \alpha$.

$$\text{D'où } y_0 = \frac{\beta - \alpha}{b - a}(x_0 - a) + \alpha.$$

Or $x_0 = a + t_0(b - a)$ d'où le résultat.

- ii) On applique le point précédent en remarquant que x s'écrit $x = a + t(b - a)$ avec $t = \mu$.
Ainsi, l'ordonnée cherchée vaut $a + \mu(b - a) = \lambda a + \mu b$.

- iii) C'est un cas particulier du cas précédent.

On trouve que l'ordonnée est $\lambda \alpha + \mu \beta$.

II. Fonctions convexes et fonctions concaves

Définition

5

Définition. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle.

- On dit que f est *convexe* sur I lorsque

$$\forall a, b \in I, \quad \forall \lambda, \mu \text{ réels positifs de somme 1,} \quad f(\lambda a + \mu b) \leq \lambda f(a) + \mu f(b)$$

ou encore

$$\forall a, b \in I, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$$

L'image par f d'une combinaison convexe de a et b est inférieure à cette même combinaison convexe des images de a et b

Graphiquement, f est convexe lorsque $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de ses cordes.

- On dit que f est *concave* sur I lorsque $-f$ est convexe.

- Remarque.**

L'inégalité étant symétrique en a et b , on peut supposer $a \leq b$.

Pour $a = b$, l'inégalité est toujours vérifiée.

Pour $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$, l'inégalité est également toujours vérifiée.



- **Conséquence.**

Pour montrer qu'une fonction est convexe, il suffit d'établir l'inégalité dans le cas où $a < b$ et $\lambda \in]0, 1[$. Cette remarque n'est utile que lorsque les cas extrêmes seraient à traiter à part (et du coup, n'ont pas besoin d'être traités du tout!).

- **Définition équivalente.** Une fonction est convexe sur I lorsque

$$\forall a < b \in I, \quad \forall x \in [a, b], \quad f(x) \leq \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)$$

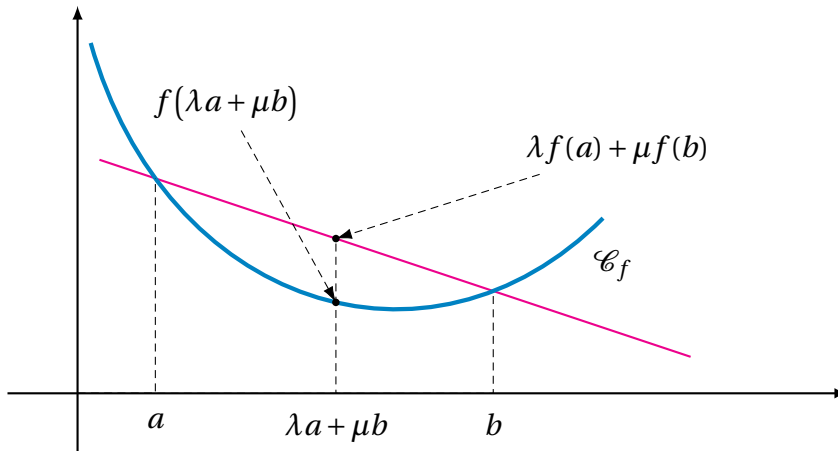


6

Proposition (interprétation géométrique). Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe.

Soit A, B deux points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses $a < b$. Alors :

- le graphe de $f|_{I \cap]-\infty, a]}$ est situé au-dessus de la droite (AB)
- le graphe de $f|_{[a, b]}$ est situé en dessous de $[AB]$
- le graphe de $f|_{I \cap [b, +\infty[}$ est situé au-dessus de la droite (AB)



7

Proposition (fonctions usuelles, 1^{ère} passe).

- Une fonction affine est convexe et concave sur $\mathbb{R}$.
- La fonction valeur absolue est convexe sur $\mathbb{R}$.
- La fonction carré est convexe sur $\mathbb{R}$.

Opérations

- **Somme.** Si f et g sont convexes, alors $f + g$ est convexe.
- ~~**Multiplié par un scalaire.**~~ Si f est convexe, alors λf ne l'est pas forcément.
- ~~**Produit.**~~ Le produit de deux fonctions convexes ne l'est pas forcément.
- ~~**Composée.**~~ La composée de deux fonctions convexes ne l'est pas forcément.
- ~~**Réciproque.**~~ La réciproque d'une bijection convexe n'est pas nécessairement concave.

Inégalité de convexité généralisée (HP)

8

preuve

Proposition (inégalité de convexité généralisée / inégalité de Jensen). Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x_1, \dots, x_n \in I, \quad \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ réels positifs de somme 1,} \quad f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{H}_n$.

Montrons $\mathcal{H}_{n+1}$.

On fixe $y_1, \dots, y_{n+1} \in I$ et $\mu_1, \dots, \mu_{n+1}$ positifs de somme 1.

On a

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i y_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^n \mu_i y_i + \mu_{n+1} y_{n+1}\right)$$

Cas où $\mu_{n+1} = 0$. C'est facile.



Sinon, on pose $\lambda_i = \frac{\mu_i}{1 - \mu_{n+1}}$.

On commence par utiliser la définition de la convexité, puis on utilise $\mathcal{H}_n$.

- Énoncé analogue avec f concave.

- **Exemple.**

La convexité de $x \mapsto x^2$ nous permet d'écrire (WHY?) :

$$\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, \quad \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad \text{donc} \quad \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2.$$



III. Caractérisation de la convexité

Pour une fonction quelconque

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. La fonction taux d'accroissement de f en a est $\tau_{f,a} : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$
$$t \mapsto \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

9

preuve

Proposition (croissance des pentes). Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ quelconque. On a :

$$f \text{ convexe sur } I \iff \forall a \in I, \text{ la fonction } \tau_{f,a} \text{ est croissante sur } I \setminus \{a\}$$

POUR MOI : il serait plus intelligent de démarrer par le lemme des 3 pentes, pour en déduire cette proposition.

On allège les notations : on notera τ_a la fonction $\tau_{f,a}$.

$\Rightarrow$ Supposons f convexe. Fixons $a \in I$. Montrons que τ_a est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

Pour cela, on se donne $x < y$ dans $I \setminus \{a\}$ et on veut montrer que $\tau_a(x) \leq \tau_a(y)$.

On a l'équivalence

$$\tau_a(x) \leq \tau_a(y) \iff \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a}$$

Pour montrer l'inégalité ci-dessus, il est bon de connaître le signe de $x - a$ et $y - a$.

Il y a donc 3 cas à distinguer.

Traisons le cas où $a < x < y$ (je vous laisse les deux autres).

Raisonnons par équivalences successives

$$\begin{aligned} \tau_a(x) \leq \tau_a(y) &\iff \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a} \\ &\stackrel{\text{WHY}}{\iff} (y - a)(f(x) - f(a)) \leq (x - a)(f(y) - f(a)) \\ &\stackrel{\text{WHY}}{\iff} f(x) \leq \frac{y - x}{y - a} f(a) + \frac{x - a}{y - a} f(y) \end{aligned}$$

Comme f est convexe, cette dernière assertion est vraie (WHY?).

$\Leftarrow$ Supposons que $\forall a \in I$, la fonction $\tau_{f,a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

Montrons que f est convexe. Fixons $x, y \in I$ et λ, μ positifs de somme 1.

Quitte à intervertir les rôles joués par x et y , on peut supposer que $x \leq y$ et même $x < y$ (car le cas $x = y$ est immédiat).

On veut montrer que $f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda f(x) + \mu f(y)$.

On pose $c = \lambda x + \mu y$ de sorte que $x < c < y$ et $\lambda = \frac{y - c}{y - x}$ et $\mu = \frac{c - x}{y - x}$.

Raisonnons par équivalences successives

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda f(x) + \mu f(y) &\iff f(c) \leq \frac{y - c}{y - x} f(x) + \frac{c - x}{y - x} f(y) \\ &\iff (y - x)f(c) \leq (y - c)f(x) + (c - x)f(y) \\ &\stackrel{\text{WHY}}{\iff} \frac{f(c) - f(x)}{c - x} \leq \frac{f(y) - f(c)}{y - c} \\ &\iff \tau_c(x) \leq \tau_c(y) \end{aligned}$$

L'assertion finale est vraie (car par hypothèse, la fonction τ_c est croissante).

Donc l'assertion initiale est également vraie.



- La conclusion est forte : il s'agit bien de la croissance de $\tau_{f,a}$ sur $I \setminus \{a\}$ et *pas seulement* de sa croissance sur chacun des deux intervalles $I \cap]-\infty, a[$ et $I \cap]a, +\infty[$.

Rien à voir. La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$, mais n'est pas décroissante sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

10
sol → 0

Question (lemme des 3 pentes).

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Montrer l'inégalité dite des 3 pentes (faire un dessin aussi!) :

$$\forall a < b < c \in I, \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

Note pour MOI. Fixons $a < b < c \in I$. Montrons $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$

Si je m'appuie sur b , c'est-à-dire si je veux taper sur τ_b , alors j'obtiendrai seulement une inégalité faisant intervenir les extrémités, à savoir $\tau_b(a) \leq \tau_b(c)$.

Donc mieux vaut s'appuyer sur a ou c . Disons a .

Montrons que $\tau_a(b) \leq \tau_a(c)$: ce qui est la première inégalité du lemme des 3 pentes.

On montre donc en quelque sorte que la fonction τ_a est croissante sur $I \cap]a, +\infty[$.

Première tentative de preuve.

Fixons $a < b < c \in I$.

Comme $b \in [a, c]$, on a $b = \frac{c-b}{c-a}a + \frac{b-a}{c-a}c$.

De plus, f est convexe, donc

$$f(b) \leq \frac{c-b}{c-a}f(a) + \frac{b-a}{c-a}f(c)$$

On veut faire apparaître $\frac{f(c) - f(a)}{c - a}$ donc on peut faire intervenir $\frac{b-a}{c-a}(f(c) - f(a))$. On a :

$$f(b) \leq \left(\frac{c-b}{c-a} + \frac{b-a}{c-a} \right) f(a) + \frac{b-a}{c-a} (f(c) - f(a))$$

D'où

$$f(b) \leq \underbrace{\frac{c-a}{c-a}}_{=1} f(a) + \frac{b-a}{c-a} (f(c) - f(a))$$

On termine en mettant des termes à gauche et en divisant par $b - a > 0$.

A posteriori, on voit que l'on aurait aussi pu dire : on veut faire intervenir $f(a)$ à deux reprises (à gauche et à droite de l'inégalité), donc écrivons le poids devant $f(a)$ comme étant $1 - \text{truc}$.

Deuxième tentative (mieux!).

Fixons $a < b < c \in I$. Montrons $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$.

Comme $b \in [a, c]$, on a $b = \left(1 - \frac{b-a}{c-a}\right)a + \frac{b-a}{c-a}c$.

De plus, f est convexe, donc

$$f(b) \leq \left(1 - \frac{b-a}{c-a}\right)f(a) + \frac{b-a}{c-a}(f(c) - f(a))$$

D'où $f(b) - f(a) \leq \frac{b-a}{c-a}(f(c) - f(a))$.

D'où le résultat en divisant par $b - a > 0$.



Proposition (HP). Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ quelconque. Soit a un point intérieur à I .

Si f est convexe, alors f est dérivable à droite et à gauche au point $a \in \overset{\circ}{I}$ et $f'_g(a) \leq f'_d(a)$.

Par convexité de f , on a :

$$\forall x, y \in I \setminus \{a\}, \quad x < a < y \implies \tau_a(x) \leq \tau_a(y)$$

Ou encore

$$\forall x \in I \cap]-\infty, a[, \quad \forall y \in I \cap]a, +\infty[, \quad \tau_a(x) \leq \tau_a(y)$$

On va passer à la limite (sur x , puis sur y) mais avant il faut justifier que les limites existent et sont finies.

- Montrons que f est dérivable à gauche en a .

Cela revient à montrer que la limite en a^- de $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie.

Cela revient à montrer que la limite en a de la fonction $(\tau_a)_{|I \cap]-\infty, a[}$ existe et est finie.

Prenons un y dans $I \cap]a, +\infty[$ (il existe, car a est intérieur à I) que l'on fixe une fois pour toutes.

On a donc

$$\forall x \in I \cap]-\infty, a[, \quad \tau_a(x) \leq \tau_a(y)$$

La fonction τ_a restreinte à $I \cap]-\infty, a[$ est croissante.

D'après le théorème de la limite monotone, cette fonction $(\tau_a)_{|I \cap]-\infty, a[}$ admet une limite en a (qui est l'extrémité droite de $I \cap]-\infty, a[$) : cette limite est finie (si cette fonction est majorée) et $+\infty$ sinon.

Or ici on voit que $(\tau_a)_{|I \cap]-\infty, a[}$ est majorée par $\tau_a(y)$.

Donc la limite de $(\tau_a)_{|I \cap]-\infty, a[}$ en a existe et est finie.

Cela signifie exactement que la fonction f est dérivable à gauche en a .

- Montrons que f est dérivable à droite en a .

Cela revient à montrer que la limite en a^+ de $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie.

Cela revient à montrer que la limite en a de la fonction $(\tau_a)_{|I \cap]a, +\infty[}$ existe et est finie.

On fixe cette fois-ci $x \in I \cap]a, +\infty[$ (un tel x existe car a est intérieur à I).

On a donc

$$\forall y \in I \cap]a, +\infty[, \quad \tau_a(x) \leq \tau_a(y)$$

La fonction τ_a restreinte à $I \cap]a, +\infty[$ est croissante.

D'après le théorème de la limite monotone, cette fonction $(\tau_a)_{|I \cap]a, +\infty[}$ admet une limite en a (qui est l'extrémité gauche de $I \cap]a, +\infty[$) : cette limite est finie (si cette fonction est minorée) et $-\infty$ sinon.

Or ici on voit que $(\tau_a)_{|I \cap]a, +\infty[}$ est minorée par $\tau_a(x)$.

Donc la limite de $(\tau_a)_{|I \cap]a, +\infty[}$ en a existe et est finie.

Cela signifie exactement que la fonction f est dérivable à droite en a .

- On a donc montré que f est dérivable à gauche et à droite en a . Reprenons alors l'inégalité :

$$\forall x \in I \cap]-\infty, a[, \quad \forall y \in I \cap]a, +\infty[, \quad \tau_a(x) \leq \tau_a(y)$$

En passant à la limite sur x dans un premier temps (on fixe donc y et on fait varier x), on obtient

$$\forall y \in I \cap]a, +\infty[, \quad f'_g(a) \leq \tau_a(y)$$

En passant à la limite sur y (et à ce stade, x a disparu), on obtient

$$f'_g(a) \leq f'_d(a)$$

- On en déduit alors qu'une fonction convexe sur I est continue en tout point intérieur à I .

- Il existe des fonctions convexes discontinues.

La fonction $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe sur $[0, 1]$ et discontinue en 1.

$$x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Considérons $g: x \mapsto x^2$ convexe sur $[0, 1]$. Les fonctions g et f coïncident sur $[0, 1[$ et $g \leq f$.

Montrons que f est convexe sur $[0, 1]$.

Soit $(x, y) \in [0, 1]^2$ tel que $x < y$ et $\lambda \in]0, 1[$. On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= g(\lambda x + (1 - \lambda)y) && \text{car } \lambda x + (1 - \lambda)y \in [0, 1[\\ &\leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y) && \text{car } g \text{ est convexe} \\ &= \lambda f(x) + (1 - \lambda)g(y) && \text{car } x \in [0, 1[\\ &\leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) && \text{car } g \leq f \text{ et } 1 - \lambda \geq 0 \end{aligned}$$



Pour une fonction dérivable

12

preuve

Proposition (croissance de la dérivée). Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On a :

$$f \text{ convexe sur } I \iff f' \text{ croissante sur } I$$

POUR MOI : modifier l'énoncé en mettant $\dot{I}$ et mettre en remarque le cas pratique!

- Au cours de la preuve, on a vu que si f est une fonction convexe dérivable, alors pour tout $a < b$:

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b),$$

résultat très facile à retrouver sur un dessin.

- La réciproque nécessite en fait seulement la continuité sur I et la dérivabilité sur $\dot{I}$.

On peut montrer que si f est continue sur un intervalle I , dérivable sur $\dot{I}$ de dérivée croissante, alors f est convexe sur I .

13

Proposition (fonctions usuelles, 2^{ème} passe, énoncé non exhaustif).

- La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.
- La fonction logarithme népérien est concave sur $]0, +\infty[$.
- La fonction racine carrée est concave sur $\mathbb{R}^+$.
- La fonction Arcsinus est convexe sur $[0, 1]$.

14

preuve

Proposition (position de la tangente). Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et convexe.

Alors

$$\forall a \in I, \forall x \in I, f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)$$

En français : Si f est convexe, alors $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.

Première preuve. En étudiant la fonction auxiliaire "différence"

Deuxième preuve. Notons $\mathbb{T}_{f,a} : x \mapsto f'(a)(x - a) + f(a)$.

Supposons f est convexe sur I .

Montrons que $\forall a \in I, \forall x \in I, f(x) \geq \mathbb{T}_{f,a}(x)$.

Fixons $a \in I$.

Commençons par écrire des équivalences. Pour tout $x \in I$, on a :

$$f(x) \geq \mathbb{T}_{f,a}(x) \iff f(x) - f(a) \geq f'(a)(x - a)$$

$$\iff \begin{cases} f'(a) \geq \frac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si } x < a \\ f(a) - f(a) \geq f'(a)(a - a) & \text{si } x = a \\ f'(a) \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si } x > a \end{cases}$$

Fixons $x \in I$.

Il y a trois cas.

▷ Le cas $x = a$ est évident : l'inégalité à montrer est une égalité triviale.

▷ Le cas $x > a$.

Comme f est convexe, la fonction τ_a est croissante, et elle tend vers $f'(a)$ en a , on a donc :

$$f'(a) \leq \tau_a(x)$$



D'après les équivalences ci-dessus, on voit que cela implique (c'est même équivalent) :

$$f(x) \geq \mathbb{T}_{f,a}(x)$$

▷ Le cas $x < a$. Idem

15
preuve

Proposition (inégalités de convexité).

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq x + 1$
- $\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leq x$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin x| \leq |x|$

Faire la preuve pour le log de manière indépendante de l'exponentielle.

Faire proprement la preuve pour le sinus.

D'abord, $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad |\sin x| \leq |x|$.

En utilisant que $\mathbb{R}^+ = [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, +\infty[$.

Puis sur $\mathbb{R}^-$. Le faire proprement en prenant un $t \in \mathbb{R}^-$ et en posant $x = -t$ de sorte que $x \in \mathbb{R}^+$.

Il faut penser à dire aux élèves que si on a $g \leq d$ sur $\mathbb{R}^+$ avec g et d paire, alors $g \leq d$ sur $\mathbb{R}^-$.

Ce qui se décline souvent avec $|\tilde{g}| \leq |\tilde{d}|$ et $\tilde{g}$ et $\tilde{d}$ impaires.

Pour une fonction deux fois dérivable

16

Proposition (positivité de la dérivée seconde). Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable. On a :

$$f \text{ convexe sur } I \iff f'' \text{ positive sur } I$$

17 **Question.** La fonction $f : x \mapsto x^x$ est définie sur $D = \dots$

Étudier sa convexité/concavité sur D .

Puis tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$.

18 **Question.** Soit $f : x \mapsto e^{-x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Dresser un tableau de « convexité/concavité » pour f sur $\mathbb{R}$ (du même style qu'un tableau de signe en classe de Seconde).

Dresser un tableau de variations pour f sur $\mathbb{R}$.

Puis tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$.



IV. Des inégalités

19 **Question.** Montrer les inégalités suivantes et les illustrer!

sol → 0

$$1. \forall x \in [1, e], \quad \ln x \geq \frac{x-1}{e-1}$$

$$2. \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin x$$

$$1. \text{ Prouvons que } \forall x \in [1, e], \quad \ln x \geq \frac{x-1}{e-1}.$$

Fixons $x \in [1, e]$. Alors x est combinaison convexe de 1 et e .

En effet, x s'écrit $\lambda \times 1 + \mu \times e$ avec $\lambda = \frac{e-x}{e-1}$ et $\mu = \frac{x-1}{e-1}$ positifs de somme 1.

La fonction $\ln$ est concave, d'où

$$\ln(\lambda 1 + \mu e) \geq \lambda \ln(1) + \mu \ln(e)$$

$$\text{c'est-à-dire } \ln(x) \geq \frac{x-1}{e-1}.$$

$$2. \text{ Montrons que } \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin x.$$

Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Alors x est combinaison convexe de 0 et $\frac{\pi}{2}$.

En effet, x s'écrit $\lambda \times 0 + \mu \times \frac{\pi}{2}$ avec $\lambda = \frac{\frac{\pi}{2}-x}{\frac{\pi}{2}}$ et $\mu = \frac{x-0}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}x$ positifs de somme 1.

La fonction sinus est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, d'où

$$\sin(\lambda 0 + \mu \frac{\pi}{2}) \geq \lambda \sin(0) + \mu \sin(\frac{\pi}{2})$$

$$\text{c'est-à-dire } \sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x.$$

20 **Question.**

sol → 0

Soit a et b deux réels positifs et $(p, q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Montrer l'inégalité de Young

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Si a ou b est nul, alors l'inégalité est évidente. Sinon, la fonction $\ln$ étant concave, on a :

$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q \quad \text{soit} \quad \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \ln(ab).$$

Par croissance de la fonction exponentielle, on en déduit l'inégalité de Young.

21 **Question (Différentes moyennes pour $n = 2$).**

sol → 0

Soit x_1 et x_2 deux réels strictement positifs et $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ de somme 1. On pose

$$A = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \quad G = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2}, \quad H = \left(\lambda_1 \frac{1}{x_1} + \lambda_2 \frac{1}{x_2}\right)^{-1}, \quad Q = \sqrt{\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2}$$

Montrer que $G \leq A$ puis $A \leq Q$ puis $H \leq A$ et enfin $H \leq G$.

• Montrons que $G \leq A$.

Par concavité de la fonction $\ln$ sur $]0, +\infty[$, on a (car λ_1 et λ_2 sont positifs de somme 1),

$$\ln(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geq \lambda_1 \ln x_1 + \lambda_2 \ln x_2$$



Par croissance de la fonction exponentielle, on en déduit :

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \geq \exp(\lambda_1 \ln x_1 + \lambda_2 \ln x_2)$$

Le membre droit vaut $e^{\lambda_1 \ln x_1} e^{\lambda_2 \ln x_2}$ c'est-à-dire $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2}$.

Bilan :

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \geq x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \quad \text{ce qui s'écrit encore} \quad A \geq G$$

- Montrons que $A \leq Q$.

Par convexité de la fonction carré sur $\mathbb{R}$ (ici on ne l'utilise que sur $]0, +\infty[$), on a

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)^2 \leq \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2$$

Par croissance de la fonction racine-carrée, on a

$$\sqrt{(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)^2} \leq \sqrt{\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2}$$

Comme $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \geq 0$, on obtient

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \leq \sqrt{\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2}$$

- Montrons que $H \leq A$.

Par convexité de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$, on a

$$\frac{1}{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2} \leq \lambda_1 \frac{1}{x_1} + \lambda_2 \frac{1}{x_2}$$

Par décroissance de la fonction inverse, on obtient

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \geq \left(\lambda_1 \frac{1}{x_1} + \lambda_2 \frac{1}{x_2} \right)^{-1}$$

c'est-à-dire $A \geq H$.

- Montrons que $H \leq G$.

On a les équivalences

$$\begin{aligned} H \leq G &\iff \frac{1}{H} \geq \frac{1}{G} \\ &\iff \lambda_1 \frac{1}{x_1} + \lambda_2 \frac{1}{x_2} \geq \frac{1}{x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2}} \\ &\iff \lambda_1 \frac{1}{x_1} + \lambda_2 \frac{1}{x_2} \geq \left(\frac{1}{x_1} \right)^{\lambda_1} \left(\frac{1}{x_2} \right)^{\lambda_2} \end{aligned}$$

On a montré que la moyenne arithmétique pondérée est supérieure à la moyenne géométrique pondérée.

Appliquons cette inégalité aux réels $\frac{1}{x_1}$ et $\frac{1}{x_2}$.

On obtient alors

$$\lambda_1 \frac{1}{x_1} + \lambda_2 \frac{1}{x_2} \geq \left(\frac{1}{x_1} \right)^{\lambda_1} \left(\frac{1}{x_2} \right)^{\lambda_2}$$

D'où $H \leq G$.



V. Extremums locaux et point d'inflexion

22

Définition (extremum local).

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overset{\circ}{I}$ un point intérieur à I .

On dit que a est un extremum local de f lorsque la quantité $f(x) - f(a)$ garde un signe constant au voisinage de a .

Graphiquement, $\mathcal{C}_f$ est d'un même côté que la droite (horizontale) d'équation $y = f(a)$

23

preuve

Lemme de l'extremum local en un point intérieur. Pour f dérivable en $a \in \overset{\circ}{I}$, on a :

$$f \text{ admet un extremum local en } a \in \overset{\circ}{I} \implies f'(a) = 0$$

Attention la réciproque est fausse : penser à $f : x \mapsto x^3$ pour $a = 0$.

~~Par contraposée. Supposons que $f'(a) \neq 0$.~~

On a (WHY?) :

$$f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f'(a)(x - a)$$

Ainsi, $f(x) - f(a)$ est du signe de $f'(a)(x - a)$, qui est une quantité qui change de signe au voisinage de a .

On a donc NON (la quantité $f(x) - f(a)$ garde un signe constant au voisinage de a).

24

Définition (point d'inflexion).

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en a point intérieur de I . On note $\mathbb{T}_a(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$.

On dit que a est un point d'inflexion de f lorsque la quantité $f(x) - \mathbb{T}_a(x)$ change de signe au voisinage de a (passe de négatif à positif, ou le contraire)

Graphiquement, $\mathcal{C}_f$ est traversée par sa tangente en a (au voisinage de a).

25

preuve

Lemme du point d'inflexion en un point intérieur.

Pour f deux fois dérivable en $a \in \overset{\circ}{I}$, on a :

$$f \text{ admet un point d'inflexion en } a \in \overset{\circ}{I} \implies f''(a) = 0$$

Attention la réciproque est fausse : penser à $f : x \mapsto x^4$ pour $a = 0$.

~~Preuve : attendre le DL2.~~

Et singer la preuve faite précédemment

Par contraposée. Supposons que $f''(a) \neq 0$.

On a (WHY?) :

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{1}{2} f''(a)(x - a)^2$$

Ainsi, $f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$ est du signe de $f''(a)(x - a)^2$, qui est une quantité qui ne change pas de signe au voisinage de a .

On a donc NON (la quantité $f(x) - f(a)$ change de signe au voisinage de a).



- On aurait tendance à penser que si une fonction admet un minimum local en a , alors f' est négative au voisinage gauche de a et positive au voisinage droit de a . Il n'en est rien.

Voici l'exemple d'une fonction dérivable ayant un minimum en $a = 0$ et dont la dérivée n'est pas négative à gauche de a et n'est pas positive à droite de a .

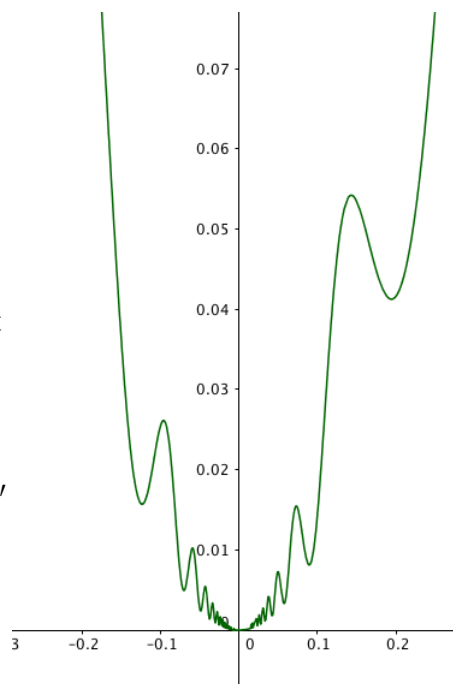
$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} x^2 \left(2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et dérivable en 0 (WHY?) et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = -\cos\left(\frac{1}{x}\right) + 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 4x$$

Vous vérifierez que $f'\left(\frac{1}{2n\pi}\right) \leq 0$ et $f'\left(\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\right) \geq 0$, donc f' ne garde pas un signe constant au voisinage de 0^+ .



- On aurait tendance à penser que si une fonction admet un point d'inflexion en a , alors f'' est d'un certain signe au voisinage gauche de a et de l'autre signe au voisinage droit de a . Il n'en est rien.

Voici l'exemple d'une fonction f deux fois dérivable ayant un point d'inflexion en $a = 0$ (la courbe est en-dessous puis au dessus de la tangente en a), mais pourtant f'' n'est pas négative à gauche de a et n'est pas positive à droite de a .

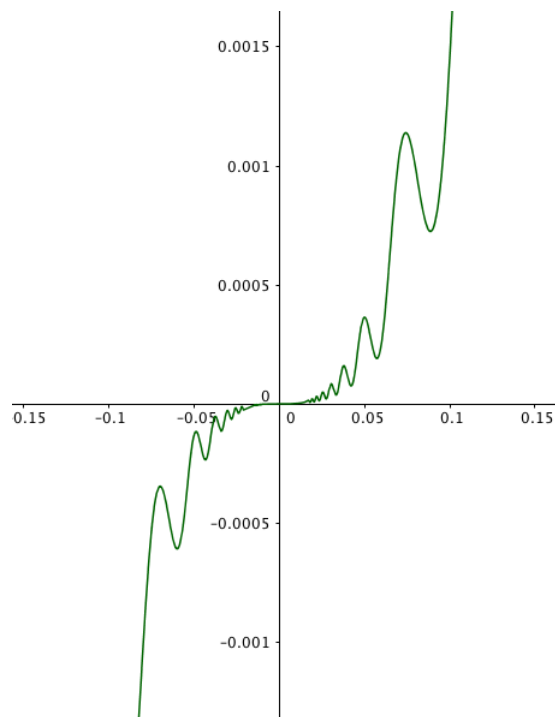
$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} x^3 \left(2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = -x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + 3x^2 \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) + 2 \right)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f''(x) = -4 \cos\left(\frac{1}{x}\right) + 6x \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) + 2 \right) - \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Vous vérifierez que $f''\left(\frac{1}{2n\pi}\right) \leq 0$ et $f''\left(\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\right) \geq 0$, donc f'' ne garde pas un signe constant au voisinage de 0^+ .



Convexité

preuve et éléments de correction