Primitives

Calculs d'intégrales

20c-Primitives.pdf, 6 mars 2023, 23:06

Ici, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial (c'est-à-dire d'intérieur non vide, c'est-à-dire contenant au moins deux points distincts).
Les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Ce chapitre n'est pas très « formel » et « abstrait ».
Nous ferons les preuves à l'oral pour gagner du temps et surtout pour se concentrer sur l'objectif du chapitre : traiter plein d'exemples !

I. Primitives

Généralités

1 **Définition.**
Une *primitive* de $f : I \to \mathbb{K}$ est une fonction $F : I \to \mathbb{K}$ dérivable, de dérivée égale à f.

- Une fonction f peut ne pas avoir de primitive (cf. plus tard).
- Une « *fonction-F-qui-est-la-primitive-de-quelqu'un* » est une fonction dérivable.
- UNE primitive d'une fonction continue est de classe $\mathscr{C}^1$.
  C'est en quelque sorte la situation opposée à « LA dérivée d'une fonction $\mathscr{C}^1$ est continue ».
- **Remarque lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.**
  Soit $\varphi : I \to \mathbb{C}$ que l'on écrit $\varphi = f + \mathrm{i}g$ avec f, g à valeurs réelles.
  Si $\begin{cases} f \text{ admet une primitive } F \\ g \text{ admet une primitive } G \end{cases}$ alors la fonction $\varphi = f + \mathrm{i}g$ admet une primitive, à savoir $F + \mathrm{i}G$.
  Pour trouver une primitive d'une fonction à valeurs complexes, il suffit donc de trouver une primitive de sa partie réelle et une primitive de sa partie imaginaire.
- **Un premier exemple !**
  Une primitive de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ est $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dots\dots\dots\dots \end{array}$

  Une *autre* primitive de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ est $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dots\dots\dots\dots \end{array}$

2 preuve **Proposition.**
Soit f définie sur un *intervalle*.
Si f possède UNE primitive F, alors TOUTES les primitives de f sont de la forme $F + c$ où $c \in \mathbb{K}$.

- **Attention 1.** Le résultat est faux si l'on ne se place pas sur un *intervalle*.
- **Attention 2.** Il n'existe jamais une seule primitive. On ne dit donc pas *la* primitive mais *une* primitive.
  Il peut ne pas en exister ; mais s'il en existe, elles sont toutes égales à une constante additive près POURVU QUE L'ON SOIT SUR UN INTERVALLE.
- **Déterminer TOUTES les primitives.**
  Pour déterminer les primitives d'une fonction sur un intervalle, il suffit donc d'en déterminer une. Toutes les autres s'en déduisent à une constante additive près.

Premiers exemples

- **Exemple.** Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$

  La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

  Donc les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2 + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

- **Question posée à un élève de PCSI 3.**
  Déterminer toutes les primitives de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$

  — **Réponse fausse donnée par aucun élève de PCSI 3.**

  ~~La fonction $x \mapsto \ln|x|$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}^*$.~~
  ~~Donc les primitives de f sur $\mathbb{R}^*$ sont les fonctions de la forme $F : x \mapsto \ln|x| + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.~~

  — **Réponse correcte donnée par tous les élèves de PCSI 3.**

  Analyse. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}^*$.

  La fonction $x \mapsto \ln|x|$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}^*$.
  On écrit $\mathbb{R}^*$ comme la réunion d'intervalles $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.
  Il existe donc des constantes c_1 et c_2 telles que :

$$F : x \mapsto \begin{cases} \ln x + c_1 & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) + c_2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

  Synthèse.

  Une telle fonction est dérivable et de dérivée f.

- **Un peu de composition.**
  Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$. Supposons que f admette une primitive F.
  Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Une primitive de $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f(ax+b) \end{array}$ est la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$

- **Un piège ?** Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Une primitive de $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{\lambda x} \end{array}$ est la fonction $\ldots\ldots\ldots\ldots$

Formulaire

Les résultats de ce tableau sont à connaître mais, en cas de doute, il est facile de les vérifier car ils découlent de ceux connus sur la dérivation.

f	Une primitive de f	Intervalle
$x \mapsto x^n$ où $n \in \mathbb{N}$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	$x \mapsto \dfrac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto x^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \ln x$	$x \mapsto x\ln x - x$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \operatorname{ch} x$	$x \mapsto \operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \operatorname{sh} x$	$x \mapsto \operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto -\ln\lvert\cos x\rvert$	$\left]\frac{-\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[\ ;\ k \in \mathbb{Z}$
$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \operatorname{Arctan} x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$	$]-1,1[$
$x \mapsto \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \operatorname{Arccos} x$	$]-1,1[$
$x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ où $\lambda \in \mathbb{C}^*$	$x \mapsto \dfrac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x}$	$\mathbb{R}$

- **La fonction puissance.**
  Même si l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ dépend de la valeur de α,
  il est toujours vrai qu'UNE primitive de $x \mapsto x^\alpha$ est $\begin{cases} x \mapsto \ln x & \text{si } \alpha = -1 \\ x \mapsto \dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} & \text{sinon} \end{cases}$

Quelques opérations

3 **Proposition (combinaison linéaire).**
Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $g : I \to \mathbb{K}$. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
Si $\begin{cases} f \text{ admet une primitive } F \\ g \text{ admet une primitive } G \end{cases}$ alors la fonction $\lambda f + \mu g$ admet une primitive, à savoir $\lambda F + \mu G$.

4 **Proposition (composition).**
Si $\begin{cases} u : I \to \mathbb{R} \text{ est dérivable à valeurs dans } J \\ \varphi : J \to \mathbb{K} \text{ est dérivable} \end{cases}$ alors $u' \times (\varphi' \circ u)$ admet une primitive sur I, à savoir $\varphi \circ u$.

5 **Proposition (puissance entière).** Soit $u : I \to \mathbb{K}$ dérivable.

- **Cas** $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$

  Une primitive de $u' u^n$ est $\begin{cases} \dfrac{1}{n+1} u^{n+1} & \text{si } n \in \mathbb{N} \\ \dfrac{1}{n+1} u^{n+1} & \text{si } n \leqslant -2 \text{ et si } u \text{ ne s'annule pas (c'est-à-dire à valeurs dans } \mathbb{K}^*) \end{cases}$

- **Cas** $n = -1$

  On suppose que u est à valeurs réelles et ne s'annule pas (c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbb{R}^*$).

  Une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est $\ln |u|$.

6 **Proposition (expression polynomiale en** u**)**
Soit $u : I \to \mathbb{K}$ dérivable. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
Une primitive de $u' P(u)$ est $Q(u)$ où Q est un polynôme-primitive de P c'est-à-dire un polynôme vérifiant $Q' = P$.

Des calculs

7 **Exemples.**

- La fonction polynomiale $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$ admet pour primitive $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}\, x^{k+1}$, qui est une fonction polynomiale (sans coefficient constant) !
- Une primitive de $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ est F : .... En effet, F est dérivable et on a $F' = f$.
- Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2+\beta^2}$ est .... Penser à $\frac{1}{x^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta}\frac{\frac{1}{\beta}}{\left(\frac{x}{\beta}\right)^2+1}$.
- Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$ est ....
- Une primitive de $x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^6}$ est ....
- Une primitive de $x \mapsto (\cos x)\big(a\sin^2 x + b\sin x + c\big)$ est ....
- Comme $\operatorname{sh}^{11} t = (\operatorname{sh} t)(\operatorname{sh}^2 t)^5 =$ ....,
  une primitive de $x \mapsto (\operatorname{sh} x)^{11}$ est ....

8 **Méli-Mélo.**

- Une primitive de $x \mapsto \frac{x}{3x^2+1}$ est ....
- Une primitive de $x \mapsto \frac{x}{(3x^2+1)^2}$ est ....
- Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{3x^2+1}$ est ....
- Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3x+1}}$ est ....
- Une primitive de $x \mapsto \sqrt[5]{3x+1}$ est ....

9 sol → 17 **Attention.**

- Soit a un réel.
  Déterminer l'ensemble de définition et une primitive de $f_a : t \mapsto \frac{1}{t-a}$.
- Soit $\omega = a + ib$ un complexe non réel.
  Déterminer l'ensemble de définition et une primitive de $f_\omega : t \mapsto \frac{1}{t-\omega}$.

Fonctions trigonométriques

Des idées générales

- **Puissance de cosinus (ou sinus).**
  Lorsque l'on cherche une primitive de la fonction $x \mapsto \cos^k x$ et plus généralement de tout polynôme en $\cos x$ et $\sin x$, on peut :
  - ou bien linéariser la fonction en utilisant les formules trigonométriques
  - ou bien essayer de se ramener à la dérivée d'une composée
- **Puissance impaire.**
  Pour trouver une primitive de $f : x \mapsto \cos^{2k+1} x$, on peut écrire $f : x \mapsto (\cos x)\left(1-\sin^2 x\right)^k$.

  Pour trouver une primitive de $f : x \mapsto \sin^{2k+1} x$, on peut écrire $f : x \mapsto -(-\sin x)\left(1-\cos^2 x\right)^k$.
- **Produit cosinus-sinus.** On peut penser à utiliser les formules suivantes

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$$

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$$

Des exemples

- Comme $\cos^2 a =$ .... , une primitive de $x \mapsto \cos^2 x$ est ....
- Comme $\cos^3 a = (\cos a)(1-\sin^2 a)$, une primitive de $x \mapsto \cos^3 x$ est ....
- Comme $\cos^3 a = \frac{1}{4}\big(\cos(3a)+3\cos(a)\big)$ (comment trouver cette formule ?),
  une primitive de $x \mapsto \cos^3 x$ est ....
- Comme $\sin^2 a = 1-\cos^2 a$, une primitive de $x \mapsto \sin^2 x$ est ....
- Comme $\sin^2 a =$ .... , une primitive de $x \mapsto \sin^2 x$ est ....
- Comme $\cos(2a)\sin(3a) =$ .... ,
  une primitive de $x \mapsto \cos(2x)\sin(3x)$ est ....

10 **Un exemple instructif (exponentielle-cosinus)**
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ différent de $(0,0)$. Déterminons une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$.

— **Première réponse.**
On remarque que f est la partie réelle de la fonction $x \mapsto e^{(a+ib)x}$.
On en déduit qu'une primitive F de f est donnée par :

$$F : x \longmapsto \operatorname{Re}\left(\frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{(a-ib)e^{(a+ib)x}}{a^2+b^2}\right)$$

c'est-à-dire

$$F : x \longmapsto e^{ax}\left(\frac{a}{a^2+b^2}\cos(bx) + \frac{b}{a^2+b^2}\sin(bx)\right).$$

— **Autre réponse, en croisant les doigts.** On fait le pari qu'il existe une primitive de f « du même type » que f.

Début du brouillon. Soit F une primitive de f de la forme :

$$F : x \longmapsto e^{ax}\Big(\lambda\cos(bx) + \mu\sin(bx)\Big) \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Cette fonction F est dérivable et on a :

$$F' : x \longmapsto ae^{ax}\Big(\lambda\cos(bx) + \mu\sin(bx)\Big) + e^{ax}\Big(-b\lambda\sin(bx) + b\mu\cos(bx)\Big)$$

Il SUFFIT de voir qu'il existe (λ,μ) vérifiant :

$$\begin{cases} a\lambda + b\mu = 1 \\ a\mu - b\lambda = 0. \end{cases}$$

Le déterminant de ce système d'inconnues λ et μ est $\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = a^2+b^2 \neq 0$.

Ainsi, il existe une unique solution donnée par $(\lambda,\mu) = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{b}{a^2+b^2}\right)$.

Fin du brouillon.

Posons F la fonction définie par

$$F : x \longmapsto e^{ax}\left(\frac{a}{a^2+b^2}\cos(bx) + \frac{b}{a^2+b^2}\sin(bx)\right)$$

Cette fonction F est dérivable et après un petit calcul (lequel ?), on trouve $F' = f$.
Donc F est une primitive de f.

Le cas de la fraction rationnelle $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$

11 **Exemple.** Déterminons une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et a non nul.

Pour cela, on distingue trois cas en fonction du nombre de racines *réelles* du polynôme aX^2+bX+c, c'est-à-dire en fonction du signe de son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

— Si $\Delta = 0$, alors en notant r_0 l'unique racine, f est de la forme $f : x \mapsto \dfrac{1}{a(x-r_0)^2}$.

Une primitive de f sur $\mathbb{R} \setminus \{r_0\}$ est donc ....

— Si $\Delta > 0$, alors en notant r_1 et r_2 les racines réelles distinctes, f est de la forme $f : x \mapsto \dfrac{\frac{1}{a}}{(x-r_1)(x-r_2)}$.
D'après le chapitre « Fonctions rationnelles », on sait qu'il existe des constantes λ et μ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{r_1, r_2\}, \quad f(x) = \frac{\lambda}{x-r_1} + \frac{\mu}{x-r_2}.$$

Une primitive de f sur $\mathbb{R} \setminus \{r_1, r_2\}$ est donc ....

— Si $\Delta < 0$, alors en utilisant la forme canonique, f est de la forme $f : x \mapsto \dfrac{\frac{1}{a}}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$ avec $\beta \neq 0$.

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donc ....

12 sol → 17 **Question.** Pour chaque fonction, déterminer l'ensemble de définition puis une primitive :

$f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-3x+2}$ $\qquad f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-4x+4}$ $\qquad f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$ $\qquad f_4 : x \mapsto \dfrac{x^3}{x^2+3x+2}$

II. Existence de primitives

Le théorème fondamental de l'Analyse

Le théorème suivant permet :

— d'assurer l'existence de primitives pour une fonction continue sur un intervalle ;

— de calculer une intégrale à l'aide d'une primitive ;

— de ramener la recherche de primitives à un calcul d'intégrale.

Il est admis pour l'instant, mais sera démontré dans le chapitre « Intégration », où sera définie rigoureusement l'intégrale d'une fonction continue.
Pour une définition de l'intégrale, nous utiliserons pour l'instant les connaissances vues en Terminale.
On généralise au cas des fonctions à valeurs complexes de la façon suivante :

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ est continue et $a, b \in I$. L'intégrale de f entre a et b est définie par :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \big(\operatorname{Re} f(t)\big)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b \big(\operatorname{Im} f(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

13 **Théorème fondamental de l'Analyse.**
Soit $f : I \to \mathbb{K}$ *continue*. Soit $a \in I$.

— La fonction $\Phi : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \end{array}$ est dérivable sur I, et sa dérivée vaut f.

Donc Φ est UNE *primitive de f.*

— De plus, on a $\Phi(a) = 0$.

Donc Φ est LA *primitive de f qui s'annule en a.*

- On a même mieux : la fonction Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I (WHY ?).
- **Le retour de ln.**
  La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $I =]0, +\infty[$. Prenons $a = 1$ qui est bien dans I.
  Le théorème donne donc l'existence d'une unique primitive de f qui s'annule en a.
  Par définition (Terminale et début de l'année), c'est la fonction logarithme népérien !
- **Une notation.** Vous trouverez certains ouvrages qui notent $\displaystyle\int^x f(t)\,\mathrm{d}t$ une primitive générique de f.

  Voici une tentative d'explication. lorsque f est continue sur un intervalle I, et $a, b \in I$, le théorème fondamental de l'Analyse nous dit que $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $x \mapsto \displaystyle\int_b^x f(t)\,\mathrm{d}t$ sont deux primitives et diffèrent donc d'une constante.

Lien entre intégrale et primitive pour une fonction continue

On retrouve la proposition suivante qui a été vue en terminale (pour les fonctions à valeurs réelles) et qui permet de calculer l'intégrale d'une fonction f entre a et b, pour peu que l'on connaisse une primitive de f sur un intervalle contenant a et b.

14 preuve

Proposition.
Soit $f : I \to \mathbb{K}$ *continue.*
On a

$$\forall\, a, b \in I, \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; F(b) - F(a) \quad \text{où } F \text{ est UNE primitive de } f$$

- La quantité $F(b) - F(a)$ est notée $[F]_a^b$ ou $\big[F(t)\big]_a^b$ ou $\Big[F(\star)\Big]_{\star=\alpha}^{\star=\beta}$.
  On peut retenir visuellement :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \big[F(t)\big]_a^b$$

15 sol → 18 **Question.** Montrer que $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}$

Lien entre fonction et dérivée à l'aide d'une intégrale

16 **Corollaire.** Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
On a

$$\forall\, a, b \in I, \quad f(b) - f(a) \;=\; \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Une variante du théorème fondamental de l'Analyse

17 sol → 18 **Question.**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ continue.
Montrer que la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable et déterminer sa dérivée en fonction de f.

III. Recherche de primitives et calcul d'intégrales

Maintenant que le lien entre recherche de primitives et calcul d'intégrales a été rappelé, nous allons donner deux méthodes permettant de simplifier le calcul d'intégrales et donc la recherche de primitives : l'intégration par parties et le changement de variable.
Elles s'appuient sur les résultats énoncés dans le chapitre « Dérivation ».

Intégration par parties

18 preuve

Proposition. Soit u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. On a :

$$\forall\, a,b\in I,\quad \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)\,v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Moralement, la formule d'intégration par parties permet, dans une intégrale, d'éliminer une fonction dont on ne connaît pas de primitive, mais dont la dérivée est plus simple à primitiver. Cette phrase n'est pas très exacte et très rigoureuse, mais elle donne une idée sur le principe.
- L'IPP permet de déterminer des primitives des fonctions ln, Arcsin, Arctan..., en écrivant ces fonctions f sous la forme $1\times f$ (ensuite, on primitive 1 et on dérive f).
- **Une primitive de** $\ln$**.**
  Trouvons une primitive de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$.
  Comme la fonction ln est continue, on peut trouver une primitive avec une intégrale.
  Une primitive est par exemple
  $$x\mapsto \int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t.$$
  Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$ fixé.
  Les fonctions $\begin{cases} u: t\mapsto t \\ v: t\mapsto \ln t\end{cases}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
  Par intégration par parties, on a :
  $$\begin{aligned}\int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t &= \int_1^x u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t\\ &= [u\,v]_1^x - \int_1^x u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= [t\ln t]_1^x - \int_1^x \mathrm{d}t\\ &= x\ln x - x + 1\end{aligned}$$
  Bilan : une primitive de la fonction ln est $x\mapsto x\ln x - x + 1$.
  A retenir : une primitive de la fonction ln est $x\mapsto x\ln x - x$.

19 sol → 19 **Question.** Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction Arctan.

L'utilisation d'intégrations par parties successives permet de calculer une primitive d'une fonction s'écrivant comme le produit d'un polynôme et d'une fonction exponentielle : on dérive le polynôme et l'on primitive la fonction exponentielle jusqu'à ne plus obtenir qu'une fonction exponentielle.

20 **Exemple.** Déterminons une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x^2\,\mathrm{e}^x$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.
Une primitive est $x \mapsto \displaystyle\int_0^x t^2 \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$.
Les fonctions $\begin{cases} u : t \mapsto \mathrm{e}^t \\ v : t \mapsto t^2 \end{cases}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^x t^2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t &= \int_0^x u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t \\ &= [u\,v]_0^x - \int_0^x u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[t^2\mathrm{e}^t\right]_0^x - \int_0^x 2t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\ &= x^2\mathrm{e}^x - \int_0^x 2t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Les fonctions $\begin{cases} u : t \mapsto \mathrm{e}^t \\ v : t \mapsto 2t \end{cases}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Une nouvelle intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_0^x t^2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t &= x^2\mathrm{e}^x - \int_0^x u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t \\ &= x^2\mathrm{e}^x - [u\,v]_0^x + \int_0^x u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= x^2\mathrm{e}^x - \left[2t\mathrm{e}^t\right]_0^x + \int_0^x 2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\ &= x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + \left[2\mathrm{e}^t\right]_0^x \\ &= x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x - 2. \end{aligned}$$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x^2\,e^x$ est donc :

$$x \mapsto x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x.$$

Remarque. On aurait aussi pu directement chercher une primitive de $x \mapsto x^2\,\mathrm{e}^x$ sous la forme :

$$x \mapsto \left(ax^2 + bx + c\right)\mathrm{e}^x$$

Changement de variable

21
preuve

Proposition. Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieurs non vides.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Soit $\varphi : J \to I$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
Alors :

$$\forall\, \alpha, \beta \in J, \qquad \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(s)\,\mathrm{d}s$$

- La fonction φ de l'énoncé n'a pas besoin d'être bijective (même si elle le sera souvent dans nos exemples). On lui demande juste d'être de classe $\mathscr{C}^1$.

Des exemples

- **Utilisation de G à D.**
On a :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos t\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi/2} \varphi(t)^2\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{où } \varphi : t \mapsto \sin t \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ (ou sur } [0, \tfrac{\pi}{2}])\\ &= \int_0^1 s^2\,\mathrm{d}s\\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 t\sqrt{4-t^2}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_{-1}^2 \sqrt{4-\varphi(t)}\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{où } \varphi : t \mapsto t^2 \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ (ou sur } [-1,2])\\ &= \frac{1}{2}\int_1^4 \sqrt{4-s}\,\mathrm{d}s\\ &= \left[-\frac{1}{3}(4-s)^{\frac{3}{2}}\right]_1^4\\ &= \sqrt{3}.\end{aligned}$$

- **Remarque sur G → D.** On constate que l'on aurait pu se passer de changement de variable et écrire directement :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad \int_{-1}^2 t\sqrt{4-t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{-2}\frac{1}{\frac{3}{2}}(4-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^2 = \sqrt{3}$$

- **Utilisation de D à G.**
Déterminons une primitive sur $[-1,1]$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ à l'aide du changement de variable utilisant la fonction sinus.

On sait qu'une primitive est donnée par $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \sqrt{1-s^2}\,\mathrm{d}s$.
Pour cela, on utilise le changement de variable $s = \sin\theta$.
Précisément, on pose $\varphi : \begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [-1,1] \\ \theta & \longmapsto & \sin\theta \end{array}$ qui est de classe $\mathscr{C}^1$.
Le théorème de changement de variable fournit :

$$\int_0^x \sqrt{1-s^2}\,\mathrm{d}s = \int_0^{\operatorname{Arcsin} x} \cos\theta\,\sqrt{1-\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

Poursuivons les calculs

$$\begin{aligned}
\int_0^x \sqrt{1-s^2}\,\mathrm{d}s &= \int_0^{\operatorname{Arcsin} x} \cos\theta\left|\cos\theta\right|\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\operatorname{Arcsin} x} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{Arcsin} x} \big(1+\cos(2\theta)\big)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{\operatorname{Arcsin} x} \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin} x+\frac{1}{4}\sin(2\operatorname{Arcsin} x) \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin} x+\frac{1}{2}\sin(\operatorname{Arcsin} x)\cos(\operatorname{Arcsin} x) \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin} x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}.
\end{aligned}$$

Justifions la dernière ligne.

On a toujours $\sin(\operatorname{Arcsin} x)=x$ (sans condition particulière sur x, mise à part le fait d'être dans l'ensemble de définition de Arcsin).

On a $\cos^2(\operatorname{Arcsin} x)=1-\sin^2(\operatorname{Arcsin} x)=1-x^2$.

Comme $\operatorname{Arcsin} x\in[-\pi/2,\pi/2]$, on a $\cos(\operatorname{Arcsin} x)\geqslant 0$ donc $\cos(\operatorname{Arcsin} x)=\sqrt{1-x^2}$.

Bilan. Une primitive de $x\mapsto\sqrt{1-x^2}$ est $x\mapsto\frac{1}{2}\operatorname{Arcsin} x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$.

Remarque pour la culture.

Bien qu'étant la somme de deux fonctions non dérivables en 1 et -1, la fonction $x\mapsto\frac{1}{2}\operatorname{Arcsin} x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$ est dérivable sur $[-1,1]$.

En effet, cette fonction est égale à $x\mapsto\int_0^x\sqrt{1-s^2}\,\mathrm{d}s$ qui est dérivable sur $[-1,1]$ en vertu du théorème fondamental de l'Analyse.

Morale de l'histoire

- **De G à D.** C'est quand on reconnaît une forme $(f\circ\varphi)\,\varphi'$. C'est en général « bas de gamme », car on peut se passer de la formule (confer les exemples ci-après).
- **De D à G.** Il vaut avoir une idée géniale : celle d'introduire une bonne fonction φ, puis :
  - — remplacer x par $\varphi(t)$
  - — remplacer $\mathrm{d}x$ par $\varphi'(t)\mathrm{d}t$.
  - — adapter les bornes

22 sol → 20 **Question.**

1. Déterminer les primitives sur $]0,\pi[$ de la fonction $f: x\mapsto\dfrac{1}{\sin x}$ en utilisant le changement de variable $\varphi:\theta\mapsto\tan\dfrac{\theta}{2}$.
2. En déduire les primitives sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ de la fonction $g: x\mapsto\dfrac{1}{\cos x}$.

Primitives

Calculs d'intégrales

preuve et éléments de correction

2

Supposons que f possède une primitive F.
Montrons $\text{Primitives}(f) = \left\{F + c \mid c \in \mathbb{K}\right\}$.
L'inclusion $\supset$ est facile.
L'autre inclusion $\subset$. Soit G une primitive de f.
Alors la fonction $G - F$ est de dérivée nulle sur l'intervalle I.
Elle est donc constante.
Donc il existe $c \in \mathbb{K}$ tel que $G - F = c$

9

— La fonction f_a est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.
Une primitive de f_a est $F_a : t \mapsto \ln|t - a|$.

— La fonction f_ω est définie sur $\mathbb{R}$.
On a

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f_\omega(t) = \frac{\overline{t-\omega}}{|t-\omega|^2} = \frac{(t-a)+\mathrm{i}b}{(t-a)^2+b^2} = \frac{t-a}{(t-a)^2+b^2} + \mathrm{i}\frac{b}{(t-a)^2+b^2}$$

Donc une primitive de f_ω est $F_\omega : t \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left((t-a)^2+b^2\right) + \mathrm{i}\,\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{t-a}{b}\right)$.

Remarque pour la culture. La fonction F_ω s'écrit encore

$$F_\omega : t \mapsto \ln|t-\omega| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{\mathrm{Re}(t-\omega)}{\mathrm{Im}(t-\omega)}\right)$$

12

1. La fonction f_1 est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$ qui est la réunion suivante $D =]-\infty, 1[\cup]1, 2[\cup]2, +\infty[$.
On a :
$$\forall\, x \in D, \quad \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}.$$
Une primitive de f_1 sur D est $x \mapsto \ln\left|\dfrac{x-2}{x-1}\right|$.
2. La fonction f_2 est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{2\} =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$.
On a :
$$\forall\, x \in D, \quad \frac{1}{x^2-4x+4} = \frac{1}{(x-2)^2}.$$
Une primitive de f_2 sur D est donc $x \mapsto \dfrac{-1}{x-2}$.
3. La fonction f_3 est définie sur $\mathbb{R}$.
On a
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$
Une primitive de f_3 sur $\mathbb{R}$ est donc $x \mapsto \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$.

4. Écrivons la division euclidienne de X^3 par X^2+3X+2 :

$$X^3 = (X^2+3X+2)(X-3)+(7X+6)$$

On a donc

$$f_4 : x \mapsto x-3+\frac{7x+6}{x^2+3x+2}$$

Décomposons en éléments simples la fonction rationnelle. Vous devez trouver :

$$f_4 : x \mapsto x-3+\frac{-1}{x+1}+\frac{8}{x+2}$$

Une primitive de f_4 sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,-2\}$ est donc

$$x \mapsto \frac{1}{2}x^2-3x-\ln|x+1|+8\ln|x+2|$$

14

Soit $a, b \in I$.
D'après le théorème fondamental de l'Analyse appliqué à f et $a \in I$, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f.
Maintenant, prenons F une primitive quelconque de f et montrons l'égalité.
Sur un intervalle, deux primitives diffèrent d'une constante, donc il existe une constante $c \in \mathbb{K}$ telle que :

$$\forall x \in I, \quad F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + c$$

En particulier pour $x = a$ et $x = b$, on a :

$$\begin{aligned} F(b)-F(a) &= \left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + c\right) - \left(\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t + c\right) \\ &= \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

15

Il s'agit de trouver une primitive de $\cos^2$. Pour cela, il faut penser à linéariser.
On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\big(1+\cos(2t)\big)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin(2t)\right)\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2}\left(2\pi+\frac{1}{2}\sin(4\pi)\right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

17

Comme f est continue, f admet une primitive F en vertu du théorème fondamental de l'Analyse.
On a $g : x \mapsto F(x^3) - F(x^2)$.
Montrons que g est dérivable, en montrant que $x \mapsto F(x^3)$ et $x \mapsto F(x^2)$ le sont.
On a $\begin{cases} x \mapsto x^3 \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ à valeurs dans } \mathbb{R} \\ t \mapsto F(t) \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \end{cases}$
Par composition, la fonction $x \mapsto F(x^3)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On montre de même que $x \mapsto F(x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = 3x^2 f(x^3) - 2x f(x^2).$$

Remarque. On a un énoncé très général qui couvre l'exercice ci-dessus.
Soit I et J deux intervalles d'intérieur non vide.
Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue.
Soit α et β deux fonctions dérivables définies sur J à valeurs dans I.
Alors la fonction :

$$g : x \mapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) \mathrm{d}t$$

est dérivable sur J et on a :

$$\forall x \in J, \quad g'(x) = \beta'(x) f\big(\beta(x)\big) - \alpha'(x) f\big(\alpha(x)\big).$$

18

Comme u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, il en est de même de la fonction $u\,v$, et la proposition 16 permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \Big[u(t)\,v(t)\Big]_a^b &= \int_a^b (u\,v)'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

19

Une primitive est donnée par $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \operatorname{Arctan} t\,\mathrm{d}t$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
Les fonctions $\begin{cases} u : t \mapsto t \\ v : t \mapsto \operatorname{Arctan} t \end{cases}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^x \operatorname{Arctan} t\,\mathrm{d}t &= \int_0^x u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t \\ &= [u\,v]_0^x - \int_0^x u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= [t \operatorname{Arctan} t]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2). \end{aligned}$$

Bilan : une primitive de la fonction Arctan est $x \mapsto x \operatorname{Arctan} x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

21

Comme f est continue sur I, elle possède une primitive F, qui est alors de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
Par composition, la fonction $F \circ \phi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J et sa dérivée est $(f \circ \varphi)\varphi'$.
D'où

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\,\phi'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t)\,\phi'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \big[F \circ \varphi\big]_\alpha^\beta \\
&= \big[F\big]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \\
&= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

22

1. Une primitive de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sin x}$ est $x \longmapsto \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{1}{\sin t}\,\mathrm{d}t$.

   On rappelle que

$$\forall\, t \in\,]0,\pi[, \quad \sin t \;=\; \frac{2\tan\dfrac{t}{2}}{1+\tan^2\dfrac{t}{2}}.$$

   Considérons la fonction $\varphi : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow &]0,\pi[\\ t & \longmapsto & \tan\frac{t}{2} \end{array}$ qui est de classe $\mathscr{C}^1$ et $\varphi' : t \longmapsto \dfrac{1}{2}(1+\tan^2\frac{t}{2})$.

   Soit $x \in\,]0,\pi[$. On a :

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{1}{\sin t}\,\mathrm{d}t &= \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{1+\tan^2\frac{t}{2}}{2\tan\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^x \underbrace{\frac{1}{\tan\frac{t}{2}}\,\frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{t}{2})\,\mathrm{d}t}_{\frac{1}{\varphi(t)}\varphi'(t)\mathrm{d}t} \\
&= \int_1^{\tan\frac{x}{2}} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s \\
&= \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right).
\end{aligned}$$

   Ainsi, une primitive de f sur $]0,\pi[$ est

$$x \longmapsto \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right).$$

   Autre solution. On remarque que :

$$\forall\, x \in\,]0,\pi[, \qquad \frac{1}{\sin x} = \frac{1+\tan^2\dfrac{x}{2}}{2\tan\dfrac{x}{2}} = \frac{u'(x)}{u(x)} \quad \text{avec } u : \begin{array}{ccc}]0,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan\dfrac{x}{2}. \end{array}$$

   Ainsi, une primitive de f sur $]0,\pi[$ est $x \longmapsto \ln|u(x)| = \ln\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)$.

2. Une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{\cos x}$ est $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}t$.

   Soit $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

   Pour cela, on fait le changement de variable $u = t + \pi/2$. On a donc :

$$\int_0^x \frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^{x+\pi/2} \frac{1}{\sin u}\,\mathrm{d}u = \left[\ln\left(\tan\frac{u}{2}\right)\right]_{\pi/2}^{x+\pi/2} = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

   Ainsi, une primitive de g sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ est

$$x \mapsto \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right).$$