Primitives

exercices

101 **De tête**

Déterminer une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t\,\ln t}$ sur $]1, +\infty[$.

102 **Avec des fonctions rationnelles**

Pour tout entier n, on note $f_n : t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$ et F_n la primitive de f_n s'annulant en 0.

1. Déterminer F_0, F_1 et F_2.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une relation entre F_n et F_{n+1}.
3. En déduire F_3.

103 **Calculs d'intégrales (1)**

Calculer les intégrales :

$$I = \int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \qquad J = \int_1^2 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x \qquad K = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{(\ln x)^n}{x}\mathrm{d}x \qquad L = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6}\mathrm{d}x$$

104 **Un calcul d'intégrale (2)**

1. Soit $x > 0$. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{1}{t(1+t^4)}\mathrm{d}t$.
2. Retrouver ce résultat en dérivant $f : x \mapsto \displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{1}{t(1+t^4)}\mathrm{d}t$.

105 **Un calcul d'intégrale (3)**

Calculer $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t$. À l'aide du changement de variable $x = t^2$, en déduire que

$$\int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1}\mathrm{d}x = 2\sqrt{3} - \frac{\pi}{6} - 2$$

106 **Deux calculs**

En intégrant par parties, calculer

$$A = \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad B = \int_0^1 x(\operatorname{Arctan} x)^2\mathrm{d}x$$

Vous devez trouver $A = -\frac{3\ln(3)}{2} + 3\ln(2)$ et $B = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$

IPP

107 **Une petite IPP** seul

Considérons $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\mathrm{e}^{-x} \end{array}$

1. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, déterminer $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.
2. Donner une primitive de f.
3. Donner la primitive de f qui s'annule en 0.

108 **Dérivons !**

1. Vérifier que $x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$.

109 Une intégrale classique

Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I(p,q) = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q \mathrm{d}x$.

1. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Trouver une relation entre $I(p,q)$ et $I(p-1,q+1)$.
2. En déduire $I(p,q)$ pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.

110 Wallis, 1ère version

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \; \mathrm{d}t$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_{2n} en fonction de n.
3. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ (n+1)u_{n+1}u_n = \frac{\pi}{2}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. En déduire la valeur de u_{2n+1} en fonction de n.

111 Wallis, 2ème version

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t \; \mathrm{d}t$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Lorsque $n \geqslant 2$, donner une relation entre I_n et I_{n-2}.
   En déduire la valeur de $I_n I_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$.
3. Calculer I_{2p} pour tout $p \in \mathbb{N}$. En déduire I_{2p+1}.

112 Primitives à l'aide d'une IPP

En intégrant par parties, déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x) \qquad g : x \mapsto (\ln x)^2 \qquad h : x \mapsto \sin(\ln x)$$

113 Une primitive de Arcsin

Déterminer une primitive sur $]-1,1[$ de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$. Et sur $[-1,1]$?

114 L'exponentielle comme limite d'une somme

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $a \in \mathbb{R}$, on pose

$$I_n(a) = \int_0^a \frac{t^n}{n!} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$$

Fixons $a \in \mathbb{R}$ une fois pour toutes.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Établir une relation de récurrence entre $I_{n+1}(a)$ et $I_n(a)$.
2. En déduire que
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad I_n(a) = 1 - \mathrm{e}^{-a} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}$$
3. On montrera dans le chapitre « Intégration » qu'il existe $K_a \in \mathbb{R}$ tel que
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |I_n(a)| \leqslant K_a \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}$$
   En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}$ existe et la déterminer.
   Quelle belle égalité a-t-on démontrée dans cet exercice ?

Changement de variable et fonctions trigonométriques

115 **Avec du cosinus et du sinus**

On pose $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \,\mathrm{d}x$.

1. Calculer $I + J$.
2. À l'aide d'un changement de variable affine, montrer que $I = J$ et en déduire leur valeur commune.
3. Donner, sans faire de calcul de primitive, la valeur de $K = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^2 x \,\mathrm{d}x$.

116 **Exponentielle et sinus**

Soit $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^t \sin t \,\mathrm{d}t$ et $K = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-t} \sin t \,\mathrm{d}t$

1. À l'aide d'une double intégration par parties, montrer que $I = \dfrac{\mathrm{e}^{\pi} + 1}{2}$.
2. À l'aide d'un changement de variable affine, montrer que $K = \mathrm{e}^{-\pi} I$.

117 **Astucieux !**

Calculer $I = \displaystyle\int_{-\pi/8}^{\pi/8} \mathrm{Arctan}\left(\frac{1+x^4}{1+x^2}\right) \sqrt[3]{\sin x^3} \sin\left(\sqrt{1-x^2}\right) \mathrm{d}x$.

118 **Parité...**

Calculer $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{x^2 + x^4} \,\mathrm{d}x$.

119 **Changement de variable (1)**

En posant le changement de variable $x = \cos t$, calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \mathrm{d}x$.

120 **Changement de variable (2)** difficile

1. En utilisant le changement de variable $\theta \mapsto \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, déterminer une primitive sur $]-\pi, \pi[$ de $f : x \mapsto \dfrac{1}{2 + \cos x}$.
2. Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de f. On s'aidera de la primitive trouvée à la question précédente. On déterminera son ensemble de définition, puis, on donnera une expression d'une primitive sur $\mathbb{R}$ utilisant la fonction partie entière.

121 **Changement de variable (3)**

Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \sin x} \mathrm{d}x$. On utilisera une symétrie pour réduire le domaine d'intégration. Puis, on posera $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

122 **Changement de variable (4)**

Soit $a > 0$. En utilisant le changement de variable $y = \sqrt{\mathrm{e}^t - 1}$ que l'on justifiera, calculer :

$$L = \int_1^a \frac{\mathrm{e}^t}{(3 + \mathrm{e}^t)\sqrt{\mathrm{e}^t - 1}} \mathrm{d}t$$

123 **L'exo de khôlle !**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall x \in [a, b], \quad f(a + b - x) = f(x)$$

Montrer que

$$\int_a^b x f(x) \mathrm{d}x = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) \mathrm{d}x$$

124 Primitives

Déterminer, sans aucun calcul d'intégrale, les primitives des fonctions suivantes.

$f_1 : x \mapsto xe^{-2x^2}$

$f_2 : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$

$f_3 : x \mapsto \dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$

$f_4 : x \mapsto \dfrac{\cos(\ln x)}{x}$

$f_5 : x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$

$f_6 : x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$

$f_7 : x \mapsto \cos x \sin^5 x$

$f_8 : x \mapsto \sin^5 x$

$f_9 : x \mapsto \tan^2(x)$

$f_{10} : x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^4}$

$f_{11} : x \mapsto \dfrac{1}{\tan x}$

$f_{12} : x \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^3}$

$f_{13} : x \mapsto \dfrac{\sin(2x)}{1+\cos^2(x)}$

$f_{14} : x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)\sqrt{\tan x}}$

$f_{15} : x \mapsto \dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$

$f_{16} : x \mapsto \dfrac{\ln(\ln x)}{x}$

$f_{17} : x \mapsto e^{e^x+x}$

$f_{18} : x \mapsto \dfrac{1}{x+x(\ln x)^2}$

$f_{19} : x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$

$f_{20} : x \mapsto e^{-x}\sin(2x)$

$f_{21} : x \mapsto \operatorname{sh} x \sin x.$

125 IPP

En utilisant une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes.

$$I_1 = \int_0^1 t^2 \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t \qquad I_4 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t \qquad I_7 = \int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$I_2 = \int_1^e t^2 \ln t \,\mathrm{d}t \qquad I_5 = \int_1^2 \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \qquad I_8 = \int_0^1 \operatorname{Arcsin}(x)^2\,\mathrm{d}x$$

$$I_3 = \int_0^\pi t\sin(3t)\,\mathrm{d}t \qquad I_6 = \int_0^1 t^3\,\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t \qquad I_9 = \int_0^{\sqrt{3}} x^2 \operatorname{Arctan}(x)\,\mathrm{d}x$$

126 Changement de variables

À l'aide d'un changement de variable, calculer les intégrales suivantes.

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t \qquad I_6 = \int_1^{e^\pi} \sin(\ln t)\,\mathrm{d}t \qquad I_{11} = \int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$$

$$I_2 = \int_0^1 x\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \qquad I_7 = \int_{1/3}^1 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\mathrm{d}x \qquad I_{12} = \int_{1/4}^1 \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$$

$$I_3 = \int_2^3 \frac{t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t \qquad I_8 = \int_1^2 (\ln x)^2\,\mathrm{d}x \qquad I_{13} = \int_0^\pi \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$I_4 = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad I_9 = \int_0^1 \frac{x^2}{x^6+1}\,dx$$

$$I_5 = \int_0^{\ln 2} \sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x \qquad I_{10} = \int_{-1}^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx \qquad I_{14} = \int_1^2 \frac{\ln(1+t)-\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

127 Dérivation d'intégrales à bornes variables

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Justifier que les fonctions suivantes sont de classe C^1 et exprimer leurs derivées.

$$\Psi_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{2x}^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \qquad \Psi_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{x} f(t+x)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

$$\Psi_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{x} x\,f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \qquad \Psi_4 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_\pi^{2\pi} \frac{\cos(tx)}{t}\,\mathrm{d}t \end{array}$$

Encore de la dérivation

128 Une inégalité

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.
On note $M = \sup\limits_{[a,b]} |f''|$ et

$$g(x) \ = \ f(x) - M\frac{(x-a)(b-x)}{2} \qquad h(x) \ = \ f(x) + M\frac{(x-a)(b-x)}{2}$$

1. Justifier l'existence de M.
2. Montrer que g est convexe et que h est concave.
3. En déduire que : $\qquad \forall\, x \in [a,b], \qquad |f(x)| \ \leqslant \ M\dfrac{(x-a)(b-x)}{2}$

129 La fonction nulle

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que f admette une limite finie ℓ en $+\infty$.
   Montrer qu'il existe une suite (c_n) tendant vers $+\infty$ telle que $f'(c_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   Utiliser le TAF sur des intervalles bien choisis de sorte á assurer la limite de (c_n).

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f^2 + (1+f')^2 \leqslant 1$.
   Montrer que f est identiquement nulle.

   Montrer que f est monotone, et étudier les limites en $\pm\infty$.

130 Limites de f et f' en $+\infty$

1. Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable.
   On suppose que les limites en $+\infty$ de f et f' existent et valent ℓ et ℓ'.
   Montrer que $\ell' = 0$.
2. Soit $g : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable.
   Vrai ou faux ?
   — Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x) = 0$, alors g possède-t-elle nécessairement une limite en $+\infty$?
   — Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ existe, alors g' possède-t-elle nécessairement une limite en $+\infty$?

Primitives
corrigés

101

Notons f la fonction de l'énoncé, à savoir $t \mapsto \dfrac{1}{t\,\ln t}$.
Posons $u : t \mapsto \ln t$.
La fonction f s'écrit donc $t \mapsto \dfrac{u'(t)}{u(t)}$.
Ainsi, une primitive de f est $t \mapsto \ln|u(t)|$.
Sur $]1, +\infty[$, une primitive de f est donc $t \mapsto \ln(\ln t)$.

1. On a
$$f_0 : t \mapsto 1 \qquad f_1 : t \mapsto \frac{1}{1+t^2} \qquad f_2 : t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^2}$$
Une primitive de f_0 est $t \mapsto t$. Donc la primitive de f_0 qui s'annule en 0 est $F_0 : t \mapsto t$.

   Une primitive de f_1 est $t \mapsto \operatorname{Arctan} t$.
   Donc la primitive de f_1 qui s'annule en 0 est $F_1 : t \mapsto \operatorname{Arctan} t$.

   La fonction f_2 est continue sur $\mathbb{R}$.

   La primitive de f_2 qui s'annule en 0 est $F_2 : x \mapsto \int_0^x f_2(t)\mathrm{d}t$ d'après le théorème fondamental de l'Analyse.
   Fixons $x \in \mathbb{R}$ et calculons cette intégrale. En remarquant que
$$f_2(t) \;=\; \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^2}$$
on a, par intégration par parties :
$$\begin{aligned} F_2(x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t + \int_0^x \frac{-2t}{(1+t^2)^2} \times \frac{t}{2}\mathrm{d}t \\ &= \operatorname{Arctan}(x) + \left[\frac{1}{1+t^2} \times \frac{t}{2}\right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{1+t^2} \times \frac{1}{2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}(x) + \frac{x}{2(1+x^2)}. \end{aligned}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par intégration par parties, on a :
$$\begin{aligned} F_{n+1}(x) &= \int_0^x \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t + \int_0^x \frac{-2nt}{(1+t^2)^{n+1}} \times \frac{t}{2n}\mathrm{d}t \\ &= F_n(x) + \left[\frac{1}{(1+t^2)^n} \times \frac{t}{2n}\right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} \times \frac{1}{2n}\mathrm{d}t \\ &= \frac{2n-1}{2n}F_n(x) + \frac{x}{2n(1+x^2)^n}. \end{aligned}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant l'expression de F_2 et la question précédente, on trouve :
$$F_3(x) = \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{8}\frac{x}{1+x^2} + \frac{3}{8}\operatorname{Arctan}(x).$$

103

- On a :

$$I = \int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \;=\; \int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - 1\right)\mathrm{d}t \;=\; \left[2\sqrt{t} - t\right]_1^4 \;=\; -1$$

- On a :

$$J = \int_1^2 \underbrace{\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}}_{\text{du type } \frac{u'}{u}} \mathrm{d}x \;=\; \left[\ln|1+\mathrm{e}^x|\right]_1^2 \overset{\text{WHY}}{=} \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^2}{1+\mathrm{e}}\right)$$

- On a :

$$K = \int_1^{\mathrm{e}} \underbrace{\frac{(\ln x)^n}{x}}_{\text{du type } u'u^n} \mathrm{d}x \;=\; \left[\frac{1}{n+1}(\ln x)^{n+1}\right]_1^{\mathrm{e}} \;=\; \frac{1}{n+1}$$

- On a

$$L = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6}\mathrm{d}x \;=\; \int_0^1 \frac{1}{3} \underbrace{\frac{3x^2}{1+(x^3)^2}}_{\text{du type } \frac{u'}{1+u^2}} \mathrm{d}x \;=\; \left[\frac{1}{3}\,\mathrm{Arctan}\left(x^3\right)\right]_0^1 = \frac{\pi}{12}.$$

1. On peut remarquer que, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{1}{t(1+t^4)} = \frac{t^3}{t^4(1+t^4)} = t^3\left(\frac{1}{t^4} - \frac{1}{1+t^4}\right).$$

Posons $u : t \mapsto t^4$. Il s'agit d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur R_+^*, à valeurs dans R_+^* et $u'(t) = 4t^3$ pour tout $t > 0$. La fonction $s \mapsto \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{1+s}$ étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\begin{aligned}\int_{1/x}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^4)} &= \int_{1/x}^{x} \frac{u'(t)}{4}\left(\frac{1}{u(t)} - \frac{1}{1+u(t)}\right)t \\ &= \frac{1}{4}\Big[\ln(t^4) - \ln\left(1+t^4\right)\Big]_{1/x}^{x} \\ &= \frac{1}{4}\left(\ln\left(\frac{x^4}{1+x^4}\right) - \ln\left(\frac{\frac{1}{x^4}}{1+\frac{1}{x^4}}\right)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\ln\left(\frac{x^4}{1+x^4}\right) - \ln\left(\frac{1}{1+x^4}\right)\right) = \ln x.\end{aligned}$$

2. Notons G une primitive de $g : t \mapsto \dfrac{1}{t(1+t^4)}$ sur l'intervalle R_+^*.

On a pour tout $x > 0$, $f(x) = G(x) - G(1/x)$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^* f'(x) = \frac{1}{x(1+x^4)} + \frac{1}{x^2}\frac{1}{\frac{1}{x}(1+\frac{1}{x^4})} = \frac{1}{x(1+x^4)} + \frac{x^3}{1+x^4} = \frac{1}{x}.$$

De plus, $f(1) = 0$ donc $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^* f(x) = \ln(x)$.

107

Considérons $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\mathrm{e}^{-x} \end{array}$

1. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, déterminer $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

   On trouve, après une intégration par parties avec des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \;=\; \Big[-\mathrm{e}^{-t}(1+t)\Big]_a^b \;=\; -\mathrm{e}^{-b}(1+b) \;+\; \mathrm{e}^{-a}(1+a)$$

2. Une primitive de f est $x \mapsto \displaystyle\int_{-1}^x f(t)\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-x}(1+x)$

   Remarque intéressante.
   Cela vaut le coup de vérifier au brouillon que la dérivée de $x \mapsto -\mathrm{e}^{-x}(1+x)$ est $x \longmapsto x\mathrm{e}^{-x}$.
   Allons-y, dérivons (un produit) :

$$-(-\mathrm{e}^{-x}) \times (1+x) \;+\; (-\mathrm{e}^{-x}) \times 1 \;=\; \mathrm{e}^{-x}(1+x) - \mathrm{e}^{-x} \;=\; x\mathrm{e}^{-x}$$

3. La primitive de f qui s'annule en 0 est $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-x}(1+x) + 1$

1. Montrons que la fonction $F : x \mapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ est définie sur $\mathbb{R}$, puis dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée la fonction proposée.

   — Soit $x \in \mathbb{R}$. Par stricte croissance de la fonction racine carrée :
   $$|x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+1}$$
   et donc $0 \leqslant x + |x| < x + \sqrt{x^2+1}$. Ainsi, $F(x)$ existe.

   — On sait que $\begin{cases} x \mapsto x+\sqrt{x^2+1} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ à valeurs dans }]0,+\infty[\\ t \mapsto \ln t \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\end{cases}$

   Par composition, la fonction $F : x \mapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   De plus,
   $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) \;=\; \frac{\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$
   Ainsi, F est une primitive de la fonction proposée dans l'énoncé.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Considérons les fonctions $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto \sqrt{t^2+1}$.
   Elles sont évidemment de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $u' : t \mapsto 1$ et $v' : t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$.
   Ainsi, une intégration par parties fournit :
   $$\int_0^x \sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t \;=\; \left[t\,\sqrt{t^2+1}\right]_0^x - \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t.$$
   Prenons l'intégrale de droite. Après un jeu d'écriture, on obtient :
   $$\begin{aligned}\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t &= \int_0^x \frac{t^2+1-1}{\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \sqrt{t^2+1}\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t\end{aligned}$$
   En utilisant les deux égalités précédentes, on a donc
   $$\int_0^x \sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t \;=\; \left[t\,\sqrt{t^2+1}\right]_0^x - \left(\int_0^x \sqrt{t^2+1}\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t\right)$$
   D'où
   $$2\int_0^x \sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t \;=\; \left[t\,\sqrt{t^2+1}\right]_0^x \;+\; \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t$$
   Bilan. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est :
   $$x \mapsto \frac{1}{2}\Big(x\sqrt{x^2+1} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big)$$

1. Les fonctions $u : x \mapsto -\frac{(1-x)^{q+1}}{q+1}$ et $v : x \mapsto x^p$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $u' : x \mapsto (1-x)^q$ et $v' : x \mapsto px^{p-1}$.
Par intégration par parties, on a donc :

$$I_{p,q} = \left[-\frac{1}{q+1}\, x^p(1-x)^{q+1} \right]_0^1 + \frac{p}{q+1} \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q+1} \mathrm{d}x.$$

La quantité $\left[-\frac{1}{q+1}\, x^p(1-x)^{q+1} \right]_0^1$ est nulle car $p > 0$ et $q+1 > 0$. D'où

$$I_{p,q} = \frac{p}{q+1}\, I_{p-1,q+1}.$$

2. Soit $p \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a, en itérant un nombre fini de fois la formule :

$$\begin{aligned} I_{p,q} &= \frac{p}{q+1}\, \frac{p-1}{q+2} \cdots \frac{1}{q+p}\, I_{0,p+q} \\ &= \frac{p!\, q!}{(p+q)!}\, I_{0,p+q} \end{aligned}$$

- *Il faut savoir rédiger une récurrence sur p en notant $\mathcal{H}_p$: « $\forall\, q \in \mathbb{N},\ I_{p,q} = \frac{p!\, q!}{(p+q)!}\, I_{0,p+q}$ ».*
- *On peut faire une autre preuve, en admettant pour l'instant que $I(p,q) \neq 0$. On verra cela plus tard dans le chapitre intégration.*

D'après la question précédente, on a en posant $A = \{(k,\ell) \in [\![1,p]\!] \times \mathbb{N} \mid k + \ell = p + q\}$:

$$\forall\, (k,\ell) \in A, \quad \frac{I_{k,\ell}}{I_{k-1,\ell+1}} = \frac{k}{\ell+1}$$

Par produit pour $(k,\ell) \in A$, on en déduit par télescopie :

$$\frac{I_{p,q}}{I_{0,p+q}} = \prod_{(k,\ell)\in A} \frac{k}{\ell+1}$$

Le produit de droite vaut $\displaystyle\prod_{k=1}^{p} \frac{k}{(p+q-k)+1}$, c'est-à-dire

$$\prod_{k=1}^{p} \frac{k}{(p+q-k)+1} = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{p} k}{\displaystyle\prod_{j=q+1}^{p+q} j} = \frac{p!\, q!}{(p+q)!}$$

Par ailleurs, on a $I_{0,p+q} = \frac{1}{p+q+1}$ (WHY ?).
Bilan :

$$I_{p,q} = \frac{p!\, q!}{(p+q+1)!}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Effectuons une intégration par parties avec $\begin{cases} u : t \mapsto \sin t \\ v : t \mapsto (\cos t)^{n+1} \end{cases}$ qui sont $\mathcal{C}^1$

   On obtient

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1} t \times \cos t \, \mathrm{d}t \\ &= \Big[\sin t (\cos t)^{n+1}\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin t \times (n+1)(-1)(\sin t)(\cos t)^n \, \mathrm{d}t \\ &= 0 + (n+1) \int_0^{\pi/2} \underbrace{(\sin t)^2}_{1-\cos^2 t} (\cos t)^n \, \mathrm{d}t \\ &= (n+1)\Big(\int_0^{\pi/2} \cos^n t \, \mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2} t \, \mathrm{d}t\Big) \\ &= (n+1)(u_n - u_{n+2}) \end{aligned}$$

   On en déduit que

$$u_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} u_n$$

   Autre solution.
   On peut aussi écrire

$$u_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \times \underbrace{\cos^2 t}_{1-\sin^2 t} \, \mathrm{d}t$$

   En utilisant la linéarité de l'intégrale, on obtient

$$u_{n+2} = u_n - \int_0^{\pi/2} \cos^n t \times \sin^2 t \, \mathrm{d}t$$

   Dans l'intégrale de droite, la fonction intégrée est encore égale à $\sin t \cos^n t \times \sin t$.

$$u_{n+2} = u_n - \int_0^{\pi/2} \sin t \cos^n t \times \sin t \, \mathrm{d}t$$

   Effectuons une intégration par parties pour calculer l'intégrale de droite en posant $\begin{cases} u : t \mapsto \dfrac{-1}{n+1} \cos^{n+1} t \\ v : t \mapsto \sin t \end{cases}$

   On a

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin t \cos^n t}_{u'(t)} \times \underbrace{\sin t}_{v(t)} \, \mathrm{d}t &= \left[\frac{-1}{n+1} \cos^{n+1} t \times \sin t\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{-1}{n+1} \cos^{n+1} t \times \cos t \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n+1} \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2} t \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n+1} u_{n+2} \end{aligned}$$

   Résumons. On a l'égalité

$$u_{n+2} = u_n - \frac{1}{n+1} u_{n+2}$$

   D'où

$$\Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big) u_{n+2} = u_n$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   D'après la question précédente, on a

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad u_{2k} = \frac{2k-1}{2k} u_{2k-2}$$

   Or $\forall i,\ u_i \neq 0$ (WHY ? Il faut attendre le chapitre Intégration pour la justification). D'où

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \frac{u_{2k}}{u_{2k-2}} = \frac{2k-1}{2k}$$

Par produit pour $k \in [\![1, n]\!]$ on a par télescopie :

$$\frac{u_{2n}}{u_0} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$$

Le membre gauche vaut $\dfrac{u_{2n}}{\frac{\pi}{2}}$. Le membre droit vaut $\dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$.
BILAN :

$$u_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \qquad \text{ou encore} \qquad u_{2n} = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{\pi}{2}$$

3. D'après la question 1, on a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n$$

D'où, en multipliant par u_{n+1} :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)u_{n+2}u_{n+1} = (n+1)u_n u_{n+1}$$

La suite $\Big((n+1)u_n u_{n+1}\Big)$ est donc constante. Son premier terme vaut $(0+1)u_0 u_1 = \dfrac{\pi}{2}$.
BILAN

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (n+1)u_{n+1}u_n = \frac{\pi}{2}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.
D'après la question précédente, on a $(2n+1)u_{2n}u_{2n+1} = \dfrac{\pi}{2}$.
En remplaçant u_{2n} par l'expression précédente, on trouve

$$u_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

1. On a :

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x \;=\; \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \mathrm{d}x \;=\; \big[-\cos x\big]_0^{\pi/2} \;=\; 1.$$

2. Soit $n \geqslant 2$.
Les fonctions $u : x \mapsto -\cos x$ et $v : x \mapsto \sin^{n-1} x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et :

$$u' : x \mapsto \sin(x) \qquad \text{et} \qquad v' : x \mapsto (n-1)\cos(x)\,\sin^{n-2}(x).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin x}_{u'(x)} \times \underbrace{\sin^{n-1}(x)}_{v(x)} \mathrm{d}x \\ &= \Big[-\cos(x)\sin^{n-1}(x)\Big]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\sin^{n-2}(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Puisque $n \geqslant 2$, on a $-\cos(0)\sin^{n-1}(0) = 0$ et $\cos(\frac{\pi}{2})\sin^{n-1}(\frac{\pi}{2}) = 0$.
Par conséquent :

$$\begin{aligned} I_n &= (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\sin^{n-2}(x)\mathrm{d}x \\ &= (n-1)\int_0^{\pi/2} \big(1-\sin^2(x)\big)\sin^{n-2}(x)\mathrm{d}x \\ &= (n-1)(I_{n-2} - I_n) \end{aligned}$$

Ainsi, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.
En multipliant par I_{n-1}, on a :

$$nI_n\,I_{n-1} = (n-1)\,I_{n-1}\,I_{n-2}.$$

On en déduit que la suite $(nI_nI_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante.
Or $1 \times I_1 \times I_0 = \frac{\pi}{2}$, d'où

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad n\,I_n\,I_{n-1} = \frac{\pi}{2}\,\cdot$$

3. Soit $p \in \mathbb{N}$. On a

$$I_{2p} \;=\; \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{(2p)(2p-2)\cdots 2}\,I_0.$$

Par ailleurs,

$$(2p)(2p-2)\cdots 2 \;=\; 2^p\,p(p-1)\cdots 1 \;=\; 2^p\,p!$$

Pour le produit des impairs, il est classique de multiplier et diviser par le produit des pairs, pour obtenir :

$$(2p-1)(2p-3)\cdots 1 \;=\; \frac{\mathbf{(2p)} \times (2p-1) \times \mathbf{(2p-2)} \times (2p-3) \times \cdots \times \mathbf{2} \times 1}{\mathbf{(2p)} \times \mathbf{(2p-2)} \times \cdots \times \mathbf{2}} \;=\; \frac{(2p)!}{2^p\,p!}\,\cdot$$

Ainsi $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}\,(p!)^2}\,\dfrac{\pi}{2}$.

Avec la relation $(2p+1)I_{2p+1}I_{2p} = \frac{\pi}{2}$, on obtient :

$$I_{2p+1} = \frac{1}{(2p+1)\,I_{2p}}\,\frac{\pi}{2} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

112

Les fonctions proposées sont continues sur leur ensemble de définition.
On utilise dans chacun des cas le théorème fondamental de l'Analyse.

• Une primitive de $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x)$ est donnée par $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \operatorname{Arctan} t \,\mathrm{d}t$.

Fixons $x \in \mathbb{R}$ et calculons $\displaystyle\int_0^x \operatorname{Arctan} t \,\mathrm{d}t$ en effectuant une intégration par parties.

On pose $\begin{cases} u : t \mapsto t \\ v : t \mapsto \operatorname{Arctan} t \end{cases}$ qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

On a

$$\begin{aligned}
\int_0^x \operatorname{Arctan} t \,\mathrm{d}t &= \Big[t \times \operatorname{Arctan} t\Big]_0^x - \int_0^x t \times \frac{1}{1+t^2} \mathrm{d}t \\
&= x \operatorname{Arctan} x - \Big[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big]_0^x \\
&= x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)
\end{aligned}$$

BILAN : Une primitive de $f : x \mapsto \operatorname{Arctan} x$ est $F : x \mapsto x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.
Je vous invite à dériver la fonction donnée pour voir si l'on retombe bien sur l'arctangente !

• Une primitive de $g : x \mapsto (\ln x)^2$ est donnée par $x \mapsto \displaystyle\int_1^x (\ln t)^2 \,\mathrm{d}t$.

Fixons $x \in \,]0, +\infty[$ et calculons $\displaystyle\int_1^x (\ln t)^2 \,\mathrm{d}t$ en effectuant une intégration par parties.

On pose $\begin{cases} u : t \mapsto t \\ v : t \mapsto (\ln t)^2 \end{cases}$ qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

On a

$$\begin{aligned}
\int_1^x (\ln t)^2 \,\mathrm{d}t &= \Big[t \times (\ln t)^2\Big]_1^x - \int_1^x t \times 2\frac{1}{t}\ln t \,\mathrm{d}t \\
&= \ldots \qquad - 2\Big[t\ln t - t\Big]_1^x \\
&= x(\ln x)^2 - 2\Big(x\ln x - x\Big) - 2
\end{aligned}$$

BILAN : Une primitive de $g : x \mapsto (\ln x)^2$ est $G : x \mapsto x(\ln x)^2 - 2\Big(x\ln x - x\Big) - 2$.
Je vous invite à dériver la fonction donnée pour voir si l'on retombe bien sur le logarithme au carré

• Une primitive de $h : x \mapsto \sin(\ln x)$ est donnée par $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \sin(\ln t) \,\mathrm{d}t$.

Fixons $x \in \,]0, +\infty[$ et calculons $\displaystyle\int_1^x \sin(\ln t) \,\mathrm{d}t$ en effectuant une intégration par parties.

On pose $\begin{cases} u : t \mapsto t \\ v : t \mapsto \sin(\ln t) \end{cases}$ qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

On a

$$\begin{aligned}
\int_1^x \sin(\ln t) \,\mathrm{d}t &= \Big[t \times \sin(\ln t)\Big]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t}\cos(\ln t) \,\mathrm{d}t \\
&= \ldots \qquad - \int_1^x \cos(\ln t) \,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Effectuons à nouveau une intégration par parties sur l'intégrale de droite. On a

$$\begin{aligned}
\int_1^x \cos(\ln t) \,\mathrm{d}t &= \Big[t \times \cos(\ln t)\Big]_1^x - \int_1^x t \times \frac{-1}{t}\sin(\ln t) \,\mathrm{d}t \\
&= \ldots \qquad + \int_1^x \sin(\ln t) \,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On a donc

$$\int_1^x \sin(\ln t) \,\mathrm{d}t = \Big[t \times \sin(\ln t)\Big]_1^x - \Big[t \times \cos(\ln t)\Big]_1^x - \int_1^x \sin(\ln t) \,\mathrm{d}t$$

D'où

$$\int_1^x \sin(\ln t)\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{1}{2}\Big[t\big(\sin(\ln t) - \cos(\ln t)\big)\Big]_1^x$$

BILAN : Une primitive de $h : x \mapsto \sin(\ln x)$ est $H : x \mapsto \dfrac{1}{2}x\big(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\big)$.

Je vous invite à dériver la fonction donnée pour voir si l'on retombe bien sur le sinus du log.

D'après le théorème fondamental de l'Analyse, une primitive est

$$x \mapsto \int_0^x \operatorname{Arcsin} t \mathrm{d}t$$

Soit $x \in \left]-1,1\right[$. Calculons $\displaystyle\int_0^x \operatorname{Arcsin} t \,\mathrm{d}t$.
Procédons par intégration par parties en posant $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto \operatorname{Arcsin} t$.
Ces fonction sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]-1,1\right[$.
D'où :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \operatorname{Arcsin} t \,\mathrm{d}t &= [t \operatorname{Arcsin} t]_0^x - \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \,\mathrm{d}t \\
&= x \operatorname{Arcsin} x - \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \,\mathrm{d}t \\
&= x \operatorname{Arcsin} x + \left[\sqrt{1-t^2}\right]_0^x \\
&= x \operatorname{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2} - 1.
\end{aligned}$$

Bilan. Une primitive sur $\left]-1,1\right[$ de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$ est donc :

$$F : x \mapsto x \operatorname{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2}.$$

Primitive sur $[-1,1]$.
On pose $\Phi : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \operatorname{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2} \end{array}$.
Cette fonction est

- continue sur $[-1,1]$
- dérivable sur $\left]-1,1\right[$ et $\Phi' : x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$
- $\Phi'(x) \xrightarrow[x \to 1]{} \operatorname{Arcsin} 1 = \frac{\pi}{2}$ et $\Phi'(x) \xrightarrow[x \to -1]{} \operatorname{Arcsin}(-1) = -\frac{\pi}{2}$

D'après le théorème de la limite de la dérivée, on en déduit que Φ est dérivable en -1 et 1 et l'on a

$$\Phi' : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x \operatorname{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2} & \text{si } x \in \left]-1,1\right[\\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 1 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x = -1 \end{cases} \end{array}$$

D'où $\Phi' = \operatorname{Arcsin}$.
BILAN : Φ est dérivable sur $[-1,1]$ et $\Phi' = \operatorname{Arcsin}$.

Remarque. La technique de calcul utilisée (qui nécessite une fonction de classe $\mathcal{C}^1$) ne nous a permis d'en faire le calcul que sur $\left]-1,1\right[$.
Or d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction Arcsin étant continue sur $[-1,1]$, elle admet une primitive sur $[-1,1]$.
Si l'on note Φ la primitive de Arcsin sur $[-1,1]$ (intervalle fermé) valant 1 en 0.
Cette primitive coïncide sur $\left]-1,1\right[$ (intervalle ouvert) avec la primitive trouvée précédemment (qui vaut bien 1 en 0) :

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad \Phi(x) = F(x).$$

La fonction Φ est dérivable sur $[-1,1]$ (en tant que primitive sur $[-1,1]$ d'une fonction, à savoir Arcsin), donc est a fortiori continue sur $[-1,1]$.
Par ailleurs, la fonction F, a priori définie sur $\left]-1,1\right[$, est prolongeable par continuité sur $[-1,1]$, et le prolongement est $\widetilde{F} : x \mapsto x \operatorname{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2}$.
On en déduit que Φ et $\widetilde{F}$ coïncident sur $[-1,1]$ (intervalle fermé).
Autrement dit :

$$\forall x \in [-1,1], \quad \Phi(x) = x \operatorname{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2}.$$

1. On pose $\begin{cases} u : t \mapsto -\mathrm{e}^{-t} \\ v : t \mapsto \dfrac{t^{n+1}}{(n+1)!} \end{cases}$ qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

   Avec une intégration par parties, on a :

$$\int_0^a \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \;=\; \left[(-\mathrm{e}^{-t}) \times \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^a \;-\; \int_0^a -(\mathrm{e}^{-t}) \times \frac{t^n}{n!}\mathrm{d}t$$

   D'où

$$I_{n+1}(a) \;=\; I_n(a) \;+\; \frac{-1}{(n+1)!}\mathrm{e}^{-a}a^{n+1}$$

2. Nous n'allons pas faire de récurrence (on pourrait).

   Fixons donc $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a

$$\forall\, k \in [\![0, n-1]\!], \quad I_{k+1}(a) - I_k(a) \;=\; \frac{-1}{(k+1)!}\mathrm{e}^{-a}a^{k+1}$$

   Par somme et télescopie, on obtient

$$I_n(a) - I_0(a) \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} \frac{-1}{(k+1)!}\mathrm{e}^{-a}a^{k+1}$$

   D'où

$$I_n(a) - (1 - \mathrm{e}^{-a}) \;=\; \sum_{j=1}^{n} \frac{-1}{j!}\mathrm{e}^{-a}a^{j}$$

   D'où

$$I_n(a) \;=\; 1 - \mathrm{e}^{-a} - \mathrm{e}^{-a}\sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{k!}$$

$$I_n(a) \;=\; 1 - \mathrm{e}^{-a}\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}$$

3. • On montrera dans le chapitre « Intégration » qu'il existe $K_a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |I_n(a)| \;\leqslant\; K_a \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

   Comme $|a|^n = \mathrm{o}(n!)$, on en déduit que $K_a \dfrac{|a|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

   D'après le théorème des Gendarmes, on en déduit que $I_n(a) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

   • En multipliant par e^a l'égalité obtenue à la question 2, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \;=\; \mathrm{e}^a - \mathrm{e}^a I_n(a)$$

   Par opération sur les limites, on en déduit que la limite de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}$ existe et vaut e^a.

   • Dans cet exercice, on a démontré la belle égalité :

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^a \;=\; \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}$$

   ce qui s'écrira plus tard dans le chapitre « Séries »

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^a \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!}$$

1. Par linéarité :
$$I + J \;=\; \int_0^{\pi/2} (\cos^2 x + \sin^2 x)\mathrm{d}x \;=\; \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x \;=\; \frac{\pi}{2}$$
2. En posant le changement de variable affine $x = \frac{\pi}{2} - t$ qui fait intervenir la fonction $t \mapsto \frac{\pi}{2} - t$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$, on obtient :
$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\pi/2}^{0} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - t\right)(-1)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \,\mathrm{d}t \\ &= J. \end{aligned}$$
Par conséquent, $I = J = \dfrac{\pi}{4}\cdot$
3. On a $K = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2(2x)\mathrm{d}x$ (WHY ?).
Le changement de variable affine (ici linéaire !) $x = \frac{t}{2}$, codé par la fonction $t \mapsto \frac{t}{2}$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$, donne :
$$K = \frac{1}{8}\int_0^{\pi} \sin^2 t \,\mathrm{d}t$$
Puis
$$K \;=\; \frac{1}{8}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 t \,\mathrm{d}t\right) \;=\; \frac{1}{8}(I + J)$$
En effet, l'intégrale de droite vaut après changement de variable :
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 t \,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(s + \frac{\pi}{2})\mathrm{d}s \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 s \;\mathrm{d}s \;=\; J$$
Bilan :
$$K \;=\; \frac{1}{8}(I + J) \;=\; \frac{\pi}{16}$$

117

Soit $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{1+x^4}{1+x^2}\right)\sqrt[3]{\sin x^3}\,\sin\left(\sqrt{1-x^2}\right)$.
Cette fonction est correctement définie et continue sur $[-1,1]$ et donc sur $[-\pi/8, \pi/8]$.
Elle est de plus impaire.
Le changement de variable $x = -t$ fournit :

$$I \;=\; \int_{-\pi/8}^{\pi/8} f(x)\mathrm{d}x \;=\; \int_{\pi/8}^{-\pi/8} f(-t)(-1)\mathrm{d}t \;=\; \int_{\pi/8}^{-\pi/8} f(t)\mathrm{d}t \;=\; -\int_{-\pi/8}^{\pi/8} f(t)\mathrm{d}t \;=\; -I.$$

Ainsi, $I = 0$.

118

La fonction à intégrer est paire et continue sur $[-1,1]$, donc (WHY, ce n'est pas évident) :

$$I = \int_{-1}^{1} |x| \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x \ = \ 2\int_{0}^{1} x\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$$

Or

$$\int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x \ = \ \left[\frac{2}{3}\big(1+x^2\big)^{3/2}\right]_0^1.$$

On en déduit que $I = \frac{4\sqrt{2}-2}{3}$ ·

119

La fonction cosinus étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, le changement de variable $x = \cos t$ donne :

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}}(-\sin t)\,\mathrm{d}t.$$

Par ailleurs,

$$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad 1-\cos t = 2\sin^2\frac{t}{2} \qquad \text{et} \qquad 1+\cos t = 2\cos^2\frac{t}{2}$$

et donc

$$\sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}}\sin t \;=\; \left|\tan\frac{t}{2}\right|\sin t \;\overset{\text{WHY}}{=}\; \left(\tan\frac{t}{2}\right)2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} \;=\; 2\sin^2\frac{t}{2} \;=\; 1-\cos t$$

Par conséquent :

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(1-\cos t\big)\mathrm{d}t \;=\; \Big[t-\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \;=\; \frac{\pi}{2}-1.$$

Autre solution. Au lieu de manipuler les formules de trigo dans tous les sens, Luigi me dit que l'on peut remplacer $\sin t$ par $\sqrt{1-\cos^2 t}$ (car $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$) après le premier changement de variable. Et du coup, on tombe tout de suite sur la dernière intégrale.

Autre solution.

On peut aussi écrire :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x \\
&= \Big[\mathrm{Arcsin}(x) + \sqrt{1-x^2}\Big]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{2}-1.
\end{aligned}$$

1. Une primitive de f est donnée par
$$x \mapsto \int_0^x \frac{1}{2+\cos t}\mathrm{d}t$$
En utilisant le fait que $\cos t = \frac{1-\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}{1+\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}$, on a
$$\frac{1}{2+\cos t} = \frac{1+\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}{3+\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}$$
Soit $x \in]-\pi, \pi[$. On a :
$$\int_0^x \frac{1}{2+\cos t}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1+\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}{3+\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}\mathrm{d}t$$
En considérant le changement de variable $t \mapsto \tan\left(\frac{t}{2}\right)^2$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$, la dernière intégrale vaut :
$$\int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{2}{3+u^2}\mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}.$$
Bilan. Une primitive de f sur $]-\pi, \pi[$ est la fonction :
$$F : x \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

2. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, elle admet des primitives.
Notons G l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.
Posons également F la fonction
$$F : x \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \quad \text{qui est définie sur } \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-\pi+2k\pi,\ \pi+2k\pi[$$
Les fonctions F et G ont des dérivées qui coïncident sur les I_k, donc il existe une constante c_k telle que $G = F + c_k$ sur I_k.
Déterminons la constante c_k. Notons a_k et b_k les bornes inférieure et supérieure de I_k.
Comme $G(0) = 0$ (définition de G) et $F(0) = 0$ (calcul), on en déduit $c_0 = 0$.
Soit $k \in \mathbb{Z}$. Par opérations sur les limites, on a :
$$\lim_{a_k^+} F = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad \lim_{b_k^-} F = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$
L'égalité $G = F + c_k$ sur I_k fournit
$$G(a_k) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + c_k \quad \text{et} \quad G(b_k) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + c_k$$
Comme G est définie sur $\mathbb{R}$ et que $b_k = a_{k+1}$, on a $G(b_k) = G(a_{k+1})$.
Ainsi,
$$\frac{\pi}{\sqrt{3}} + c_k = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + c_{k+1}$$
D'où $c_{k+1} = c_k + \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$. Or $c_0 = 0$. On en déduit (récurrence sur $\mathbb{N}$, puis extension à $\mathbb{Z}$) que
$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad c_k = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}k$$
En résumé :
$$G : x \longmapsto \begin{cases} F(x) + \frac{2\pi}{\sqrt{3}}k & \text{si } x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} I_k \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{\sqrt{3}}k & \text{si } x \text{ s'écrit } \pi + 2k\pi \end{cases}$$

Cherchons une expression sans disjonction de cas et sans utiliser l'indice k de l'intervalle I_k.
Pour cela, cherchons qui est k par rapport à x.
On a les équivalences :

$$x \in I_k \iff 2\pi k < x + \pi < 2\pi(k+1) \iff k < \frac{x+\pi}{2\pi} < k+1$$

Ainsi, lorsque $x \in I_k$, alors $k = \left\lfloor \frac{x+\pi}{2\pi} \right\rfloor$.
Bilan :

$$G : x \longmapsto F(x) + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \left\lfloor \frac{x+\pi}{2\pi} \right\rfloor$$

Remarque. Si vous demandez à votre logiciel préféré (moi, c'est GeoGebra) de tracer cette fonction, vous devez trouver une fonction continue, qui coïncide avec F sur $]-\pi, \pi[$.

121

Posons $f : x \mapsto \frac{1}{1+\sin x}$. On a $f(\pi - x) = f(x)$ pour tout $x \in [0, \pi]$.
Par linéarité de l'intégrale, puis changement de variable affine $t \mapsto \pi - t$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi/2} f(x)x + \int_{\pi/2}^{0} f(\pi - t)(-1)\mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or on a :

$$\frac{1}{1+\sin x} = \frac{1}{1+\dfrac{2T}{1+T^2}} = \frac{1}{(1+T)^2}(1+T^2) \quad \text{où } T = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

D'où

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\left(1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}\left(1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)\mathrm{d}x$$

Avec le changement de variable $x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$, l'intégrale précédente vaut $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2}\mathrm{d}t$, c'est-à-dire $\left[\frac{-1}{1+t}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$.
Par conséquent, on a $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x = 1$.

122

Effectuons le changement de variable $y = \sqrt{\mathrm{e}^t - 1}$ qui est $\mathcal{C}^1$.

Plus précisément, la fonction $\varphi : t \mapsto \sqrt{\mathrm{e}^t - 1}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et on a $\varphi' : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^t}{2\sqrt{\mathrm{e}^t - 1}}$.

Ainsi

$$L = \int_1^a \frac{1}{3+\mathrm{e}^t} \frac{\mathrm{e}^t}{\sqrt{\mathrm{e}^t - 1}} \mathrm{d}t \;=\; \int_{\sqrt{\mathrm{e}-1}}^{\sqrt{\mathrm{e}^a-1}} \frac{1}{3+(y^2+1)}\, 2\mathrm{d}y \;=\; 2\int_{\sqrt{\mathrm{e}-1}}^{\sqrt{\mathrm{e}^a-1}} \frac{1}{y^2+2^2}\mathrm{d}y \;=\; 2\left[\frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{2}\right)\right]_{\sqrt{\mathrm{e}-1}}^{\sqrt{\mathrm{e}^a-1}}$$

La dernière égalité utilise le fait qu'une primitive de $y \mapsto \frac{1}{y^2+2^2}$ est $y \mapsto \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}(\frac{y}{2})$ (il suffit de dériver pour justifier cela).

D'où

$$L \;=\; \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{e}^a - 1}}{2}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{e} - 1}}{2}\right).$$

1. **Preuve expéditive.**
Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après le TAF entre n et $n+1$, il existe $c_n \in \,]n, n+1[$ tel que
$$f(n+1) - f(n) \;=\; f'(c_n)$$
Par opération sur les limites, on a $f'(c_n) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell - \ell = 0$.
De plus, $c_n \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ (car $c_n \geqslant n$).

Ma vieille preuve (juste, mais compliquée...).
Comme $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$:
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists A_n \in \mathbb{R}, \quad \forall x \geqslant A_n, \quad |f(x) - \ell| \leqslant \frac{1}{n}$$
D'après l'inégalité triangulaire, on a :
$$(\bigstar) \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists A_n \in \mathbb{R}, \quad \forall x, x' \geqslant A_n, \quad |f(x) - f(x')| \leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$$
Il suffit d'écrire $|f(x) - f(x')| = |(f(x) - \ell) - (f(x') - \ell)| \leqslant |f(x) - \ell| + |f(x') - \ell|$.

Construisons une suite (c_n) ayant les qualités requises.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Cherchons un c_n.
D'après $(\bigstar)$, il existe $A_n \in \mathbb{R}$ tel que ...
Prenons un tel A_n.
Choisissons un $x_n \in [A_n, +\infty[$ en imposant aussi $x_n \geqslant n$:
on choisit donc x_n tel que $x_n \geqslant \max(A_n, n)$.
D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_n \in \,]x_n, x_n+1[$ tel que
$$f(x_n + 1) - f(x_n) = f'(c_n)$$
On a donc d'après $(\bigstar)$ (appliquée à $x = x_n + 1$ et $x' = x_n$) l'inégalité $|f'(c_n)| \leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$.

Reprenons. On a donc construit une suite (c_n) vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; c_n \geqslant n \; (\text{WHY?}) \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |f'(c_n)| \leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$$
D'après le théorème de majoration et le théorème des Gendarmes, on en déduit
$$c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad f'(c_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

2. L'inégalité $f^2 + (1+f')^2 \leqslant 1$ implique que
$$f^2 \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad (1+f')^2 \leqslant 1$$
On en déduit que :
$$f \text{ est bornée} \qquad \text{et} \qquad f' \text{ est négative}$$
Ainsi, f est décroissante et bornée. Le théorème de la limite monotone implique que f admet des limites *finies* en $-\infty$ et en $+\infty$, que nous notons ℓ_- et ℓ_+.
On peut appliquer la question 1 qui fournit l'existence d'une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que
$$c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad f'(c_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
Évaluons l'inégalité de l'énoncé en c_n :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \big(f(c_n)\big)^2 + \big(1 + f'(c_n)\big)^2 \leqslant 1$$
Par passage à la limite (licite, car chaque terme admet une limite) :
$$\ell_+^2 + (1+0)^2 \leqslant 1$$
d'où $\ell_+ = 0$.

Un raisonnement analogue à celui de la question 1 fournit une suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que
$$d_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty \qquad \text{et} \qquad f'(d_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
Par le même raisonnement, on trouve $\ell_- = 0$.

Résumons. La fonction f est décroissante de limite nulle en $-\infty$ et en $+\infty$.
Donc f est la fonction nulle.

1. Soit $x \in [0, +\infty[$. D'après le TAF entre x et $x+1$, il existe $c_x \in]x, x+1[$ tel que

$$f(x+1) - f(x) = f'(c_x)$$

On a donc construit une fonction $x \mapsto c_x$ qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$ (WHY) et telle que

$$\forall\, x \in [0, +\infty[, \quad f(x+1) - f(x) = f'(c_x)$$

Par passage à la limite quand $x \to +\infty$ (licite), on obtient

$$\ell - \ell \;=\; \ell'$$

D'où $\ell' = 0$.

2. — Penser à une fonction qui ne fait que d'osciller, mais qui oscille de plus en plus lentement.

   - Par exemple $g : x \mapsto \cos\sqrt{x}$.
     La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a $g' : x \mapsto \dfrac{-1}{2\sqrt{x}} \sin\sqrt{x}$.
     En $+\infty$, on a $g'(x) \to 0$ et pourtant g n'a pas de limite (WHY ?).

     Justifions le WHY.
     Par l'absurde, supposons que $\cos\sqrt{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} L$.
     Alors la fonction cosinus admet pour limite L en $+\infty$.

     $$\text{En effet, si on a } \begin{cases} x^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \\ \cos\sqrt{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} L \end{cases} \quad \text{alors } \cos x \xrightarrow[x\to+\infty]{} L$$

     Comme cosinus est bornée, on a nécessairement $L \in \mathbb{R}$.
     On contemple les égalités suivantes valables pour tout $x \in \mathbb{R}$

     $$\begin{cases} \cos(x+1) + \cos(x-1) &= \; 2\cos x \cos 1 \\ \cos(x+1) - \cos(x-1) &= \; -2\sin x \cos 1 \\ \cos^2 x + \sin^2 x &= \; 1 \end{cases}$$

     La première égalité fournit par passage à la limite (licite) $L + L = 2L\cos 1$. Comme $\cos 1 \neq 0$, on obtient $L = 0$.
     La deuxième égalité fournit l'existence de la limite de la fonction sinus en $+\infty$, que nous notons L' : pour s'en convaincre, écrire $\sin x = \dfrac{-1}{2\cos 1}\Big(\cos(x+1) - \cos(x-1)\Big)$.
     Puis un passage à la limite fournit $L' = 0$.
     La troisième égalité fournit par passage à la limite $L^2 + L'^2 = 1$, d'où $0^2 + 0^2 = 1$.

   - Un élève remarquera que la réponse n'est pas encore super satisfaisante, car on demande dans l'énoncé une fonction dérivable sur $[0, +\infty[$ tout entier.
     Pour palier ce léger problème, il suffit :
     — ou bien de considérer $h : x \mapsto \cos(\sqrt{x+3})$ qui est dérivable sur $]-3, +\infty[$ et vérifie les mêmes propriétés que g ;
     — ou bien de remarquer que la fonction g est en fait dérivable en 0.
     Ou bien avec un taux d'accroissement classique.
     Ou bien en remarquant que g est continue sur $[0, +\infty[$ tout entier, dérivable sur $]0, +\infty[$ et que g' admet une limite finie en 0. Si bien que le théorème de limite de la dérivée assure que g est dérivable en 0, donc sur $[0, +\infty[$ tout entier.

   — L'idée est de considérer une fonction qui tend vers ℓ et qui oscille de plus en plus vite autour de ℓ.
   Par exemple, la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}\sin(x^2)$ fait l'affaire.
   Il est facile de voir que g tend vers 0 en $+\infty$.
   Mais $g' : x \mapsto \dfrac{-1}{x^2}\sin(x^2) + 2\cos(x^2)$ n'a pas de limite en $+\infty$ (WHY ?).

   Justifions le WHY.
   Par l'absurde, supposons que $g'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L$.
   Alors $\cos(x^2)$ admet une limite finie en $+\infty$.

En effet, on a $2\cos(x^2) = g'(x) + \dfrac{-1}{x^2}\sin(x^2)$

Comme $\begin{cases} g'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L \\ \dfrac{-1}{x^2}\sin(x^2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \end{cases}$ alors par somme $2\cos(x^2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L$.

D'où $\cos(x^2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{L}{2}$.

Or, on sait que $\cos(x^2)$ n'a pas de limite en $+\infty$. D'où l'absurdité.

Supposons par l'absurde que $\cos x^2 \xrightarrow[t\to+\infty]{} L$.

On a alors

$$\begin{cases} \sqrt{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \\ \cos(t^2) \xrightarrow[t\to+\infty]{} L \end{cases} \quad \text{d'où par composition } \cos x \xrightarrow[x\to+\infty]{} L$$

D'où l'absurdité (cosinus n'a pas de limite en ∞).

Encore une fois, un élève pourrait me reprocher de ne pas avoir pris une fonction définie sur $[0, +\infty[$! !

Il suffit de considérer la fonction $h : x \mapsto \dfrac{1}{x+3}\sin(x^2)$, qui est définie et dérivable sur $[0, +\infty[$.

Autre solution. Les élèves me proposent $x \mapsto x + \cos x$. Ils ont raison, c'est un beau contre-exemple.