

Dimension finie

Algèbre linéaire, épisode 3

exercices



101

1,2,3,4, ...

Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels suivants.

- (i) $\text{Vect}\left((1, 2, 1, 0), (4, -2, 1, 1), (7, 2, 4, 2), (11, 4, 1, 3)\right)$.
- (ii) $\text{Vect}\left(2X^4 + 3X + 1, 8X^2 - 4X, 9X^2 + 2X^3 - X, 4X^3 + 2X^2 + 3X + 1\right)$.
- (iii) $\left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - 2y - z + 2t = 0 \text{ et } 3y - 2z + t = 0\right\}$.
- (iv) $\left\{P \in \mathbb{K}_4[X] \mid P(0) = P(1) = P(2) = P(3)\right\}$.
- (v) $\text{Vect}\left(x \mapsto \cos(kx)\right)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$

102

Quizz

Donner la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitué

- des matrices diagonales
- des matrices triangulaires supérieures
- des matrices triangulaires inférieures
- des matrices symétriques
- des matrices antisymétriques
- des matrices de trace nulle

103

Non génératrice

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $(V_1, \dots, V_n)$ une famille de vecteurs de E .
Montrer que la famille $\mathcal{F} = (V_i - V_j)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ n'est pas génératrice de E .

On pourra noter $N_i = N - V_i$ et montrer que chaque vecteur de la famille $\mathcal{F}$ est combinaison linéaire de $N_1, \dots, N_n$.

104

Intersection avec un hyperplan

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

Soit F un sous-espace vectoriel et H un hyperplan de E . Montrer que :

$$(\star) \quad \dim(F \cap H) \geq \dim F - 1$$

Dans quel cas a-t-on égalité ?

105

Supplémentaire commun

difficile

1. Soit F et G deux sev d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .
On suppose que F et G sont de dimension finie et que $\dim F = \dim G$.
Montrer que si F et G sont distincts, alors il existe $x \in E \setminus (F \cup G)$.
2. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n , et F et G deux sev de E .
Montrer que F et G admettent un supplémentaire commun si et seulement s'ils ont même dimension.

Le sens difficile pourra être fait par récurrence décroissante finie sur la dimension commune de F et G , en utilisant la première question.

106

Rang d'une famille

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux familles (finies) de vecteurs de E . Montrer :

$$\max(\text{rg}(\mathcal{F}_1), \text{rg}(\mathcal{F}_2)) \leq \text{rg}(\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2) \leq \text{rg}(\mathcal{F}_1) + \text{rg}(\mathcal{F}_2).$$

107 Chez les polynômes

Soit $a \neq b \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $((X-a)^k(X-b)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

108 Taylor

Pour $a \in \mathbb{K}$, on considère la famille $\mathcal{F} = (1, (X-a), (X-a)^2, (X-a)^3, \dots, (X-a)^n)$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. En déduire une nouvelle démonstration de la formule de Taylor polynomiale.

109 Polynôme annulateur d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer qu'il existe un polynôme P non nul tel que $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

110 Hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour une matrice $U \in E$, on introduit l'application

$$\begin{aligned} T_U : E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ M &\longmapsto \text{tr}(UM) \end{aligned}$$

1. Soit $U \in E$. Montrer que T_U est une forme linéaire, c'est-à-dire que $T_U \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.
2. Montrer que l'application suivante est un isomorphisme.

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \\ U &\longmapsto T_U \end{aligned}$$

3. Soit H un hyperplan de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer qu'il existe $U \in E$ tel que $H = \{M \in E \mid \text{tr}(UM) = 0\}$.

111 Déphasage

On considère

$$F = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \exists (A, \phi) \in \mathbb{R}^2, f : x \mapsto A \cos(x + \phi) \right\}.$$

Montrer qu'il s'agit d'un sev de dimension finie de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et donner sa dimension.

Endomorphisme abstrait

112 Somme du noyau et de l'image

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel quelconque (pas nécessairement de dimension finie). Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$ et $\text{Im } f \supset \text{Im } f^2$.
2. Montrer que

$$\text{Ker } f = \text{Ker } f^2 \iff \text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0_E\}$$

3. Montrer que

$$\text{Im } f = \text{Im } f^2 \iff E = \text{Im } f + \text{Ker } f$$

4. On suppose E de dimension finie. Montrer que

$$\text{Ker } f = \text{Ker } f^2 \iff E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$$

et

$$\text{Im } f = \text{Im } f^2 \iff E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$$

113**Sept exercices (pot pourri)**

Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

1. Ici, E n'est pas supposé de dimension finie.

Montrer

$$\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g \iff E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g$$

2. On suppose E de dimension finie.

Montrer

$$\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} f \iff \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0\}$$

3. On suppose E de dimension finie.

On suppose que $f + g$ bijectif et $g \circ f = 0$.

Montrer que

$$\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g = \dim E$$

4. On suppose E de dimension finie.

On suppose que

$$E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$$

Établir que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Im} g$ sont $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker} g$ sont supplémentaires dans E .

5. On suppose E de dimension finie.

Montrer

$$\operatorname{rg}(f + g) = \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \implies \operatorname{Im}(f + g) = \operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Im}(g)$$

6. On suppose E de dimension finie.

Montrer

$$\operatorname{rg}(f + g) = \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \implies \begin{cases} \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\} \\ \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = E \end{cases}$$

7. On ne suppose **pas** E de dimension finie

Montrer

$$\operatorname{Im}(f + g) = \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g) \iff \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = E$$

114**Endomorphisme nilpotent**

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent càd tel qu'il existe une puissance $q \in \mathbb{N}$ telle que $f^q = 0$.

On note $p = \min \{k \in \mathbb{N} \mid f^k = 0\}$. Un tel entier s'appelle l'indice de nilpotence de f .

- Montrer qu'il existe $e \in E$ tel que $(e, f(e), \dots, f^{p-1}(e))$ est libre.
- Montrer que $f^n = 0$.

.n ≥ q sur tērtmōM

115**Endomorphisme nilpotent d'indice maximal**

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n .

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ que l'on suppose nilpotent d'indice n , c'est-à-dire vérifiant $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$.

- Montrer qu'il existe $e \in E$ tel que la famille $(e, f(e), \dots, f^{n-1}(e))$ soit une base de E .
- Montrer que l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f est $\operatorname{Vect}(\operatorname{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$.

116**Construction d'une application linéaire à noyau et image fixés**

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, E étant de dimension finie.

Soit K un sous-espace vectoriel de E , et V un sous-espace vectoriel de dimension finie de F .

Montrer qu'il existe une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\operatorname{Ker} u = K$ et $\operatorname{Im} u = V$ si et seulement si $\dim K + \dim V = \dim E$.

117 **Noyaux et images itérés** ————— classique, mais pas facile

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n , et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer qu'il existe $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $\text{Ker } u^p = \text{Ker } u^{p+1}$.

Dans la suite, on considère un tel indice p .

2. Montrer que :

$$\forall k \geq p, \quad \text{Ker } u^k = \text{Ker } u^p \text{ et } \text{Im } u^k = \text{Im } u^p.$$

3. Montrer que $E = \text{Ker } u^p \oplus \text{Im } u^p$.

118 **Le rang d'une composée** —————

Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, ainsi que $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$.

1. En appliquant la formule du rang à la restriction de v à $\text{Im } u$, notée w , montrer que :

$$\text{rg } u = \text{rg}(v \circ u) + \dim(\text{Im } u \cap \text{Ker } v).$$

2. En déduire que $\text{rg}(v \circ u) \geq \text{rg } v + \text{rg } u - \dim F$.

3. Montrer que $\dim(\text{Ker}(v \circ u)) \leq \dim(\text{Ker } v) + \dim(\text{Ker } u)$.

119 **Retour des projecteurs** —————

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n ainsi que u et v deux endomorphismes de E vérifiant $u + v = \text{id}_E$ et $\text{rg}(u) + \text{rg}(v) \leq n$.

Montrer que u et v sont des projecteurs vérifiant $u \circ v = v \circ u = 0$.

120 **Rang 1** —————

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1.

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f^2 = \lambda f$.

Hyperplans et formes linéaires

121 **Intersection d'hyperplans** —————

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$ ainsi que $H_1, \dots, H_r$ des hyperplans de E . Montrer que :

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^r H_i\right) \geq \dim E - r.$$

Utiliser le rang de $u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^r \\ x & \longmapsto & (\phi_1(x), \dots, \phi_r(x)) \end{array}$ avec $H_i = \text{Ker } \phi_i$.

122 **Tout sev est une intersection d'hyperplans** —————

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n .

Soit $r \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E avec $\dim F = n - r$, alors il existe r hyperplans $H_1, \dots, H_r$ de E tels que $F = \bigcap_{i=1}^r H_i$.

Partir d'une base de F .

Des petits problèmes

123

Un problème sur les matrices

Soit $n \geq 2$.

Pour tout couple $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on note $E_{k,\ell}$ la matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient situé sur la k -ème ligne et la ℓ -ème colonne vaut 1 et dont tous les autres coefficients sont nuls.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit les ensembles :

$$L_\alpha = \{M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n m_{i,j} = \alpha\}$$

$$C_\alpha = \{M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{i=1}^n m_{i,j} = \alpha\}$$

$$L = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} L_\alpha \quad C = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} C_\alpha$$

1. (a) Montrer que L_0 est un espace vectoriel.
 (b) Montrer que L_0 est engendré par la famille de matrices $(E_{i,j} - E_{i,n})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, n-1 \rrbracket}$
 (c) Déterminer la dimension de L_0 .
2. (a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 Montrer que M appartient à L_α si et seulement si $M - \alpha I_n$ appartient à L_0 .
 (b) Montrer que $L = \text{Vect}(I_n) \oplus L_0$ puis en déduire la dimension de L .
3. (a) Soit $M = (m_{i,j}) \in L_0$.
 Montrer que M appartient à C_0 si et seulement si, pour tout $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\sum_{i=1}^n m_{i,j} = 0$.
 (b) En déduire une base et la dimension de $L_0 \cap C_0$.
4. (a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M appartient à $L \cap C$ si et seulement s'il existe un réel α tel que M appartienne à $L_\alpha \cap C_\alpha$.
 (b) Déterminer la dimension de l'espace $L \cap C$.

124

L'opérateur de dérivation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On note E_n l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $f : x \mapsto e^x P(x)$ avec $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

1. Montrer que E_n est un sev de $\mathcal{C}^\infty$.
 Montrer que E_n est de dimension finie et en donner une base.
2. Soit Δ l'opérateur de dérivation défini sur E_n par $\Delta(f) = f'$.
 Montrer que Δ est un automorphisme de E_n .
3. Soit $g : x \mapsto e^x x^n$.
 (a) Montrer qu'il existe une unique fonction $h \in E_n$ telle que $\Delta^{n+1}(h) = g$ (on ne cherchera pas à expliciter h).
 (b) Déterminer en fonction de h et de ses dérivées successives les fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty$ telles que

$$D^{n+1}(f) = g, \quad f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0$$

où D désigne l'opérateur de dérivation sur l'ensemble $\mathcal{C}^\infty$.

On pourra raisonner par Analyse-Synthèse.

4. Déterminer les $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\text{Ker}(\Delta - \lambda \text{id}) \neq \{0\}$.
 Pour chaque λ , déterminer une base de $\text{Ker}(\Delta - \lambda \text{id})$.
5. Existe-t-il un nombre fini de scalaires, disons $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{R}$ tels que

$$E_n = \bigoplus_{k=1}^s \text{Ker}(\Delta - \lambda_k \text{id})$$

On pourra noter

$$\text{Sp}(\Delta) = \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \text{Ker}(\Delta - \lambda \text{id}) \neq \{0\} \right\}$$

Soit $n \geq 2$.

On note E l'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

Soit $\mathcal{F} = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} P_0(X) = 1 \\ \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P_k(X) = \frac{1}{k!} X(X-k)^{k-1} \end{cases}$$

1. Justifier que $\mathcal{F}$ est une base de E .
2. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Vérifier que $P'_k(X+1) = P_{k-1}(X)$.
3. Soit f l'application qui à tout élément P de E associe le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = P(X) - P'(X+1)$$

- (3a) Prouver que f est un endomorphisme de E .
 - (3b) Calculer $f(P)$ pour tout polynôme P de $\mathcal{F}$.
 - (3c) Montrer que f est un automorphisme de E .
 - (3d) Montrer que $(X-1)^{n+1}$ est un polynôme annulateur de f .
 - (3e) Déterminer les valeurs propres de f , c'est-à-dire les $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E) \neq \{0_E\}$.
 - (3f) Déterminer la matrice inverse de A .
4. On pose $f^0 = \text{id}_E$ et pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $f^m = f \circ f^{m-1}$.

Soit $P \in E$.

En introduisant l'endomorphisme $g = \text{id} - f$, démontrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$f^m(P) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} P^{(i)}(X+i)$$

où $P^{(i)}$ désigne le polynôme dérivé $i^{\text{ème}}$ de P .

Again...

126

Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et H_1 et H_2 deux hyperplans distincts de E .
Calculer la dimension de $H_1 \cap H_2$.

Dimension finie

Algèbre linéaire, épisode 3

corrigés

Notons $n = \dim E$. D'après la formule de Grassmann, on a

$$\dim(F \cap H) = \dim F + \underbrace{\dim H}_{n-1} - \dim(F + H)$$

Preuve de l'inégalité (★)

Grâce à la formule de Grassmann, pour montrer l'inégalité (★), il suffit (et en fait, il faut et il suffit) de montrer $n - \dim(F + H) \geq 0$.

On a $F + H \subset E$.

D'où $\dim(F + H) \leq n$.

Cas d'égalité de (★)

Grâce à la formule de Grassmann, le cas d'égalité dans (★) correspond¹ à $n - \dim(F + H) = 0$.

Comme $F + H \subset E$, on a l'équivalence $\dim(F + H) = n \iff F + H = E$.

Il s'agit donc de caractériser les cas où on a $F + H = E$.

On a toujours (le fait que H soit un hyperplan n'intervient pas) :

$$H \subset F + H \subset E$$

Le cas d'égalité à gauche est (cf. preuve à venir) :

$$H = F + H \iff F \subset H$$

Donc le cas d'égalité à droite est $F + H = E \iff F \not\subset H$.

Preuve promise de l'équivalence.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $F \subset H$.

Alors $F + H \subset \underbrace{H + H}_{=H}$.

Par ailleurs, on a toujours $H \subset F + H$.

D'où $H = F + H$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $H = F + H$.

Comme on a toujours $F \subset F + H$, on en déduit avec l'hypothèse que $F \subset H$.

Bref. On a égalité dans (★) si et seulement si $F + H = E$, c'est-à-dire si et seulement si $F \not\subset H$.

Autre solution, en ayant deviné au préalable la disjonction de cas.

— Cas $F \subset H$.

Alors $F \cap H = F$.

On a donc $\dim(F \cap H) = \dim F$ qui est strictement supérieur à $\dim F - 1$.

On n'est pas dans le cas d'égalité.

— Cas $F \not\subset H$.

L'inclusion $H \subset F + H$ est donc stricte (WHY?).

On a donc $H \subsetneq F + H \subset E$.

Comme H est un hyperplan, on en déduit $F + H = E$.

D'où $\dim(F + H) = n$.

La formule de Grassmann fournit alors (WHY?) $\dim(F \cap H) = \dim F - 1$.

Donc on est dans le cas d'égalité.

1. Le verbe « correspondre » signifie que c'est une équivalence.

Considérons la famille $(I, A, A^2, \dots, A^{n^2})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

C'est une famille de cardinal $n^2 + 1$ de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est de dimension n^2 .

Cette famille est donc liée.

Il existe donc une relation de liaison non triviale entre les éléments de cette famille, c'est-à-dire entre des puissances de A .

Précisément, il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n^2}) \in \mathbb{K}^{n^2+1}$ différent de l'uplet nul tel que $\sum_{k=0}^{n^2} \lambda_k A^k = 0$.

Posons $P = \sum_{k=0}^{n^2} \lambda_k X^k$.

Ce polynôme n'est pas nul car les λ_k sont non tous nuls et vérifie $P(A) = 0$.

Autre solution.

Considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{K}[X] &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ P &\longmapsto P(A) \end{aligned}$$

Cette application est linéaire.

De plus, elle ne peut pas être injective car $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie alors que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie (nous ne l'avons pas démontré, mais je vous invite à essayer de montrer qu'un espace de dimension infinie ne peut pas s'injecter dans un espace de dimension finie).

Variation des deux solutions précédentes.

Considérons l'application

$$\begin{aligned} \psi_A : \mathbb{K}_{n^2}[X] &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ P &\longmapsto P(A) \end{aligned}$$

Cette application est linéaire.

De plus, elle ne peut pas être injective car sinon on aurait $\underbrace{\dim \mathbb{K}_{n^2}[X]}_{n^2+1} \leq \underbrace{\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K})}_{n^2}$.

Remarque. On vient de montrer qu'une matrice carrée de taille n admet au moins un polynôme annulateur (ici, de degré $\leq n^2$).

Vous apprendrez en Spé que la matrice A possède un polynôme annulateur unitaire de degré n . C'est le théorème de Cayley-Hamilton.

En taille 2, on a déjà vu passer le théorème de Cayley-Hamilton.

En effet, pour une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a la relation $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = 0$.

Donc le polynôme $X^2 - (a+d)X + (ad-bc)$ est un polynôme annulateur de A .

Et au passage, on constate que $a+d = \text{tr } A$ et $ad-bc = \det A$.

1. Soit $M, N \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

On a

$$\begin{aligned} T_U(\lambda M + \mu N) &= \text{tr}(U(\lambda M + \mu N)) \\ &= \text{tr}(\lambda UM + \mu UN) \\ &= \lambda \text{tr}(UM) + \mu \text{tr}(UN) \\ &= \lambda T_U(M) + \mu T_U(N) \end{aligned}$$

Donc T_U est une forme linéaire.

2. Montrons que l'application suivante est un isomorphisme.

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \\ U &\longmapsto T_U \end{aligned}$$

★ Montrons que φ est linéaire.

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $U, V \in E$.

Montrons que $\varphi(\lambda U + \mu V) = \lambda \varphi(U) + \mu \varphi(V)$.

Pour montrer cette égalité de formes linéaires, il suffit de montrer l'égalité

$$\forall M \in E, \quad (\varphi(\lambda U + \mu V))(M) = (\lambda \varphi(U) + \mu \varphi(V))(M)$$

Fixons $M \in E$. On a

$$\begin{aligned} (\varphi(\lambda U + \mu V))(M) &= T_{\lambda U + \mu V}(M) \\ &= \text{tr}((\lambda U + \mu V)M) \\ &= \lambda \text{tr}(UM) + \mu \text{tr}(VM) \\ &= \lambda \varphi(U)(M) + \mu \varphi(V)(M) \\ &= (\lambda \varphi(U) + \mu \varphi(V))(M) \end{aligned}$$

★ Montrons que φ est injective en montrant que son noyau est réduit à la matrice nulle.

Soit $U \in \text{Ker } \varphi$.

Ainsi $\varphi(U) = T_U$ est la forme linéaire nulle. Donc

$$\forall M \in E, \quad T_U(M) = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \text{tr}(UM) = 0$$

On particularise aux matrices élémentaires $E_{i,j}$. Ainsi, pour tous i, j , on a $\text{tr}(UE_{i,j}) = 0$.

Calculons cette trace. En écrivant $U = \sum_{k,\ell} u_{k,\ell} E_{k,\ell}$, le produit $UE_{i,j}$ vaut $\sum_k u_{k,i} E_{k,j}$.

Ainsi,

$$UE_{i,j} = u_{1i} E_{1j} + u_{2i} E_{2j} + \cdots + u_{ji} E_{jj} + \cdots + u_{ni} E_{nj}$$

Donc $\text{tr}(UE_{i,j})$ vaut u_{ji} .

Donc $\text{tr}(UE_{i,j})$ vaut $u_{j,i}$.

On a donc

$$\forall i, j, \quad u_{j,i} = 0$$

Donc la matrice U est nulle

On a donc montré que $\text{Ker } \varphi = \{0_E\}$.

★ On a $\dim E = \dim \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. En effet, on rappelle que $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \dim F$.

Et ici, $F = \mathbb{K}$ est de dimension 1.

Bilan. L'application φ est linéaire, injective, entre deux espaces de même dimension, donc est un isomorphisme.

Rappels et petites choses à connaître.

La matrice AE_{ij} intervient souvent en maths !

C'est la matrice n'ayant que des colonnes nulles, sauf la $j^{\text{ème}}$, qui vaut la $i^{\text{ème}}$ colonne de A .
Ainsi,

$$\forall \ell \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \text{Col}_\ell(AE_{ij}) = \begin{cases} \text{Col}_i(A) & \text{si } \ell = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour la preuve : faire un dessin,

ou bien écrire $A = \sum_{k,\ell} a_{k,\ell} E_{k,\ell}$ et le produit AE_{ij} vaut alors $\sum_k a_{k,i} E_{k,j}$.

Pour ce dernier calcul, on a utilisé la bonne vieille formule : *le produit de deux matrices élémentaires, c'est la matrice « δ du milieu, E des extrémités »*

$$E_{pq} E_{rs} = \delta_{qr} E_{ps}$$

Dit encore autrement, c'est « la relation-de-Chasles-généralisée » :

- si $q \neq r$, la relation de Chasles ne peut pas s'appliquer, et alors, ça fait 0
- si $q = r$, la relation de Chasles s'applique et cela vaut E_{ps}

Calcul automatique de $\text{tr}(AE_{ij})$

On peut également mener un calcul dit « automatique » (= sans réfléchir) pour calculer cette trace. Allons-y.

$$\begin{aligned} \text{tr}(AE_{ij}) &= \sum_{k=1}^n \text{coeff}_{kk}(AE_{ij}) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{\ell=1}^n \text{coeff}_{k\ell}(A) \underbrace{\text{coeff}_{\ell k}(E_{ij})}_{\delta_{\ell i} \delta_{kj}} \right) \\ &= \sum_{\substack{k=j \\ \ell=i}} \text{coeff}_{k\ell}(A) \times 1 \times 1 + \sum_{(k,\ell) \neq (i,j)} \text{coeff}_{k\ell}(A) \times \underbrace{\delta_{\ell i} \delta_{kj}}_{=0} \\ &= \text{coeff}_{ji}(A) \end{aligned}$$

A la deuxième ligne, on a utilisé la formule bien connue

$$\text{coeff}_{pq}(AB) = \sum_{\ell=1}^n \text{coeff}_{p\ell}(A) \text{coeff}_{\ell q}(B)$$

3. Soit H un hyperplan de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrons qu'il existe $U \in E$ tel que $H = \{M \in E \mid \text{tr}(UM) = 0\}$.

D'une part, H est le noyau d'une forme linéaire (non nulle) sur E , en tant qu'hyperplan de E .
Disons $H = \text{Ker } f$.

D'autre part, $\{M \in E \mid \text{tr}(UM) = 0\}$ est exactement $\text{Ker } T_U$.

Il s'agit donc de montrer que f s'écrit T_U pour une certaine matrice U .

Ceci résulte de la surjectivité de φ .

1. Montrons que $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$.

Soit $x \in \text{Ker } f$.

Alors $f(x) = 0_E$.

En appliquant f , on trouve $f(f(x)) = f(0_E)$.

Comme f est linéaire, on a $f(0_E) = 0_E$.

Ainsi, $f^2(x) = 0_E$, donc $x \in \text{Ker } f^2$.

Montrons que $\text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$.

Soit $y \in \text{Im } f^2$.

Ainsi y s'écrit $f^2(x)$ pour un certain x , alors y s'écrit $f(t)$ pour un certain t (à savoir $t = f(x)$).

Donc $y \in \text{Im } f$.

2. $\Rightarrow$ Supposons $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$ (en fait on est en train de supposer que $\text{Ker } f^2 \subset \text{Ker } f$).

Montrons que $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0_E\}$.

Il suffit de montrer l'inclusion $\subset$.

Soit $y \in \text{Im } f \cap \text{Ker } f$. Alors on a deux informations :

$$y \text{ s'écrit } f(x) \text{ pour } x \in E \quad \text{et} \quad f(y) = 0_E$$

Mettons ensemble ces deux informations.

On a donc $f(f(x)) = 0_E$, d'où $f^2(x) = 0_E$, donc $x \in \text{Ker } f^2$.

Or par hypothèse, $\text{Ker } f^2 \subset \text{Ker } f$, donc $x \in \text{Ker } f$.

D'où $f(x) = 0_E$. Or $y = f(x)$. Donc $y = 0_E$.

$\Leftarrow$ Supposons que $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0_E\}$.

Montrons que $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$.

Il suffit de montrer l'inclusion $\supset$, car l'autre inclusion est toujours vraie d'après la question 1.

Soit donc $x \in \text{Ker } f^2$.

On a alors $f(f(x)) = 0_E$.

Ainsi $f(x) \in \text{Ker } f$.

Or $f(x) \in \text{Im } f$ par construction.

On a donc

$$f(x) \in \text{Im } f \cap \text{Ker } f$$

Par hypothèse $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0_E\}$, donc $f(x) = 0_E$, ce qui signifie que $x \in \text{Ker } f$.

3. $\Rightarrow$ Supposons que $\text{Im } f = \text{Im } f^2$ (on suppose donc $\text{Im } f \subset \text{Im } f^2$, car l'autre inclusion est toujours vraie).

Montrons que $E = \text{Im } f + \text{Ker } f$.

Soit $x \in E$ que l'on cherche à écrire comme $\underbrace{y}_{\in \text{Im } f} + \underbrace{z}_{\in \text{Ker } f}$.

Considérons le vecteur $f(x)$ (c'est un peu la seule chose que l'on puisse faire d'intelligent pour provoquer l'utilisation de l'hypothèse).

C'est un élément de $\text{Im } f$, donc d'après l'hypothèse, de $\text{Im } f^2$.

Bref, $f(x) \in \text{Im } f^2$. Donc il existe $a \in E$ tel que $f(x) = f^2(a)$.

Posons $y = f(a)$. C'est un élément de $\text{Im } f$.

Posons $z = x - f(a)$. C'est un élément de $\text{Ker } f$, en effet :

$$f(z) = f(x - f(a)) = f(x) - f^2(a) \stackrel{\text{def de } a}{=} 0_E$$

De plus, $x = y + z$ (n'est-ce pas?).

On a bien réalisé le contrat.

$\Leftarrow$ Supposons que $E = \text{Im } f + \text{Ker } f$.

Montrons que $\text{Im } f = \text{Im } f^2$.

Comme l'inclusion $\supset$ est toujours vraie, il ne reste plus qu'à montrer $\subset$.

Soit $w \in \text{Im } f$. Donc il existe $x \in E$ tel que $w = f(x)$.

D'après l'hypothèse, il existe $y \in \text{Im } f$ et $z \in \text{Ker } f$ tel que

$$x = y + z$$

En appliquant f à cette égalité, on obtient $f(x) = f(y) + 0_E$, donc $w = f(y)$.

Comme $y \in \text{Im } f$, on a $f(y) \in \text{Im } f^2$ (est-ce bien clair pour vous?).

On récupère $w \in \text{Im } f^2$, ce qu'il fallait montrer.

4. Les implications $\boxed{\Leftarrow}$ sont vraies d'après les questions précédentes (WHY?).

Occupons-nous des implications $\Rightarrow$.

• Supposons que $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$.

Montrons que $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$. Pour cela, montrons que (WHY?)

$$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{\text{i}} \quad \text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0_E\} \\ \text{et} \\ \textcircled{\text{ii}} \quad \dim E = \dim(\text{Im } f) + \dim(\text{Ker } f) \end{array} \right.$$

L'égalité $\textcircled{\text{i}}$ résulte de la question 2.

L'égalité $\textcircled{\text{ii}}$ résulte du théorème du rang.

• Supposons que $\text{Im } f = \text{Im } f^2$.

Montrons que $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$. Pour cela, montrons que (WHY?)

$$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{\text{i}} \quad E = \text{Im } f + \text{Ker } f \\ \text{et} \\ \textcircled{\text{ii}} \quad \dim E = \dim(\text{Im } f) + \dim(\text{Ker } f) \end{array} \right.$$

L'égalité $\textcircled{\text{i}}$ résulte de la question 3.

L'égalité $\textcircled{\text{ii}}$ résulte du théorème du rang.

1. Par définition de p , on a $f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.
 Donc il existe $e \in E$ tel que $f^{p-1}(e) \neq 0_E$.
 Pour ce vecteur e , montrons que la famille $(e, f(e), \dots, f^{p-1}(e))$ est libre.

Par l'absurde, en partant par la gauche

Donnons-nous des scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}$ tels que

$$\lambda_0 e + \lambda_1 f(e) + \dots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(e) = 0_E$$

On veut montrer que tous les λ_k sont nuls.

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un λ_k non nul.

Prenons l'indice i le plus **petit** pour lequel λ_i est non nul, autrement dit posons

$$i = \min \left\{ k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket \mid \lambda_k \neq 0 \right\}$$

(c'est licite car l'ensemble en question est une partie de $\mathbb{N}$ non vide).

On a donc :

$$\lambda_i f^i(e) + \lambda_{i+1} f^{i+1}(e) + \dots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(e) = 0_E$$

Appliquons f^{p-1-i} . On a alors

$$\lambda_i f^{p-1}(e) + \lambda_{i+1} f^p(e) + \dots + \lambda_{p-1} f^{2p-2-i}(e) = 0_E$$

Comme, pour tout $k \geq p$, on a $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (WHY), on en déduit

$$\lambda_i f^{p-1}(e) = 0_E$$

Le vecteur $f^{p-1}(e)$ est non nul, donc c'est le scalaire λ_i qui est nul. Contradiction, car $\lambda_i \neq 0$.

Par récurrence « sur les scalaires »

Donnons-nous des scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}$ tels que

$$\lambda_0 e + \lambda_1 f(e) + \dots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(e) = 0_E$$

On veut montrer que tous les λ_k sont nuls.

Pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, on note $\mathcal{H}_k$: « $\lambda_0 = \dots = \lambda_k = 0_{\mathbb{K}}$ ».

— Appliquons f^{p-1} à l'égalité initiale.

Comme, pour tout $i \geq p$, on a $f^i = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (WHY), on en déduit

$$\lambda_0 f^{p-1}(e) = 0_E$$

Le vecteur $f^{p-1}(e)$ est non nul, donc c'est le scalaire λ_0 qui est nul.

D'où $\mathcal{H}_0$.

— Soit $k \in \llbracket 0, p-2 \rrbracket$ tel que $\mathcal{H}_k$. Montrons $\mathcal{H}_{k+1}$.

D'après $\mathcal{H}_k$, on a donc $\lambda_0 = \dots = \lambda_k = 0$.

En reportant dans l'égalité, on obtient

$$\lambda_{k+1} f^{k+1}(e) + \dots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(e) = 0_E$$

Appliquons $f^{p-1-(k+1)}$.

Comme, pour tout $i \geq p$, on a $f^i = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (WHY), on en déduit

$$\lambda_{k+1} f^{p-1}(e) = 0_E$$

Le vecteur $f^{p-1}(e)$ est non nul, donc c'est le scalaire λ_{k+1} qui est nul.

On a donc $\lambda_0 = \dots = \lambda_k = \lambda_{k+1} = 0$, d'où $\mathcal{H}_{k+1}$.

BILAN. On a montré $\forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, \mathcal{H}_k$.

En particulier, $\mathcal{H}_{p-1}$ est vraie. Donc tous les λ_i sont nuls !

Par récurrence (descendante) « sur la famille »

Pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, notons $\mathcal{H}_k$: « la famille $(f^k(e), \dots, f^{p-1}(e))$ » est libre.

— Montrons $\mathcal{H}_{p-1}$.

La famille $(f^{p-1}(e))$ est libre car elle est constituée d'un vecteur non nul.

— Soit $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$. Supposons $\mathcal{H}_k$. Montrons $\mathcal{H}_{k-1}$.

Fixons $\lambda_{k-1}, \dots, \lambda_{p-1}$ tel que

$$\clubsuit \quad \lambda_{k-1}f^{k-1}(e) + \lambda_k f^k(e) + \dots + \lambda_{p-1}f^{p-1}(e) = 0_E$$

Appliquons $f^{p-1-(k-1)}$.

Comme, pour tout $i \geq p$, on a $f^i = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (WHY), on en déduit

$$\lambda_{k-1}f^{p-1}(e) = 0_E$$

Le vecteur $f^{p-1}(e)$ est non nul, donc c'est le scalaire λ_{k-1} qui est nul.

Reportons dans l'égalité $\clubsuit$.

On obtient

$$\lambda_k f^k(e) + \dots + \lambda_{p-1}f^{p-1}(e) = 0_E$$

D'après $\mathcal{H}_k$, la famille $(f^k(e), \dots, f^{p-1}(e))$ est libre, donc tous les scalaires sont nuls :

$$\lambda_k = \dots = \lambda_{p-1} = 0$$

Résumons. On a montré la nullité de tous les scalaires dans l'égalité $\clubsuit$.

Cela signifie que la famille $(f^{k-1}(e), \dots, f^{p-1}(e))$ est libre, d'où $\mathcal{H}_{k-1}$.

Par récurrence (montante) « sur la famille »

Pour tout $j \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, notons $\mathcal{P}_j$: « la famille $(f^{p-1-j}(e), \dots, f^{p-1}(e))$ » est libre.

A vous de continuer.

2. Montrons tout d'abord que $p \leq n$.

Le cardinal d'une famille libre est toujours inférieur ou égal à la dimension de l'espace.

La famille $(e, f(e), \dots, f^{p-1}(e))$ de cardinal p étant une famille libre de E , de dimension n , on en déduit $p \leq n$.

Ainsi, on peut écrire n sous la forme d'une somme de deux entiers *naturels*, à savoir p et $n-p$.

Donc $f^n = f^p \circ f^{n-p} = 0_{\mathcal{L}(E)} \circ f^{n-p} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Notons $d_k = \dim \text{Ker } u^k$.

Comme pour tout k , on a $\text{Ker } u^k \subset \text{Ker } u^{k+1}$, il suffit de montrer (WHY ?) qu'il existe $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $d_p = d_{p+1}$.

Les entiers d_k appartiennent à $\llbracket 0, n \rrbracket$.

Considérons $d_0, d_1, \dots, d_{n+1}$: ils sont au nombre de $n+2$.

D'après le principe des tiroirs, il existe nécessairement deux d_k égaux.

On a donc montré qu'il existe $i \neq j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tels que $d_i = d_j$.

Comme par ailleurs on a

$$d_0 \leq d_1 \leq \dots \leq d_i \leq \dots \leq d_j \leq \dots \leq d_n$$

il y a des égalités partout entre d_i et d_j , d'où $d_i = d_{i+1}$.

2. • Montrons d'abord que $\forall k \geq p, \text{Ker } u^k = \text{Ker } u^{k+1}$.

Soit $k \geq p$.

L'inclusion $\subset$ est évidente.

Soit $x \in \text{Ker } u^{k+1}$.

Montrons que $x \in \text{Ker } u^k$.

On va exploiter à fond l'égalité d'entiers *naturels*

$$k+1 = (p+1) + (k-p) \quad \text{puis} \quad k = (p) + (k-p)$$

On a $u^{k+1}(x) = 0$.

D'où $u^{p+1}(u^{k-p}(x)) = 0$, d'où $u^{k-p}(x) \in \text{Ker } u^{p+1}$.

Or $\text{Ker } u^{p+1} = \text{Ker } u^p$, donc $u^{k-p}(x) \in \text{Ker } u^p$.

D'où $u^p(u^{k-p}(x)) = 0$,

D'où $u^k(x) = 0$.

D'où $x \in \text{Ker } u^k$.

- On montre ensuite par récurrence que $\forall k \geq p, \text{Ker } u^k = \text{Ker } u^p$.

- Montrons $\forall k \geq p, \text{Im } u^k = \text{Im } u^p$.

Soit $k \geq p$.

On a toujours $\text{Im } u^p \subset \text{Im } u^k$.

Par ailleurs, $\text{Ker } u^p = \text{Ker } u^k$, donc par le théorème du rang, on a $\dim(\text{Im } u^p) = \dim(\text{Im } u^k)$.

Par inclusion et égalité des dimensions, on en déduit $\text{Im } u^p = \text{Im } u^k$.

3. D'après le théorème du rang appliqué à u^p , on a l'égalité

$$\dim E = \dim \text{Ker } u^p + \dim \text{Im } u^p$$

Il reste à montrer que la somme de $\text{Ker } u^p$ et $\text{Im } u^p$ est directe.

Soit $x \in \text{Ker } u^p \cap \text{Im } u^p$.

Ainsi, $\begin{cases} u^p(x) = 0 \\ x \text{ s'écrit } u^p(t) \end{cases}$ Ainsi, $u^{2p}(t) = 0$, d'où $t \in \text{Ker } u^{2p}$.

Or d'après la question 1, on a $\text{Ker } u^{2p} = \text{Ker } u^p$, d'où $t \in \text{Ker } u^p$, d'où $u^p(t) = 0$, d'où $x = 0$.

1. Notons $w : \text{Im } u \longrightarrow G$
 $y \longmapsto v(y)$

Cette application est linéaire (car v l'est), et vérifie

- $\text{Im } w = v(\text{Im } u) = \text{Im}(v \circ u)$, d'où $\text{rg}(w) = \text{rg}(v \circ u)$
- $\text{Ker } w = \text{Im } u \cap \text{Ker } v$

Le théorème du rang appliqué à w fournit alors

$$\dim(\text{Im } u) = \dim(\text{Ker } w) + \text{rg}(w)$$

D'où

$$\text{rg}(u) = \dim(\text{Im } u \cap \text{Ker } v) + \text{rg}(v \circ u)$$

2. Utiliser la question précédente et le théorème du rang appliqué à v :

$$\dim F = \text{rg}(v) + \dim(\text{Ker } v)$$

Je vous laisse terminer. Il faudra sûrement utiliser le fait que $\text{Im } u \cap \text{Ker } v \subset \text{Ker } v$, donc...

On finit par obtenir

$$\text{rg}(v \circ u) \geq \text{rg}(v) + \text{rg}(u) - \dim F$$

3. La formule du rang appliquée à u , v et $v \circ u$ fournit :

$$\text{rg}(u) = \dim E - \dim(\text{Ker } u) \quad \text{et} \quad \text{rg}(v) = \dim F - \dim(\text{Ker } v)$$

et $\text{rg}(v \circ u) = \dim E - \dim(\text{Ker}(v \circ u))$.

En reportant dans l'inégalité obtenue à la question précédente, on obtient :

$$\dim(\text{Ker}(v \circ u)) \leq \dim(\text{Ker } v) + \dim(\text{Ker } u).$$

Solution d'un élève, efficace (amélioré par mes soins !)

Montrons que $\text{Im } v \subset \text{Ker } u$ ce qui montrera que $u \circ v = 0$.

En fait, on va montrer que $\text{Im } v = \text{Ker } u$.

Pour cela, raisonnons par inclusion et égalité des dimensions en montrant que $\begin{cases} \text{Ker } u \subset \text{Im } v \\ \dim(\text{Ker } u) = \dim(\text{Im } v) \end{cases}$

Il suffit de montrer que (WHY ?) $\begin{cases} \text{Ker } u \subset \text{Im } v \\ \dim(\text{Ker } u) \geq \dim(\text{Im } v) \end{cases}$

— Soit $x \in \text{Ker } u$.

Comme $\text{id}_E = u + v$, on a $x = u(x) + v(x)$.

Par hypothèse $x \in \text{Ker } u$, donc $x = v(x)$, donc $x \in \text{Im } v$.

— D'après le théorème du rang appliqué à u , on a $n = \dim(\text{Ker } u) + \text{rg}(u)$.

L'hypothèse $\text{rg}(u) + \text{rg}(v) \leq n$ se réécrit donc $\text{rg}(v) \leq \dim(\text{Ker } u)$.

Ma solution initiale (presque trop compliquée !)

On a toujours

$$\text{Im}(u + v) \subset \text{Im } u + \text{Im } v \subset E$$

Comme $u + v = \text{id}$, on a $\text{Im}(u + v) = E$, d'où égalité partout. Ainsi,

$$E = \text{Im } u + \text{Im } v$$

Par ailleurs, l'hypothèse dit que $\dim E = \dim(\text{Im } u) + \dim(\text{Im } v)$, donc $\text{Im } u$ et $\text{Im } v$ sont en somme directe (on peut penser à Grassmann).

Ainsi,

$$E = \text{Im } u \oplus \text{Im } v$$

Montrons que $\text{Im } u \subset \text{Ker } v$ ce qui montrera que $v \circ u = 0$.

Soit $x \in \text{Im } u$ que l'on écrit en utilisant $u + v = \text{id}$ de deux manières :

$$x + 0 = u(x) + v(x)$$

Comme la somme est directe, on en déduit que $x = u(x)$ et $0 = v(x)$. Bref, $x \in \text{Ker } v$.

Bilan : $v \circ u = 0$. Puis, comme $u + v = \text{id}$, on obtient $(\text{id} - u) \circ u = 0$, d'où $u^2 = u$.

Comme u et v jouent des rôles symétriques, on en déduit $u \circ v = 0$ et $v^2 = v$.

Remarque pour moi.

Les hypothèses $u + v = \text{Id}_E$ et $\text{rg}(u) + \text{rg}(v) \leq n$ impliquent $\text{rg}(u) + \text{rg}(v) \leq \text{rg}(u + v)$.

Comme on a toujours $\text{rg}(u + v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$, on en déduit qu'il y a égalité.

Et quand on a un peu de métier, on sait que l'égalité $\text{rg}(u + v) = \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$ force l'égalité $\text{Im}(u + v) = \text{Im } u \oplus \text{Im } v$ (ce n'est pas complètement évident !).

Comme f est de rang 1, l'image de f admet une base de cardinal 1, disons $\text{Im } f = \text{Vect}(v)$.

Comme $f(v) \in \text{Im } f = \text{Vect}(v)$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(v) = \lambda v$.

Montrons que $\forall x \in E, f^2(x) = \lambda f(x)$.

Soit $x \in E$.

Comme $f(x) \in \text{Im } f = \text{Vect}(v)$, il existe μ_x tel que $f(x) = \mu_x v$.

D'où $f^2(x) = f(f(x)) = f(\mu_x v) = \mu_x f(v) = \mu_x \lambda v = \lambda \underbrace{\mu_x v}_{f(x)}$.

Bilan. On a montré $\forall x \in E, f^2(x) = \lambda f(x)$.

D'où l'égalité d'endomorphismes $f^2 = \lambda f$.

Comme H_i est un hyperplan, il existe une forme linéaire ϕ telle que $\text{Ker } \phi = H_i$.

Considérons $u : E \longrightarrow \mathbb{K}^r$
 $x \longmapsto (\phi_1(x), \dots, \phi_r(x))$.

L'application u est linéaire (car les ϕ sont linéaires).

Le noyau de u est $H_1 \cap \dots \cap H_r$ (WHY?).

Or l'espace de départ de u , à savoir E , est de dimension finie. Le théorème du rang appliqué à u fournit donc :

$$\dim(H_1 \cap \dots \cap H_r) = \dim(E) - \text{rg}(u) \geq n - r$$

La dernière égalité provient du fait que $\text{rg}(u) \leq \dim \mathbb{K}^r = r$ (le rang d'une application linéaire est toujours inférieur à la dimension de l'espace d'arrivée).

Grâce au théorème de la base incomplète, on peut considérer une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E dont les $n - r$ derniers vecteurs forment une base de F (i.e. $F = \text{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$).

On peut caractériser l'appartenance à F pour un vecteur $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$:

$$x \in F \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ \vdots \\ x_r = 0 \end{cases}$$

Pour tout k , on pose $H_k = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E \mid x_k = 0 \right\}$ de sorte que l'équivalence précédente se réécrit :

$$x \in F \iff x \in \bigcap_{k=1}^r H_k$$

Donc $F = \bigcap_{k=1}^r H_k$.

Or, on remarque que H_k est un hyperplan de E (WHY?).
D'où F est l'intersection de r hyperplans de E .

1. (a) Notons U la matrice colonne dont tous les éléments valent 1. On a alors

$$M \in L_0 \iff MU = 0$$

Donc L_0 est le noyau de l'application $\varphi : M \mapsto MU$, qui est clairement linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Donc L_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- (b) Soit $M \in L_0$.

On a alors $\forall i, m_{i,n} = - \sum_{j=1}^{n-1} m_{i,j}$.

Ainsi, en utilisant la décomposition de M dans la base des $E_{i,j}$, on a

$$M = \sum_{i,j} m_{i,j} E_{i,j}$$

d'où

$$M = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} m_{i,j} (E_{i,j} - E_{i,n})$$

D'où

$$M \in \text{Vect} \left(E_{i,j} - E_{i,n} \right)_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,n-1 \rrbracket}$$

D'où l'inclusion

$$L_0 \subset \text{Vect} \left(E_{i,j} - E_{i,n} \right)_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,n-1 \rrbracket}$$

Les matrices $E_{i,j} - E_{i,n}$ sont dans L_0 , d'où

$$L_0 \supset \text{Vect} \left(E_{i,j} - E_{i,n} \right)_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,n-1 \rrbracket}$$

- (c) La famille $(E_{i,j} - E_{i,n})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,n-1 \rrbracket}$ est d'après la question précédente génératrice de L_0 .

De plus, c'est une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

En effet, soit $(m_{i,j})$ une famille de scalaires telle que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} m_{i,j} (E_{i,j} - E_{i,n}) = 0$$

Alors :

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{n-1} m_{i,j} E_{i,j} - \left(\sum_{j=1}^{n-1} m_{i,j} \right) E_{i,n} \right) = 0$$

Ainsi (WHY), on a pour tout (i,j) , $m_{i,j} = 0$.

Bilan. Cette famille est une base de L_0 .

Elle contient $n(n-1)$ éléments, d'où

$$\dim L_0 = n(n-1)$$

2. (a)

$$\begin{aligned} M \in L_\alpha &\iff MU = \alpha U \\ &\iff (M - \alpha I_n)U = 0 \\ &\iff M - \alpha I_n \in L_0 \end{aligned}$$

- (b) • Montrons d'abord $L = \text{Vect}(I_n) + L_0$. On a

$$\begin{aligned} M \in L &\iff \exists \alpha \in \mathbb{R}, M \in L_\alpha \\ &\iff \exists \alpha \in \mathbb{R}, M - \alpha I_n \in L_0 \\ &\iff M \in \text{Vect}(I_n) + L_0 \end{aligned}$$

- On a $L_0 \cap \text{Vect}(I_n) = \{0\}$ (WHY ?)

BILAN. On a $L = \text{Vect}(I_n) \oplus L_0$.

D'où

$$\dim L = 1 + n(n-1)$$

3. (a) Soit $M \in L_0$.

Montrons

$$M \in C_0 \iff \forall j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \sum_{i=1}^n m_{ij} = 0$$

L'implication $\implies$ est évidente.

Pour l'autre implication : supposons que la somme des coefficients des $n-1$ premières colonnes est nulle.

Comme $M \in L_0$, la somme des éléments de chaque ligne est nulle, donc la somme de tous les coefficients est nulle.

On en déduit que la somme des coefficients de la dernière colonne est nulle, donc $M \in C_0$.

- (b) En utilisant un raisonnement analogue au précédent, ou en transposant, on montre que C_0 est un espace vectoriel. Ainsi, $L_0 \cap C_0$ est l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $L_0 \cap C_0$ est un espace vectoriel.

Un élément de $L_0 \cap C_0$ est donc parfaitement déterminé par son bloc $(n-1, n-1)$ situé en haut à gauche.

Il est donc combinaison linéaire des matrices $E_{i,j} - E_{i,n} - E_{n,j} + E_{n,n}$ (pour ajuster la nullité par ligne et par colonne, ainsi que pour la dernière ligne et la dernière colonne).

Ainsi, la famille $(E_{i,j} - E_{i,n} - E_{n,j} + E_{n,n})_{(i,j) \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket^2}$ est une famille génératrice de $L_0 \cap C_0$.

De plus, elle est libre (WHY ?).

C'est donc une base de $L_0 \cap C_0$. Ainsi :

$$\dim L_0 \cap C_0 = (n-1)^2$$

4. (a) On raisonne par double implication.

($\Leftarrow$) Supposons qu'il existe un réel α tel que $M \in L_\alpha \cap C_\alpha$, alors $M \in L \cap C$.

($\Rightarrow$) On suppose que $M \in L \cap C$. Alors, il existe $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ tels que $M \in L_\alpha$ et $M \in C_{\alpha'}$.

Ainsi, pour tous i, j , on a

$$\sum_{j=1}^n m_{i,j} = \alpha \qquad \sum_{i=1}^n m_{i,j} = \alpha'$$

Ainsi $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j} = n\alpha = n\alpha'$.

D'où $\alpha = \alpha'$, donc $M \in L_\alpha \cap C_\alpha$.

- (b) Ainsi $M \in L \cap C$ si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $M - \alpha I_n \in L_0 \cap C_0$.

Donc, $L \cap C = \text{Vect}(I_n) \oplus (L_0 \cap C_0)$.

Ainsi

$$\dim L \cap C = 1 + (n-1)^2$$

On note E_n l'ev des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $f : x \mapsto e^x P(x)$ avec $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

1. On pose $f_k : x \mapsto e^x x^k$.
Cette fonction f_k est dans $\mathcal{C}^\infty$.
Par définition, on a

$$E_n = \text{Vect}(f_0, \dots, f_n)$$

Ainsi E_n admet une famille génératrice finie, donc est de dimension finie.

De plus, on montre que la famille $(f_0, \dots, f_n)$ est libre (à faire sur une copie de pale).

Bilan :

$$\dim E_n = n + 1$$

2. • Il est clair que Δ est linéaire.
• Pour $f = e^x P(x) \in E_n$, alors
 $\Delta(f) : x \mapsto e^x (P(x) + P'(x))$. Donc $\Delta(f) \in E_n$.

Bilan. Δ est un endomorphisme de E_n .

- Montrons maintenant que Δ est bijectif.

Comme E_n est de dimension finie, il suffit de montrer que Δ est injectif.

Montrons pour cela que $\text{Ker } \Delta = \{0\}$.

Soit $f \in \text{Ker } \Delta$.

Alors $f \in E_n$ et $\Delta(f) = 0$.

Ecrivons f sous la forme $x \mapsto e^x P(x)$.

Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x (P(x) + P'(x)) = 0$$

Comme $e^x \neq 0$, on a $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) + P'(x) = 0$,

d'où (WHY ?) $P + P' = 0$.

Donc $P = -P'$, donc $P = 0$.

Donc $f = 0$.

3. (a) Comme Δ est un automorphisme, alors Δ^{n+1} aussi.
Donc g admet un unique antécédent par Δ^{n+1} .
(b) **Analyse.** Supposons qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty$ telle que $D^{n+1}(f) = g$ et $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0$.
Par définition de h , qui est dans E_n donc dans $\mathcal{C}^\infty$, on a $\Delta^{n+1}(h) = D^{n+1}(h) = g$, d'où

$$D^{n+1}(f) = D^{n+1}(h)$$

Ainsi $D^{n+1}(f - h) = 0$.

Dit autrement, $f - h$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ dont la dérivée $(n+1)$ -ème est nulle.

Ainsi (WHY ?), $f - h$ est une fonction polynomiale de degré $\leq n$.

Il existe donc $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$f : x \mapsto h(x) + P(x)$$

D'après la formule de Taylor, on a

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

Or $P = f - h$, donc $P^{(k)} = f^{(k)} - h^{(k)}$, et donc par hypothèse faite sur f , on a $P^{(k)}(0) = -h^{(k)}(0)$.

Bilan de l'analyse.

Si f existe telle que ..., alors f est de la forme

$$f : x \mapsto h(x) + \sum_{k=0}^n \frac{-h^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Synthèse. Considérons f la fonction

$$f : x \mapsto h(x) + \sum_{k=0}^n \frac{-h^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

que l'on peut voir comme $h + Q$ avec Q une fonction polynomiale de degré $\leq n$.

On a

- f est de classe $\mathcal{C}^\infty$
- $D^{n+1}(f) = D^{n+1}(h) + D^{n+1}(Q) = g + 0 = g$
- $f^{(k)}(0) = h^{(k)}(0) + Q^{(k)}(0) = h^{(k)}(0) - h^{(k)}(0) = 0$

4. Déterminer les $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\text{Ker}(\Delta - \lambda \text{id}) \neq \{0\}$.

Analyse.

Soit λ tel que $\text{Ker}(\Delta - \lambda \text{id}) \neq \{0\}$.

Alors il existe $f \in E_n$ **non nulle** telle que $\Delta(f) = \lambda f$.

On écrit f sous la forme $x \mapsto e^x P(x)$.

L'égalité $f' = \lambda f$ s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x (P(x) + P'(x)) = \lambda e^x P(x)$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (P + P')(x) = \lambda P(x)$$

Les polynômes $P + P'$ et λP coïncident sur un ensemble infini, donc ils sont égaux. D'où $P' = (\lambda - 1)P$.

On a alors nécessairement $\lambda = 1$ (WHY?). En effet, si $\lambda - 1 \neq 0$, on aurait, en considérant le degré de l'égalité $P' = (\lambda - 1)P$, que $P = 0$, ce qui n'est pas car f n'est pas nulle.

Synthèse.

Réciproquement, vérifions que $\text{Ker}(\Delta - \text{id}) \neq \{0\}$.

La fonction $f : x \mapsto e^x$ est non nulle et dans $\text{Ker}(\Delta - \text{id})$.

5. Montrons que ce n'est pas le cas.

Raisonnons par l'absurde.

On aurait alors nécessairement

$$E_n = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(\Delta)} \text{Ker}(\Delta - \lambda \text{id})$$

D'après la question précédente, on a $\text{Sp}(\Delta) = \{1\}$, d'où

$$E_n = \text{Ker}(\Delta - \text{id})$$

Or $\text{Ker}(\Delta - \text{id}) = \text{Vect}(f_0)$ où $f_0 : x \mapsto e^x$.

Donc E_n n'est pas égal à $\text{Ker}(\Delta - \text{id})$.

- Tout d'abord, remarquons que la famille $\mathcal{F}$ est une famille libre. En effet, c'est une famille de polynômes non nuls échelonnée en degrés.
- Reste à montrer que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E .

Ce n'est pas facile !

En fait, **au mois de Mai**, nous n'aurons pas besoin de montrer l'aspect générateur. On pourra dire (avec un théorème de demi-fainéant) :

La famille $\mathcal{F} = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une famille libre de E de bon cardinal (« de bon cardinal » voulant dire que $\mathcal{F}$ possède $\dim E$ vecteurs). Donc $\mathcal{F}$ est une base de E .

Mais comme on n'est pas encore au mois de Mai (ah, si, maintenant, on y est, mais je laisse quand même la preuve ci-dessous), on va prouver que la famille $\mathcal{F}$ est génératrice de E .

Pour cela, on se donne un polynôme Q quelconque de E .

On cherche à montrer que Q est combinaison linéaire des polynômes $P_0, \dots, P_n$.

Autrement dit, on cherche à montrer qu'il existe des scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n = Q$$

En identifiant les coefficients en $X^0, X^1, \dots, X^n$ de cette égalité, cela revient à montrer l'existence de scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ vérifiant le système

$$\begin{cases} \lambda_0 \text{coeff}_{X^0}(P_0) + \lambda_1 \text{coeff}_{X^0}(P_1) + \dots + \lambda_n \text{coeff}_{X^0}(P_n) = \text{coeff}_{X^0}(Q) \\ \lambda_0 \text{coeff}_{X^1}(P_0) + \lambda_1 \text{coeff}_{X^1}(P_1) + \dots + \lambda_n \text{coeff}_{X^1}(P_n) = \text{coeff}_{X^1}(Q) \\ \vdots \\ \lambda_0 \text{coeff}_{X^n}(P_0) + \lambda_1 \text{coeff}_{X^n}(P_1) + \dots + \lambda_n \text{coeff}_{X^n}(P_n) = \text{coeff}_{X^n}(Q) \end{cases}$$

En fait (WHY ?), on obtient le système *triangulaire* suivant

$$\begin{cases} \lambda_0 \text{coeff}_{X^0}(P_0) + \lambda_1 \text{coeff}_{X^0}(P_1) + \lambda_2 \text{coeff}_{X^0}(P_2) + \dots + \lambda_n \text{coeff}_{X^0}(P_n) = \text{coeff}_{X^0}(Q) \\ \lambda_1 \text{coeff}_{X^1}(P_1) + \lambda_2 \text{coeff}_{X^1}(P_2) + \dots + \lambda_n \text{coeff}_{X^1}(P_n) = \text{coeff}_{X^1}(Q) \\ \lambda_2 \text{coeff}_{X^2}(P_2) + \dots + \lambda_n \text{coeff}_{X^2}(P_n) = \text{coeff}_{X^2}(Q) \\ \vdots \\ \lambda_n \text{coeff}_{X^n}(P_n) = \text{coeff}_{X^n}(Q) \end{cases}$$

Dans notre exercice, on a $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \text{coeff}_{X^k}(P_k) = \frac{1}{k!}$

Le système précédent s'écrit matriciellement :

matrice triangulaire avec une belle diagonale à dessiner : à vous de faire le dessin

La matrice qui intervient est triangulaire supérieure avec aucun zéro sur la diagonale donc elle est inversible.

Donc en inversant la matrice, on obtient des λ_i en fonction des coefficients de Q tels que...

BILAN : la famille $\mathcal{F}$ est génératrice de E .

D'ailleurs, est-ce que cette dernière preuve ne montrerait pas directement que la famille $\mathcal{F}$ est une base de E ?

Autre preuve.

On veut montrer que $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \mathbb{K}_n[X]$.

L'inclusion non évidente est $\supset$ et cette inclusion revient à montrer que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, X^k \in \text{Vect}(\mathcal{F})$$

Montrons que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la propriété $\mathcal{H}_k$: « $X^k \in \text{Vect}(\mathcal{F})$ » est vraie.

Procédons par récurrence forte.

$\triangleright$ Initialisation. La propriété $\mathcal{H}_0$ est vraie car X^0 vaut P_0 qui est bien dans $\text{Vect}(\mathcal{F})$.

▷ Hérité. Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On suppose que les propriétés $\mathcal{H}_0, \dots, \mathcal{H}_k$ sont vraies.

Montrons $\mathcal{H}_{k+1}$.

On a l'égalité

$$P_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!} X(X - (k+1))^k = \frac{1}{(k+1)!} [X^{k+1} + R] \quad \text{avec } R \text{ de degré } \leq k$$

Ainsi

$$\star \quad X^{k+1} = (k+1)! P_{k+1} - R$$

• Le polynôme R est de degré $\leq k$, donc est combinaison linéaire de $X^0, \dots, X^k$.

D'après $\mathcal{H}_0, \dots, \mathcal{H}_k$, on en déduit que R est dans $\text{Vect}(\mathcal{F})$.

• Le polynôme P_{k+1} est un polynôme de la famille $\mathcal{F}$, donc est a fortiori dans $\text{Vect}(\mathcal{F})$.

L'égalité $\star$ et les deux points • précédents montrent que X^{k+1} est dans $\text{Vect}(\mathcal{F})$.

2. Pour $k = 1$, on a $P'_1(X + 1) = 1 = P_0(X)$.

Pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on a

$$P'_k(X + 1) = \frac{1}{k!}(X + 1 - k)^{k-1} + \frac{k-1}{k!}(X + 1)(X + 1 - k)^{k-2} = \frac{1}{(k-1)!}X(X + 1 - k)^{k-2} = P_{k-1}$$

3. (3a) On remarque que $f = \text{id}_E - g$ où $g : P \mapsto P'(X + 1)$.

Il suffit de montrer que g est un endomorphisme. Et ce n'est pas trop dur !

Ainsi, f est un endomorphisme de E .

(3b) On a $f(P_0) = P_0$.

Et pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $f(P_k) = P_k - P'_k(X + 1) = P_k - P_{k-1}$.

(3c) La matrice de f dans la base $\mathcal{F}$ est $A =$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cette matrice est inversible, donc f est un automorphisme de E .

(3d) Montrons que $(X - 1)^{n+1}$ est un polynôme annulateur de f .

Autrement dit, montrons que $(f - \text{id})^{n+1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

En notant $g : P \mapsto P'(X + 1)$, on remarque que $f = \text{id}_E - g$.

Ainsi $(f - \text{id}_E)^{n+1} = (-1)^{n+1}g^{n+1}$.

Il suffit donc de montrer que $g^{n+1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Pour cela, on va calculer les itérés de g .

Par une récurrence immédiate, on montre que $g^k : P \mapsto P^{(k)}(X + k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

En particulier $g^{n+1} : P \mapsto P^{(n+1)}(X + n)$.

Or lorsque P est de degré $\leq n$, alors $P^{(n+1)}$ est le polynôme nul. Ainsi, l'endomorphisme g^{n+1} , défini sur $E = \mathbb{K}_n[X]$, est nul.

(3e) Déterminer les valeurs propres de f , c'est-à-dire les $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E) \neq \{0_E\}$.

Analyse.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f .

Faisons une remarque HORS CONTEXTE. De manière générale, lorsqu'on a un endomorphisme f d'un espace vectoriel E annulé par un certain polynôme Q , alors une valeur propre de f est racine de Q .

En effet, une égalité du type $f(x) = \lambda x$ s'itère de la manière suivante $f^2(x) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda \lambda x = \lambda^2 x$, et on montre que $f^k(x) = \lambda^k x$ par récurrence.

Ainsi si $Q(f) = 0$ avec $Q = \sum b_k X^k$, alors $Q(f) = \sum b_k f^k$.

En prenant l'image de x par cet endomorphisme, on a $Q(f)(x) = \sum b_k f^k(x)$.

Si x vérifie $f(x) = \lambda x$, alors $Q(f)(x) = \sum b_k \lambda^k x$; d'où $P(\lambda)x = 0_E$.

Si $x \neq 0_E$ (ce qui est le cas si c'est un vecteur propre), alors on en déduit que $P(\lambda) = 0$.

Comme le polynôme $Q = (X - 1)^{n+1}$ est annulateur de f , on en déduit que λ est racine de Q , autrement dit que $\lambda = 1$.

Bilan de l'Analyse : si λ est valeur propre de f , alors nécessairement $\lambda = 1$.

Synthèse.

Vérifions (ou pas) que 1 est valeur propre.

Il s'agit de voir s'il existe un polynôme P **non nul** tel que $f(P) = P$, c'est-à-dire tel que $P - P'(X + 1) = 0$.

Et c'est bien le cas en prenant un polynôme constant non nul. Il vérifie bien $f(P) = P$!

(3f) Pour déterminer la matrice inverse de A , soit on écrit le système $Y = AX$ à inverser avec le pivot de Gauss.

Ou bien on écrit $A = I - N$ avec N la matrice ayant une surdiagonale de 1 et des 0 ailleurs. Les puissances de N sont évidentes à calculer et on a $N^{n+1} = 0$.

En utilisant l'identité de Bernoulli (car I et N commutent), on a

$$I^{n+1} - N^{n+1} = (I - N) \sum_{k=0}^n N^k \quad \text{ce qui s'écrit} \quad I = A \sum_{k=0}^n N^k$$

Donc $A^{-1} = \sum_{k=0}^n N^k$, ce qui, après calculs des puissances de N , donne :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Première preuve, sans se fatiguer. Fixons $m \in \mathbb{N}$.

On écrit f sous la forme $\text{id}_E - g$ avec $g : P \mapsto P'(X + 1)$.

Comme id_E et g commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton et on obtient :

$$f^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^k g^k$$

Appliquons cette égalité d'endomorphismes à un polynôme quelconque. On obtient :

$$\forall P \in E, \quad f^m(P) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^k g^k(P)$$

Or, par récurrence immédiate, on montre que $g^k : P \mapsto P^{(k)}(X + k)$. Donc

$$f^m(P) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^k P^{(k)}(X + k)$$

Soit $P \in E$. Démontrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$f^m(P) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} P^{(i)}(X + i)$$

Deuxième preuve, on reprouve le binôme de Newton dans ce cas particulier.

On prouve par récurrence sur m le résultat proposé.

On peut commencer par fixer un polynôme P qui ne bougera pas.

Pour tout entier naturel m , on pose

$$\mathcal{H}(m) : \quad f^m(P)(X) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} P^{(i)}(X + i)$$

• $\mathcal{H}(0)$ est vraie.

• Soit $m \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{H}(m)$. Montrons $\mathcal{H}(m + 1)$.

En écrivant que $f^{m+1} = f \circ f^m$ et en utilisant $\mathcal{H}(m)$, on a :

$$f^{m+1}(P) = f \circ f^m(P) = f \left(\sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} P^{(i)}(X + i) \right)$$

Par linéarité de f , puis définition de f :

$$f^{m+1}(P) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} f \left(P^{(i)}(X + i) \right) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} \left(P^{(i)}(X + i) - P^{(i+1)}(X + i + 1) \right)$$

Ensuite, on utilise la linéarité du symbole Σ , puis on fait un changement d'indice.

$$= \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} P^{(i)}(X + i) - \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} P^{(i+1)}(X + i + 1)$$

$$= \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} P^{(i)}(X+i) - \sum_{j=1}^{m+1} (-1)^{j-1} \binom{m}{j-1} P^{(j)}(X+j)$$

Enfin, on sort le terme pour $i = 0$ et le terme pour $j = m + 1$. D'où

$$= (-1)^0 \binom{m}{0} P^{(0)}(X+0) + \sum_{i=1}^m (-1)^i \left[\binom{m}{i} + \binom{m}{i-1} \right] P^{(i)}(X+i) + (-1)^{m+1} \binom{m}{m} P^{(m+1)}(X+m+1)$$

D'où

$$f^{m+1}(P)(X) = \sum_{i=0}^{m+1} (-1)^i \binom{m+1}{i} P^{(i)}(X+i)$$

Ce qui établit $\mathcal{H}(m+1)$.

- D'après la formule de Grassmann, on a

$$\dim(H_1 \cap H_2) = \underbrace{\dim H_1}_{n-1} + \underbrace{\dim H_2}_{n-1} - \dim(H_1 + H_2)$$

- On a

$$H_1 \stackrel{\star}{\subset} H_1 + H_2 \subset E$$

En prenant les dimensions :

$$n - 1 \leq \dim(H_1 + H_2) \leq n$$

Donc $\dim(H_1 + H_2)$ vaut $n - 1$ ou n .

Supposons un instant que $\dim(H_1 + H_2) = n - 1$.

On aurait alors une égalité dans l'inclusion $\star$ à gauche (WHY ?), càd $H_1 = H_1 + H_2$.

En reprenant le même raisonnement et en échangeant les rôles de H_1 et H_2 , on aurait aussi $H_2 = H_1 + H_2$.

Donc on aurait $H_1 = H_2$ (par transitivité de l'égalité).

Mais ceci est contraire à l'hypothèse faite dans l'énoncé.

Donc $\dim(H_1 + H_2) = n$.

Reprenons l'égalité de Grassmann.

On a alors

$$\dim(H_1 \cap H_2) = (n - 1) + (n - 1) - n = n - 2$$