Fonctions rationnelles

I Généralités 2
Définition
Partie entière

II Décomposition en éléments simples (DÉS) 4
Le cas scindé à racines simples (cas SàRS)
Rappel et preuve de la prop 5 (DÉS$_{\text{cas}}$SàRS)

III Des exemples à maîtriser parfaitement 7

IV Application au calcul de primitives et de dérivées $n^{\text{èmes}}$ 8

V D'autres types de décompositions en éléments simples 9

VI La décomposition en éléments simples, cas général. 10

Dans ce chapitre, lorsque $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme, on notera encore P la fonction polynomiale associée, c'est-à-dire l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & P(x) \end{array}$.
Mais il faut garder en tête que cette application n'est pas du même type que le polynôme formel P !

Autre notation pratique : pour un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$, on notera $\mathrm{Rac}(Q)$ l'ensemble de ses racines prises dans $\mathbb{K}$.

I. Généralités

Définition

1 **Définition.** Soit A une partie infinie de $\mathbb{K}$.
Une fonction $f : A \to \mathbb{K}$ est dite *fonction rationnelle* lorsqu'il existe deux polynômes $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ vérifiant :

$$\left(\forall x \in A,\ Q(x) \neq 0\right) \quad \text{et} \quad f : x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$

- La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x^3+x^2-1}{(x-1)(x+2)} \end{array}$ est une fonction rationnelle.
- La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{i\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{1}{z-i} \end{array}$ est une fonction rationnelle.
- Toute fonction polynomiale est en particulier une fonction rationnelle.
- Pour $Q \in \mathbb{K}[X]$ non nul, alors la partie $\mathbb{K} \setminus \mathrm{Rac}(Q)$ est infinie (WHY ?).
  Ainsi, tout couple de polynômes $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec $Q \neq 0$ permet de définir naturellement une fonction rationnelle sur $A = \mathbb{K} \setminus \mathrm{Rac}(Q)$ par $f : x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Partie entière

2 **Proposition (décomposition d'une fonction rationnelle avec sa partie entière).**
Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec $Q \neq 0$.
Il existe un unique couple $(E, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{K} \setminus \mathrm{Rac}(Q), & \dfrac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)} \\ \deg R < \deg Q \end{cases}$$

- Au cours de la preuve, on a vu que le couple (E, R) n'est ni plus ni moins que le quotient et le reste de la division euclidienne de P par Q.
  Le polynôme E s'appelle la *partie entière* de la fonction rationnelle $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$
  La fonction rationnelle $x \mapsto \dfrac{R(x)}{Q(x)}$ n'a pas spécialement de nom, mais notez que $\deg R - \deg Q < 0$.
  De plus, il est bon de remarquer que
  — si $\deg P < \deg Q$, alors $E = 0$
  — si $\deg P \geqslant \deg Q$, alors $\deg E = \deg P - \deg Q$

- **Exemple.** Considérons la fonction rationnelle $f : x \longmapsto \frac{x^5}{x^2+x+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.
Déterminons la partie entière et l'écriture donnée dans la proposition précédente.

La fonction f est de la forme $x \longmapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ avec $P = X^5$ et $Q = X^2 + X + 1$.
La division euclidienne de P par Q s'écrit :

$$P = (X^3 - X^2 + 1)Q - (X + 1).$$

Ainsi, la partie entière de f est le polynôme $X^3 - X^2 + 1$, et l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 - x^2 + 1 - \frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

3 **Question à l'oral.** Pour chaque fonction rationnelle, déterminer rapidement à l'œil nu la partie entière (ou déjà au moins son degré !).

$$f_1 : x \longmapsto \frac{x^3}{x-1} \qquad f_2 : x \longmapsto \frac{x^3}{x^7-1} \qquad f_3 : x \longmapsto \frac{x^7}{x^7+x+1} \qquad f_4 : x \longmapsto \frac{x+1}{3x+7}$$

II. Décomposition en éléments simples (DÉS)

Le cas scindé à racines simples (cas SàRS)

Pour essayer de comprendre en profondeur la « décomposition en éléments simples », on commence par un cas particulier, qui est donc par définition plus faible que le cas général traité après !

4 **Proposition (un cas très particulier).**
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
Soit $\alpha \neq \beta \in \mathbb{K}$ deux scalaires distincts.
Alors, en notant E la partie entière de $x \mapsto \dfrac{P(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)}$, on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{K} \setminus \{\alpha, \beta\}, \qquad \frac{P(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)} = E(x) + \frac{a}{x-\alpha} + \frac{b}{x-\beta} \qquad \text{avec } a = \frac{P(\alpha)}{\alpha-\beta} \text{ et } b = \frac{P(\beta)}{\beta-\alpha}$$

5 **Proposition DÉS$_{\text{cas}}$SàRS.**
Soit $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec $Q \neq 0$.
Supposons le polynôme Q scindé à racines simples.
Alors, en notant E la partie entière de $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ les racines de Q, on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{K} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_q\}, \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \sum_{k=1}^{q} \frac{\lambda_k}{x-\alpha_k} \qquad \text{avec } \forall\, k \in [\![1,q]\!],\ \lambda_k = \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}.$$

- La formule précédente s'appelle **la décomposition en éléments simples** de la fonction rationnelle.
- On peut aussi écrire

$$\forall\, x \in \mathbb{K} \setminus \mathrm{Rac}(Q), \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \sum_{\alpha \in \mathrm{Rac}(Q)} \frac{\lambda_\alpha}{x-\alpha} \qquad \text{avec } \forall\, \alpha \in \mathrm{Rac}(Q),\ \lambda_\alpha = \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$$

- **Autre expression de λ_k.**
  On peut écrire Q sous la forme $Q = (X-\alpha_k)Q_k$.
  On a alors $Q' = Q_k + (X-\alpha_k)Q_k'$ et donc $Q'(\alpha_k) = Q_k(\alpha_k)$.
  On obtient ainsi, pour le coefficient λ_k, une autre expression $\boxed{\lambda_k = \dfrac{P(\alpha_k)}{Q_k(\alpha_k)}}$
- Retenons que :
  — la formule $\lambda_k = \frac{P(\alpha_k)}{Q_k(\alpha_k)}$ est utilisée lorsque le dénominateur est factorisé ;
  — en revanche, on utilise $\lambda_k = \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}$ lorsque le dénominateur apparaît sous forme développée, donc facile à dériver.

6 sol → 12 **Question.** Décomposer en éléments simples $f : z \mapsto \dfrac{10z^3}{(z^2+1)(z^2-4)}$ définie sur $\mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}, 2, -2\}$.

7 sol → 12 **Question.** On pose $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}$.
Décomposer en éléments simples la fonction rationnelle $f : z \mapsto \dfrac{z^5}{z^5-1}$ définie sur $\mathbb{C} \setminus \{1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}$.

8 **Question.** Soit a, b, c, d quatre réels, avec $c \neq 0$.
Considérons la fonction $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.
Déterminer la décomposition en éléments simples de f et puis déterminer f'.

9 **Proposition (polynômes de Lagrange).**
Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_q \in \mathbb{K}$ distincts.

— Pour tout $k \in [\![1, q]\!]$, il existe un unique polynôme L_k tel que

$$\deg L_k \leqslant q-1 \qquad \text{et} \qquad \forall\, i \in [\![1,q]\!], \quad L_k(\alpha_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

— Pour tout $k \in [\![1, q]\!]$, on a :

$$L_k \;=\; \gamma_k \prod_{i \in [\![1,q]\!] \setminus \{k\}} (X - \alpha_i) \qquad \text{où } \gamma_k = \prod_{i \in [\![1,q]\!] \setminus \{k\}} \frac{1}{(\alpha_k - \alpha_i)}$$

— La famille $(L_1, \ldots, L_q)$ est une base de $\mathbb{K}_{q-1}[X]$ et

$$\forall\, R \in \mathbb{K}_{q-1}[X], \quad R = \sum_{k=1}^{q} R(\alpha_k) L_k$$

- Pour se rappeler de la condition sur le degré de L_k, penser à la phrase suivante : « par deux points distincts passe une unique droite ». Ici $q = 2$ et le polynôme est affine, donc de degré $\leqslant 1$.
- Attention, les notations ne sont pas standard. En général (allez au CDI pour ouvrir un bouquin), la numérotation commence à 0 et s'arrête à n, c'est-à-dire que l'on considère $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des scalaires distincts. Dans ce cas, on a $L_k \in \mathbb{K}_n[X]$ il n'y a pas d'erreur, c'est bien $\mathbb{K}_n[X]$ et pas $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

10 **Lemme.** Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_q \in \mathbb{K}$ distincts.
Soit $\mu \in \mathbb{K}$ non nul et posons $Q = \mu(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_q) \in \mathbb{K}_q[X]$.

— Le polynôme Q appartient à $\mathbb{K}_q[X]$.

— Pour tout $k \in [\![1, q]\!]$, le polynôme Q est presque égal au polynôme $(X - \alpha_k) L_k \in \mathbb{K}_q[X]$.
Plus précisément, on a

$$\mu(X - \alpha_k) L_k \;=\; \gamma_k Q$$

où l'on rappelle que $\begin{cases} \mu \text{ est le coefficient dominant de } Q \\ \gamma_k \text{ est le coefficient dominant de } L_k \end{cases}$

— Pour tout $k \in [\![1, q]\!]$, le rapport des coefficients dominants entre Q et L_k est lié à Q' via :

$$Q'(\alpha_k) \;=\; \frac{\mu}{\gamma_k}$$

La preuve de la prop 5 (DÉS$_{\text{cas}}$SàRS)

- **Les notations.**
Comme Q est scindé à racines simples, on peut écrire Q sous la forme $\mu(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_q)$ avec $\mu\neq 0$ et les α_i distincts.
Notons $L_1,\ldots,L_q$ les polynômes de Lagrange associés aux scalaires distincts $\alpha_1,\ldots,\alpha_q$ (qui sont les racines de Q).

- **Travail préparatoire.** Fixons $k\in[\![1,q]\!]$.
  - Le polynôme Q appartient à $\mathbb{K}_q[X]$. Les polynômes L_k sont dans $\mathbb{K}_{q-1}[X]$.
  - Le polynôme Q est presque égal au polynôme $(X-\alpha_k)L_k\in\mathbb{K}_q[X]$.
  Plus précisément, on a (WHY?)
  $$\mu(X-\alpha_k)L_k \;=\; \gamma_k Q \qquad \text{où l'on rappelle que } \begin{cases}\mu \text{ est le coefficient dominant de } Q\\ \gamma_k \text{ est le coefficient dominant de } L_k\end{cases}$$
  En effet,
  $\mu(X-\alpha_k)L_k=$ ....
  - Le rapport des coefficients dominants entre Q et L_k est lié à Q' via $Q'(\alpha_k)=\dfrac{\mu}{\gamma_k}$.
  ....
  ....
  - On a donc
  $$\forall x\in\mathbb{K}\setminus\mathrm{Rac}(Q),\qquad \frac{L_k(x)}{Q(x)} \;=\; \frac{\frac{\gamma_k}{\mu}}{x-\alpha_k} \;=\; \frac{\frac{1}{Q'(\alpha_k)}}{x-\alpha_k}$$

- **Début de la preuve.**
Effectuons la division euclidienne de P par Q :
$$P \;=\; EQ+R \qquad \text{avec } \deg R<\deg Q=q$$
On a alors
$$\forall x\in\mathbb{K}\setminus\mathrm{Rac}(Q),\qquad \frac{P(x)}{Q(x)} \;=\; E(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$$
Comme $R\in\mathbb{K}_{q-1}[X]$, on a (WHY?) :
$$R=\sum_{k=1}^{q}R(\alpha_k)L_k.$$
On a donc
$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{K}\setminus\mathrm{Rac}(Q),\qquad \frac{P(x)}{Q(x)} &= E(x)+\sum_{k=1}^{q}R(\alpha_k)\frac{L_k(x)}{Q(x)}\\ &= E(x)+\sum_{k=1}^{q}R(\alpha_k)\frac{\frac{1}{Q'(\alpha_k)}}{x-\alpha_k}\\ &= E(x)+\sum_{k=1}^{q}\frac{\lambda_k}{x-\alpha_k}\qquad \text{avec } \lambda_k=\frac{R(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}\end{aligned}$$
Pour conclure, constatons que $R(\alpha_k)=P(\alpha_k)$ (en effet, $P=EQ+R$ et α_k est racine de Q).

III. Des exemples à maîtriser parfaitement

- Considérons la fonction rationnelle :

$$f : x \mapsto \frac{x^3 - 2x + 7}{x^2 + x - 2} = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad \text{avec } P = X^3 - 2X + 7 \text{ et } Q = X^2 + X - 2.$$

— La partie entière de f, quotient dans la division euclidienne de P par Q, vaut $X - 1$.

— On a $Q = (X-1)(X+2)$, donc Q est scindé à racines simples.

Ainsi, la proposition 5 assure qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}, \quad f(x) = x - 1 + \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}.$$

Pour trouver a et b, utilisons la formule « $\lambda_k = \dfrac{P(\alpha_k)}{Q_k(\alpha_k)}$ » :

$$a = \frac{1^3 - 2 \times 1 + 7}{1+2} = 2 \qquad \text{et} \qquad b = \frac{(-2)^3 - 2 \times (-2) + 7}{-2-1} = -1.$$

La décomposition en éléments simples de f est donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}, \quad \frac{x^3 - 2x + 7}{x^2 + x - 2} = x - 1 + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}}$$

- Considérons la fonction rationnelle :

$$f : z \mapsto \frac{1}{z^3 - 1} = \frac{P(z)}{Q(z)} \qquad \text{avec } P = 1 \text{ et } Q = X^3 - 1$$

— La partie entière de f est nulle, puisque $\deg P = 0$ et $\deg Q = 3$, donc $\deg P < \deg Q$.

— Le polynôme Q admet 3 racines distinctes : 1, j et $\bar{j}$, donc Q est scindé à racines simples.

Ainsi, la proposition 5 assure qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1, j, \bar{j}\}, \quad f(z) = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z-j} + \frac{c}{z-\bar{j}}.$$

Pour trouver a, b, c, utilisons la formule « $\lambda_k = \dfrac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}$ ». On a $Q = X^3 - 1$, donc $Q' = 3X^2$, d'où :

$$a = \frac{P(1)}{Q'(1)} = \frac{1}{3} \qquad b = \frac{P(j)}{Q'(j)} = \frac{1}{3j^2} = \frac{1}{3} j \qquad \text{et} \qquad c = \frac{P(\bar{j})}{Q'(\bar{j})} = \frac{1}{3\bar{j}^2} = \frac{1}{3}\bar{j}$$

La décomposition en éléments simples de f est donc :

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1, j, \bar{j}\}, \quad \frac{1}{z^3 - 1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-1} + \frac{j}{z-j} + \frac{\bar{j}}{z-\bar{j}}\right).}$$

- Soit Q unitaire scindé à racines simples que l'on écrit $Q = \prod_{k=1}^{q} (X - \alpha_k)$. Alors on a :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{K} \setminus \mathrm{Rac}(Q), \quad \frac{Q'(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{x - \alpha_k}.}$$

En effet, la proposition 5 donne :

$$\forall x \in \mathbb{K} \setminus \mathrm{Rac}(Q), \quad \frac{Q'(x)}{Q(x)} = 0 + \sum_{k=1}^{q} \frac{\lambda_k}{x - \alpha_k} \quad \text{avec } \forall k \in [\![1, q]\!], \ \lambda_k = \frac{Q'(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} = 1.$$

IV. Application au calcul de primitives et de dérivées $n^{\text{èmes}}$

11 **Exemple.** Reprenons la fonction rationnelle $f : x \mapsto \frac{x^3-2x+7}{x^2+x-2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$, dont on a obtenu précédemment la décomposition en éléments simples :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}, \quad f(x) \;=\; x - 1 + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

- Déterminons une primitive de f sur l'intervalle $]-2, 1[$.
  Des primitives sur $]-2, 1[$ des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ et $x \mapsto \frac{1}{x+2}$ sont respectivement

  $$x \mapsto \ln|x-1| \qquad \text{et} \qquad x \mapsto \ln|x+2|$$

  On en déduit une primitive de f sur $]-2, 1[$:

  $$F : x \longmapsto \frac{x^2}{2} - x \;+\; 2\ln|x-1| \;-\; \ln|x+2|,$$

  ou encore, puisque l'on travaille sur l'intervalle $]-2, 1[$:

  $$F : x \longmapsto \frac{x^2}{2} - x \;+\; 2\ln(1-x) \;-\; \ln(x+2).$$

- Déterminons, pour $n \geqslant 2$, l'expression de la dérivée n^{e} de f.
  Les dérivées n^{es} des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ et $x \mapsto \frac{1}{x+2}$ sont respectivement :

  $$x \mapsto \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} \qquad \text{et} \qquad x \mapsto \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}.$$

  La fonction polynomiale $x \mapsto x - 1$ ayant toutes ses dérivées nulles à partir de l'ordre 2, on obtient l'expression suivante pour la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f pour $n \geqslant 2$:

  $$f^{(n)} : x \longmapsto (-1)^n n! \left(\frac{2}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{n+1}}\right).$$

12 **Question.** Soit $n \geqslant 1$. Déterminer une expression pour la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la fonction Arctan.
sol → 12
On pourra donner une expression utilisant $\mathbb{C}$.
Plus difficile, trouver une expression à coefficients réels.

V. D'autres types de décompositions en éléments simples

Toutes les fonctions rationnelles ne rentrent pas dans le cadre de la proposition 5, puisque celle-ci ne s'applique qu'à celles de la forme $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ avec Q *scindé à racines simples*.

Le cas général est hors programme (il fait néanmoins l'objet des résultats énoncés dans le dernier paragraphe de ce chapitre).

Illustrons sur deux exemples quelques techniques qui, en admettant la forme de la décomposition en éléments simples recherchée, permettent d'en déterminer les coefficients.

- **Cas où Q n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, mais est scindé sur $\mathbb{C}$ à racines simples.**

  Considérons la fonction rationnelle $f : x \mapsto \frac{x+1}{x^3-1} = \frac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

  Admettons qu'il existe trois réels a, b et c tels que :

  $$(\star) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

  — **Détermination de a.** En multipliant $(\star)$ par $x-1$, on obtient

  $$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \underbrace{(x-1)f(x)}_{\frac{x+1}{x^2+x+1}} = a + (x-1)\frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

  En passant à la limite quand $x \to 1$, il vient $a = \frac{2}{3}\cdot$

  — **Détermination de b.** En multipliant $(\star)$ par x, on obtient :

  $$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \frac{x(x+1)}{x^3-1} = \frac{ax}{x-1} + \frac{(bx+c)x}{x^2+x+1}$$

  En passant à la limite quand $x \to +\infty$, on obtient $0 = a + b$, donc $b = -\frac{2}{3}\cdot$

  — **Détermination de c.** En évaluant $(\star)$ en $x = 0$, on obtient :

  $$-1 = -a + c \qquad \text{d'où} \qquad c = a - 1 = -\frac{1}{3}\cdot$$

  On obtient :

  $$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x-1} - \frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)\cdot$$

- **Cas où Q est scindé sur $\mathbb{R}$ mais possède des racines multiples.**

  Considérons la fonction rationnelle $f : x \mapsto \frac{x^2+2}{x(x-1)^3}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

  Admettons qu'il existe quatre réels a, b, c et d tels que :

  $$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, \quad f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} + \frac{d}{(x-1)^3}$$

  — Les coefficients a et d se déterminent comme le coefficient a de l'exemple précédent :

  — en multipliant $(\star)$ par x puis en passant à la limite quand $x \to 0$, on obtient $a = -2$;

  — en multipliant $(\star)$ par $(x-1)^3$ puis en passant à la limite quand $x \to 1$, on obtient $d = 3$.

  — En multipliant $(\star)$ par x puis en passant à la limite quand $x \to +\infty$, on a $0 = a + b$, donc $b = 2$.

  — Pour déterminer le dernier coefficient c, évaluons $(\star)$ en -1 :

  $$\frac{3}{8} = -a - \frac{b}{2} + \frac{c}{4} - \frac{d}{8} \qquad \text{d'où} \qquad c = -1.$$

  $$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, \quad f(x) = \frac{-2}{x} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x-1)^3}$$

VI. La décomposition en éléments simples, cas général

Pour finir, donnons deux théorèmes **hors-programme** indiquant la forme de la décomposition en éléments simples dans le cas général.
Néanmoins, il sera intéressant de comprendre qu'ils sont cohérents avec les décompositions en éléments simples obtenues dans les exemples.

Dans ce qui suit, on suppose le polynôme Q unitaire. En particulier, Q est non nul!
Ce n'est pas restrictif, car on peut toujours s'arranger pour « mettre » le coefficient dominant de Q au niveau du numérateur (c'est-à-dire l'inclure dans P).

13 **Proposition (Cas où Q est scindé).**
Soit $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec Q unitaire.
Supposons que le polynôme Q soit scindé sous la forme :

$$Q = \prod_{k=1}^{q} (X-\alpha_k)^{r_k}$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ sont les racines distinctes de Q.
Alors, en notant E la partie entière de $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$, il existe des scalaires $\lambda_{k,\ell}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{K} \setminus \mathrm{Rac}(Q), \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \sum_{k=1}^{q} \sum_{\ell=1}^{r_k} \frac{\lambda_{k,\ell}}{(x-\alpha_k)^{\ell}}.$$

14 **Proposition (Cas général d'une fonction rationnelle réelle).**
Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ avec Q unitaire.
Supposons que le polynôme Q ait l'écriture suivante comme produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$:

$$Q = \prod_{k=1}^{q} (X-\alpha_k)^{r_k} \prod_{k=1}^{p} R_k^{s_k}$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ sont les racines distinctes de Q, et $R_1, \dots, R_p$ des polynômes irréductibles de degré 2, unitaires et distincts.
Alors, en notant E la partie entière de $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$, il existe des réels $\lambda_{k,\ell}$, $a_{k,\ell}$ et $b_{k,\ell}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathrm{Rac}(Q), \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \sum_{k=1}^{q} \sum_{\ell=1}^{r_k} \frac{\lambda_{k,\ell}}{(x-\alpha_k)^{\ell}} + \sum_{k=1}^{p} \sum_{\ell=1}^{s_k} \frac{a_{k,\ell}x + b_{k,\ell}}{R_k(x)^{\ell}}$$

Fonctions rationnelles

preuve et éléments de correction

6

On a $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ avec $\deg P = 3$ et $\deg Q = 4$.
Puisque $\deg P < \deg Q$, la partie entière de f est nulle.
D'autre part, $Q = (X+\mathrm{i})(X-\mathrm{i})(X+2)(X-2)$, donc Q est scindé à racines simples.
La proposition 5 s'applique et on trouve, après calcul des coefficients :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}, 2, -2\}, \quad f(z) = \frac{1}{z-\mathrm{i}} + \frac{1}{z+\mathrm{i}} + \frac{4}{z-2} + \frac{4}{z+2}.$$

7

Notons $A = \mathbb{C} \setminus \{1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}$ l'ensemble de définition de f.

— La division euclidienne du polynôme X^5 par le polynôme $X^5 - 1$ s'écrit $X^5 = (X^5 - 1) + 1$, donc la partie entière de la fonction rationnelle f est 1.

— Le polynôme $Q = X^5 - 1$ étant scindé à racines simples, la proposition 5 s'applique et donne

$$\forall z \in A, \quad f(z) = 1 + \sum_{k=0}^{4} \frac{\lambda_k}{z - \omega^k} \qquad \text{avec} \quad \forall k \in [\![0,4]\!],\ \lambda_k = \frac{(\omega^k)^5}{Q'(\omega^k)}.$$

Comme $Q' = 5X^4$, on a $\quad \forall k \in [\![0,4]\!],\ \lambda_k = \frac{\omega^{5k}}{5\omega^{4k}} = \dfrac{1}{5}\omega^k$.

D'où

$$\forall z \in A, \quad f(z) = 1 + \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{4} \frac{\omega^k}{z - \omega^k}.$$

12

La fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

La décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle $g : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{x-\mathrm{i}} - \frac{1}{x+\mathrm{i}}\right).$$

Les dérivées $n^{\text{èmes}}$ des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x-\mathrm{i}}$ et $x \mapsto \frac{1}{x+\mathrm{i}}$ sont respectivement :

$$x \mapsto \frac{(-1)^n n!}{(x-\mathrm{i})^{n+1}} \qquad \text{et} \qquad x \mapsto \frac{(-1)^n n!}{(x+\mathrm{i})^{n+1}}.$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Arctan}^{(n)}(x) = g^{(n-1)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{(x-\mathrm{i})^n} - \frac{1}{(x+\mathrm{i})^n}\right).$$