

Représentation matricielle des applications linéaires

I	Matrice d'une famille de vecteurs dans une base	3
	Matrice d'un vecteur	
	Matrice d'une famille de vecteurs	
II	Matrice d'une application linéaire, d'un endomorphisme . . .	7
	Définitions et exemples	
	Premières propriétés	
III	Changement de bases	14
	Matrice de changement de base	
	Changement de bases pour une application linéaire	
IV	Application linéaire canoniquement associée à une matrice . .	17
	Définition	
	Rang d'une matrice	
	Calcul pratique du rang d'une matrice	
V	Matrices équivalentes et rang	22
VI	Matrices semblables et trace	22



Rappels

- **Définition.** Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On définit le noyau et l'image de A :

$$\text{Ker } A = \left\{ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})} \right\} \quad \text{et} \quad \text{Im } A = \text{Vect}(\text{Col}_1(A), \dots, \text{Col}_p(A))$$

En posant $f_A : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on a $\text{Ker } A = \text{Ker } f_A$ et $\text{Im } A = \text{Im } f_A$.

$$X \longmapsto AX$$

Proposition.

- En effectuant des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice, on ne change pas son noyau.
- En effectuant des opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice, on ne change pas son image.

- **Définition.** Une matrice *carrée* A est inversible lorsqu'il existe une matrice carrée B telle que
$$\begin{cases} AB = I \\ BA = I \end{cases}$$

- **Théorème (Caractérisation de l'inversibilité en termes de $AX = Y$).** (preuve difficile et faite)

$$A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \exists ! X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad AX = Y$$

Reformulation du théorème.

En posant $f_A : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ l'équivalence se réécrit :

$$X \longmapsto AX$$

$$A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \exists ! X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad f_A(X) = Y$$

ou encore

$$A \text{ inversible} \iff f_A \text{ bijective}$$

- **Théorème (Caractérisation de l'inversibilité en termes de $AX = 0$).** (preuve pas encore faite)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si l'équation $AX = 0$ admet une unique solution (qui est nécessairement 0), alors A est inversible.

D'où

$$A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \left(\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad AX = 0 \implies X = 0 \right)$$

Reformulation. Le théorème s'énonce :

$$A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \text{Ker } A = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\}$$

ou encore en termes de f_A :

$$f_A \text{ bijective} \iff \text{Ker } f_A = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\}$$

ou encore

$$f_A \text{ bijective} \iff f_A \text{ injective}$$



Le plus souvent dans ce chapitre, nous travaillerons avec des espaces vectoriels de dimension finie, c'est-à-dire ayant une base avec un nombre fini de vecteurs.

On ne verra donc pas souvent $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Cela dit, on pourra voir passer des sous-espaces vectoriels de dimension finie de ces espaces.

On verra par exemple très souvent apparaître $\mathbb{K}_n[X]$.

I. Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Matrice d'un vecteur

1

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E , disons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

Soit $v \in E$ que l'on écrit de manière unique sur la base $\mathcal{B}$; disons $v = \sum_{k=1}^n \gamma_k e_k = \gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_n e_n$.

Alors la matrice de v dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice *colonne* de taille n suivante :

Remarques.

- Il ne faut pas avoir peur de « border » la matrice colonne $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$
 - à droite, par les vecteurs de la base $\mathcal{B}$
 - en haut, par le vecteur v
- Dans la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$, il y a des **scalaires**, c'est-à-dire des éléments de $\mathbb{K}$.
- Cela n'a aucun sens de parler de ~~LA matrice de v~~ . Il faut préciser la base choisie (qui n'est pas unique!). Bref, apprenez la locution suivante « la-matrice-de- v -dans-la-base- $\mathcal{B}$ ».

Exemples.

- On pose $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$. On considère $P \in \mathbb{K}_2[X]$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$. Alors $P = \dots\dots\dots$
- On pose $\mathcal{B} = (X^2, 1, X)$. On considère $P \in \mathbb{K}_2[X]$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$. Alors $P = \dots\dots\dots$
- Considérons $\mathbb{K}^2$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_{\text{cano}}$.
Soit $\mathcal{C} = ((1, 2), (0, 1))$. Cette famille est une base de $\mathbb{K}^2$ (WHY?).
Soit $v = (5, 4) \in \mathbb{K}^2$.

Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{cano}}}(v) =$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(v) =$$



- Dans $\mathbb{K}_2[X]$, considérons $P = aX^2 + bX + c$ et $Q = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$.

Notons $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$.

D'une part,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P) =$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(Q) =$$

$$\text{d'où } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P) + \text{Mat}_{\mathcal{B}}(Q) =$$

D'autre part, comme $P + Q = (a + \alpha)X^2 + (b + \beta)X + (c + \gamma)$, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P + Q) = \dots\dots\dots$

2

Proposition.

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n équipé d'une base $\mathcal{B}$.

- (i) Soit $v, v' \in E$ et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$. On a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\lambda v + \lambda' v') = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) + \lambda' \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v')$$

- (ii) L'application

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}: E \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

$$v \longmapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$$

est un isomorphisme.

- Le point (i) dit que l'application $\text{Mat}_{\mathcal{B}}$ du point (ii) est une application linéaire.
- Le point (ii) est une manière pompeuse de dire que, dans un espace de dimension n , la donnée de n scalaires déterminent de manière unique un vecteur, à condition d'avoir fixé une base.

Matrice d'une famille de vecteurs

3

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie équipé d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

Soit $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de E .

La matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) =$$

Autrement dit, la $j^{\text{ème}}$ colonne de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_p)$ est la matrice colonne $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_j)$.

- Si on écrit chaque v_j sur $\mathcal{B}$ (de manière unique!), disons $v_j = \dots\dots\dots$ alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.



Exemples.

- Soit $E = \mathbb{K}_3[X]$ muni de la base canonique $\mathcal{B}_{\text{cano}} = (1, X, X^2, X^3)$.
Soit la famille $\mathcal{F} = ((X+1)^3, X+1)$.
On a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{cano}}}(\mathcal{F}) =$$

Soit la famille $\mathcal{B} = (1, X+1, (X+1)^2, (X+1)^3)$.
On a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{cano}}}(\mathcal{B}) =$$

4

Proposition (matrice colonne d'une combinaison linéaire de p vecteurs).

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie équipé d'une base $\mathcal{B}$.

Soit $v_1, \dots, v_p$ des vecteurs de E et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$.

On a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_p) \times \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{bmatrix}$$

Visuellement

- Pour comprendre cette proposition, il faut se rappeler comment interpréter en colonnes le produit matriciel AX , où $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Si on pose $X = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{bmatrix}$, alors AX est la colonne

- **Preuve.**

On pose $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_p)$. On a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p) \stackrel{\text{WHY}}{=} \lambda_1 \underbrace{\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1)}_{\text{Col}_1(A)} + \dots + \lambda_p \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_p) \stackrel{\text{WHY}}{=} \underbrace{\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_p)}_A \times \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{bmatrix}$$

5

Proposition (caractérisation matricielle de l'aspect « base »).

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n équipé d'une base $\mathcal{B}$.

Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E de cardinal $\dim E$.

Alors la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est carrée, et :

$$\mathcal{F} \text{ base de } E \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \text{ est inversible}$$

- **Preuve.** Notons $n = \dim E$. On a les équivalences

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \text{ base de } E &\iff \forall y \in E, \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, y = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \\ &\iff \forall y \in E, \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) \\ &\stackrel{\text{WHY}}{=} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \\ &\iff \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \\ &\iff \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \exists! X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) X \\ &\stackrel{\text{WHY}}{\iff} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \text{ est inversible} \end{aligned}$$

6

Question. Montrer que la famille $\mathcal{F} = \left((X-1)^2, (X-1)(X-2), (X-2)^2 \right)$ est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.



II. Matrice d'une application linéaire, d'un endomorphisme

Définitions et exemples

7

Définition.

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie équipés respectivement d'une base $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

La matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ est la matrice de la famille des images par f des vecteurs de $\mathcal{B}_E$ dans la base $\mathcal{B}_F$. Elle est notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$.

Autrement dit, en notant $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$, on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(e_1), \dots, f(e_p))$$

Ainsi, $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ est la matrice dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(e_j))$.

Dit encore autrement, en notant $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{B}_F = (e'_1, \dots, e'_n)$, on a visuellement :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) =$$

- Posons $p = \dim E$ et $n = \dim F$. Si on pose $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad f(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e'_i$$

Exemples.

- Soit $a, b \in \mathbb{K}$.
Considérons l'application linéaire (WHY?)
 $\Theta: \mathbb{K}_2[X] \longrightarrow \mathbb{K}^2$
 $P \longmapsto (P(a), P(b))$
Écrire la matrice de Θ dans les bases canoniques
de $E = \mathbb{K}_2[X]$ et $F = \mathbb{K}^2$, notées $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.
- Soit $a \in \mathbb{K}$.
Considérons l'application linéaire (WHY?)
 $\Psi: \mathbb{K}_2[X] \longrightarrow \mathbb{K}^3$
 $P \longmapsto (P(a), P'(a), P''(a))$
Écrire la matrice de Ψ dans les bases canoniques.

- Soit $f : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^2$
 $(x, y, z) \longmapsto (x + 2y + 3z, 7x + 8y + 9z)$

Notons $\mathcal{B}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$. On a

$$f(e_1) = (1, 7) \qquad f(e_2) = (2, 8) \qquad f(e_3) = (3, 9)$$

Donc, en notant $\mathcal{B}_2$, la base canonique de $\mathbb{K}^2$, on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f(e_1)) = \qquad \text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f(e_2)) = \qquad \text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f(e_3)) =$$

La matrice de f dans les bases canoniques est

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2}(f) =$$

- Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

On note $f_A : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques est A .

Alors $f_A : (x, y) \longmapsto \dots\dots\dots$

8
preuve

Proposition (image d'un vecteur par une application linéaire). Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie équipés respectivement d'une base $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.
 Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in E$.

On a la relation

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(v)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(v)$$

- C'est une égalité du type « matrice colonne = matrice rectangulaire $\times$ matrice colonne »

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, équipé d'une base $\mathcal{B}$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E .

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice de la famille des images par f des vecteurs de $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}$. Elle est notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Autrement dit, en notant $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

Ainsi, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est la matrice dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(e_j))$.

Dit encore autrement, en notant $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, on a visuellement :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) =$$

- On a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $n = \dim E$.
- Considérer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ signifie que l'on prend $\mathcal{B}$ comme base de E , vu à la fois comme espace de départ et comme espace d'arrivée de f .
C'est ce que l'on fait presque toujours lorsque l'on écrit la matrice d'un endomorphisme.
- Pour signifier que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, on dit que A *représente* l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$.
On dit simplement que A *représente* f pour signifier qu'il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
- Pour l'endomorphisme identité, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{id}_E) = \dots\dots$
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. L'application $E \longrightarrow E$, notée λid_E , est linéaire : c'est l'homothétie de rapport λ .
$$v \longmapsto \lambda v$$

On a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\lambda \text{id}_E) = \dots\dots$

Exemples.

- Soit $f: \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^2$
 $(x, y) \longmapsto (x + 2y, 3x + 4y)$

En notant $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{K}^2$, on a $f(e_1) =$ $f(e_2) =$
d'où

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) =$$

Considérons la famille $\mathcal{C} = ((1, 2), (0, 1))$ qui est une base de $\mathbb{K}^2$.

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) =$$

- Plaçons-nous dans $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2, muni de la base $\mathcal{B} = (1, i)$.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $f_\theta: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.

$$z \longmapsto e^{i\theta} z$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_\theta) =$$

- Soit $D: \mathbb{K}_3[X] \longrightarrow \mathbb{K}_3[X]$

$$P \longmapsto P'$$

Notons $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{K}_3[X]$. On a :

$$D(1) = 0, \quad D(X) = 1, \quad D(X^2) = 2X \quad D(X^3) = 3X^2,$$

donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(D) =$$

Trouver une base $\mathcal{C}$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(D) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- Soit $f: \mathbb{K}_3[X] \longrightarrow \mathbb{K}_3[X]$

$$P(X) \longmapsto P(X+1)$$

Notons $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{K}_3[X]$. On a :

$$f(1) = \dots \quad f(X) = \dots \quad f(X^2) = \dots \quad f(X^3) = \dots$$

donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) =$$

- Soit $\Delta: \mathbb{K}_3[X] \longrightarrow \mathbb{K}_3[X]$

$$P(X) \longmapsto P(X+1) - P(X)$$



10 Question. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

11 Proposition.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 5f + 6\text{id}_E = 0$.

— On a

$$E = \text{Ker}(f - 2\text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f - 3\text{id}_E)$$

— On suppose E de dimension finie.

Alors il existe une base $\mathcal{C}$ de E dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale de la forme

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) =$$

En Spé, on dira que l'endomorphisme f est diagonalisable (car il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale).

12 Exercice difficile. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = 0$.

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est du type $\begin{bmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ où r est à déterminer en fonction de f .

Premières propriétés

À l'aide de la proposition 8, on peut d'ores et déjà prouver cet énoncé, qui sera renforcé dans les prochaines pages.

13 Proposition (caractérisation matricielle d'un isomorphisme).

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie équipés respectivement d'une base $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On a

f est un isomorphisme $\iff$ la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ est inversible

Une application linéaire est bijective ssi n'importe laquelle de ses matrices est inversible.

• **Preuve.** Par équivalences successives. On note $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$.

On a

$$\begin{aligned} f \text{ isomorphisme} &\iff \text{l'image par } f \text{ de } \mathcal{B}_E \text{ est une base de } F \\ &\iff (f(e_1), \dots, f(e_n)) \text{ est une base de } F \\ &\stackrel{\text{WHY}}{\iff} \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(e_1), \dots, f(e_n)) \text{ est inversible} \\ &\stackrel{\text{WHY}}{\iff} \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \text{ est inversible} \end{aligned}$$

• **Autre preuve.** Notons $p = \dim E$ et $n = \dim F$. On a

$$\begin{aligned} f \text{ isomorphisme} &\iff \forall y \in F, \exists ! x \in E, y = f(x) \\ &\iff \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \exists ! X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) X \\ &\iff \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \text{ inversible} \end{aligned}$$



Proposition (opérations).

Soit E, F, G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie équipés respectivement d'une base $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$.

(i) Soit $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) + \mu \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(g)$$

(ii) Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. On a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$$

(iii) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E . On a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^k) = \left(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \right)^k$$

Question. Soit $f : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3$
 $(x, y, z) \longmapsto (y - z, -x + 2y - z, -x + y)$

Montrer que f est un projecteur.

Proposition (app. linéaire ↔ matrice rectangulaire)

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie équipés respectivement d'une base $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.
 Notons $p = \dim E$ et $n = \dim F$.

L'application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{L}(E, F) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f &\longmapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Proposition (endo ↔ matrice carrée).

Soit E un espace vectoriel de dimension finie équipé d'une base $\mathcal{B}$.

Notons $n = \dim E$.

L'application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ f &\longmapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

• **Remarque.**

Cette proposition est très importante, bien que relativement « abstraite ».

Elle dit que « le monde vectoriel » peut être codé matriciellement et que « le monde matriciel » peut être codé vectoriellement, et ceci avec une parfaite correspondance (c'est-à-dire une correspondance bijective).

• **Traduction de l'injectivité.**• **Traduction de la surjectivité.**

18

Proposition.

- Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie.
Alors l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F est de dimension finie et

$$\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$$

- Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.
Alors l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E est de dimension finie et

$$\dim \mathcal{L}(E) = (\dim E)^2$$

- Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.
Alors l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires sur E est de dimension finie et

$$\dim \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = \dim E$$

19

Proposition (caractérisation matricielle d'un isomorphisme (bis)).

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie équipés respectivement d'une base $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

l'application linéaire f est un isomorphisme $\iff$ la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ est inversible

Dans ce cas :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f^{-1}) = \left(\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \right)^{-1}$$

20

Proposition (caractérisation matricielle d'un automorphisme).

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, équipé d'une base $\mathcal{B}$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

l'endomorphisme f est un automorphisme $\iff$ la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible

Dans ce cas :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \left(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \right)^{-1}$$

21 Question. La matrice suivante est inversible, n'est-ce pas?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sans effort (c'est-à-dire sans calcul, sans pivot de Gauss), déterminer son inverse.



III. Changement de bases

Matrice de changement de base

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n .

22

Définition.

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E .

On appelle *matrice de passage* de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

$$P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} =$$

Remarque importante.

- Par définition, on a $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.

Par définition, on a aussi $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{id}_E)$.

- Dans $\mathbb{K}^n$, dans $\mathbb{K}_n[X]$ et dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, les vecteurs sont le plus souvent donnés par leur écriture dans la base canonique $\mathcal{B}_{\text{cano}}$.

L'écriture d'une matrice de passage du type $P_{\mathcal{B}_{\text{cano}} \rightarrow \mathcal{B}'}$ se fait alors sans aucun calcul.

Exemples.

- Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^2$.

Notons $\mathcal{B}' = ((1, 2), (0, 1))$, qui est une base de $\mathbb{K}^2$.

On a

$$P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} =$$

- Notons $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$.

Notons $\mathcal{B}' = (1, X - a, (X - a)^2)$ la base « de Taylor en a » où $a \in \mathbb{K}$.

On a

$$P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} =$$



23

Proposition.

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $v \in E$.

Notons $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ et $X' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(v)$. Alors

$$X = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} X'$$

ou encore

$$X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') X'$$

- **Attention.** La matrice de passage $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$

- donne les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$
- permet d'obtenir les coordonnées d'un vecteur dans la base $\mathcal{B}$ à partir de ses coordonnées dans $\mathcal{B}'$ (et pas le contraire!)

- **Remarque.** Une matrice inversible peut être interprétée comme une matrice de passage.

Autrement dit :

Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{B}$ est une base de E .

Alors il existe une base $\mathcal{B}'$ de E telle que A soit la matrice de passage $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$.

En effet, si l'on considère $\mathcal{B}'$ la famille dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A (i.e. la famille dont le $j^{\text{ème}}$ vecteur a pour coordonnées dans $\mathcal{B}$ la $j^{\text{ème}}$ colonne de A), alors $\mathcal{B}'$ est une base de E car A est inversible, et l'on a $A = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$.

24

preuve

Proposition.

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E .

La matrice de passage $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ est inversible et :

$$(P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}$$



Changement de bases pour une application linéaire

25

Proposition (formule de changement de base pour une application linéaire).

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soit $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}'_E$ deux bases de E , ainsi que $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}'_F$ deux bases de F .

Notons

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f), \quad A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F}(f), \quad P = P_{\mathcal{B}_E \rightarrow \mathcal{B}'_E} \quad \text{et} \quad Q = P_{\mathcal{B}_F \rightarrow \mathcal{B}'_F}$$

Alors :

$$A' = Q^{-1}AP$$

- Il faut surtout retenir la preuve de cette proposition, c'est-à-dire :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}'_F}(\text{id}_F) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}_E}(\text{id}_E)$$

accompagné du diagramme :

26

Proposition (formule de changement de base pour un endomorphisme).

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E .

Notons

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f), \quad A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) \quad \text{et} \quad P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$$

Alors :

$$A' = P^{-1}AP$$

- Il faut surtout retenir la preuve de cette proposition, c'est-à-dire :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\text{id}_E) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{id}_E)$$

accompagné du diagramme :

27

Question. Soit $f : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3$
 $(x, y, z) \longmapsto (y - z, -x + 2y - z, -x + y)$

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$. On a vu que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Déterminer une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{K}^3$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Déterminer la matrice de passage $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$. Vérifier la formule de changement de base.



IV. Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Définition

Jusqu'à présent, on a vu qu'à une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on peut associer plein de matrices (autant que de choix de bases pour E et pour F).

Réciproquement, on aimerait savoir si, à une matrice précise A , on peut associer des applications linéaires. La réponse est évidemment oui!

Il y a *plein* d'applications linéaires ayant A pour matrices (autant que de choix pour E et pour F , puis de bases pour E et F).

Mais il y en a *une* (application linéaire) qui porte un nom.

Il s'agit de l'application linéaire dite « canoniquement associée à A ». C'est celle ayant pour espace de départ et d'arrivée des $\mathbb{K}^{\text{truc}}$.

28

Définition.

— Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice.

L'application linéaire $\varphi_A : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$ dont la matrice dans les bases canoniques est la matrice A est appelée *application-linéaire-canoniquement-associée-à- A* .

— Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

L'endomorphisme $\varphi_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est la matrice A est appelée *endomorphisme-canoniquement-associé-à- A* .

- **Exemple.** L'application linéaire canoniquement associée à la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ est

• Dictionnaire « matrice $\leftrightarrow$ appli. linéaire cano. asso. »

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice et $\varphi_A : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$ l'application linéaire canoniquement associée.

- Par définition, on a $\text{Ker } \varphi_A = \{x \in \mathbb{K}^p \mid \varphi_A(x) = 0_{\mathbb{K}^n}\}$ et $\text{Ker } A = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\}$.
Soit $x \in \mathbb{K}^p$ un p -uplet et $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ la colonne de hauteur p associée i.e. $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{cano}}}(x)$.
On a :

$$x \in \text{Ker } \varphi_A \iff X \in \text{Ker } A$$

Les espaces vectoriels $\text{Ker } \varphi_A$ et $\text{Ker } A$ sont canoniquement isomorphes (via l'application $\text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{cano de } \mathbb{K}^p}}$).

- En notant $(e_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$, et $(E_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ celle de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, on a

$$\text{Im } \varphi_A = \text{Vect}\left(\varphi_A(e_i)\right)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} \quad \text{et} \quad \text{Im } A = \text{Vect}\left(AE_i\right)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} = \text{Vect}\left(\text{Col}_i(A)\right)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$$

Les espaces vectoriels $\text{Im } \varphi_A$ et $\text{Im } A$ sont canoniquement isomorphes (via l'application $\text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{cano de } \mathbb{K}^n}}$).

- Lorsque $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est carrée, on a l'équivalence :

$$A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \stackrel{\text{WHY}}{\iff} \varphi_A \text{ automorphisme}$$

Ceci est dû à l'égalité $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{cano}}}(\varphi_A)$.

29

Question. En considérant l'endomorphisme canoniquement associé, donner sans calcul matriciel les

puissances de $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.



Démonstration de deux "vieux" théorèmes

Nous sommes maintenant en mesure de donner les preuves de deux théorèmes donnés dans le chapitre « Matrices » du mois d'octobre.

30

Théorème (caractérisation de l'inversibilité d'une matrice par les systèmes homogènes).

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On a

A est inversible $\iff$ l'équation $AX = 0$ possède une unique solution, à savoir la colonne nulle
c'est-à-dire :

$$A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \left[\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), (AX = 0 \implies X = 0) \right]$$

Autrement dit, A est inversible si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul.

- **Remarque.** Comme une relation du type $AX = 0$ peut s'interpréter comme une relation de liaison entre les colonnes de A , on en déduit l'équivalence suivante :

$$A \text{ est inversible} \iff \text{la famille } (\text{Col}_1(A), \dots, \text{Col}_n(A)) \text{ est libre}$$

- **Preuve.** On va réaliser la matrice A comme la matrice d'un certain endomorphisme, de sorte à pouvoir appliquer les résultats connus sur les endomorphismes. On considère φ_A l'endomorphisme canoniquement associé à A .

$$\begin{aligned} A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) &\stackrel{\text{WHY}}{\iff} \varphi_A \text{ endo bijectif} \\ &\stackrel{\text{WHY}}{\iff} \varphi_A \text{ endo injectif} \\ &\stackrel{\text{WHY}}{\iff} \text{Ker } \varphi_A = \{0_{\mathbb{K}^n}\} \\ &\stackrel{\text{WHY}}{\iff} \text{Ker } A = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\} \end{aligned}$$

31

Théorème d'inversibilité unilatéral.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

S'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = I_n$, alors A est inversible et on a $A^{-1} = B$ (on a alors $BA = I_n$).

- **Rappel du chapitre précédent (épisode 3 d'algèbre linéaire).**

Proposition. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme avec E de dimension finie.

Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est inversible (c'est-à-dire f est un automorphisme de E)
- (ii) f est inversible à gauche (c'est-à-dire il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = \text{Id}_E$)
- (iii) f est inversible à droite (c'est-à-dire il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = \text{Id}_E$)

On a alors $g = f^{-1}$.

- **Preuve.**

Considérons φ_A l'endomorphisme canoniquement associé à A .

Idem pour φ_B .

Comme $AB = I$, on a $\varphi_A \circ \varphi_B = \text{id}_{\mathbb{K}^n}$.

Donc φ_A est inversible à droite.

Donc φ_A est un automorphisme et $\varphi_A^{-1} = \varphi_B$.

Ainsi, A est inversible et $A^{-1} = B$.

Rang d'une matrice

- **Rappel**

- Soit E un espace vectoriel et $v_1, \dots, v_p$ des vecteurs de E . Qu'est-ce que $\text{rg}(v_1, \dots, v_p)$?
- Soit E, F deux espaces vectoriels avec F de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Qu'est-ce que $\text{rg}(f)$?

- **Question.** Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. À votre avis, quel est le rang de la matrice A ?



32

Définition (rang d'une matrice).

Voici deux formulations équivalentes :

- Le rang d'une matrice rectangulaire est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes, ou encore la dimension de son image.

Autrement dit, pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a :

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(\text{Col}_1(A), \dots, \text{Col}_p(A)) = \dim \text{Vect}(\text{Col}_1(A), \dots, \text{Col}_p(A)) = \dim(\text{Im } A)$$

- Le rang d'une matrice est le rang de son application linéaire canoniquement associée.

Autrement dit :

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Notons $\varphi_A : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$ son application linéaire canoniquement associée.

On définit le rang de la matrice A par :

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(\varphi_A)$$

- **Remarque.** Une matrice carrée est inversible si et seulement si son rang est maximal (donc égal à sa taille). WHY?

Autrement dit :

$$A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \text{rg}(A) = n$$

- **Inégalité facile.** Le rang d'une matrice est inférieur à son nombre de colonnes et son nombre de lignes.

Autrement dit :

$$\text{rg}(A) \leq \min(p, n)$$

33

Proposition.

Le rang d'une application linéaire est le rang de n'importe laquelle de ses matrices.

Autrement dit :

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E et F de dimension finie que l'on munit de base ; disons $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.

On a :

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f))$$

34

Proposition (théorème du rang pour les matrices).

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a

$$\text{nb-colonnes}(A) = \dim(\text{Ker } A) + \text{rg}(A)$$



Proposition (conservation du rang et plus généralement conservation du noyau et de l'image).

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, $Q \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$.

- On a $\text{rg}(AQ) = \text{rg}(A)$.
- On a $\text{rg}(PA) = \text{rg}(A)$.

En français :

- Multiplier une matrice rectangulaire à droite par une matrice inversible conserve son rang.
- Multiplier une matrice rectangulaire à gauche par une matrice inversible conserve son rang.

Mieux.

- On a $\text{Im}(AQ) = \text{Im}(A)$.
- On a $\text{Ker}(PA) = \text{Ker}(A)$.

En français :

- Multiplier une matrice rectangulaire à droite par une matrice inversible conserve son image.
- Multiplier une matrice rectangulaire à gauche par une matrice inversible conserve son noyau.

Conséquence :

- En effectuant des opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice rectangulaire, on ne change pas son image.
- En effectuant des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice rectangulaire, on ne change pas son noyau.

• Rappel.**Proposition (composition avec un isomorphisme).**

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

- Si f est un isomorphisme et si g est de rang fini, alors $g \circ f$ est de rang fini, et $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg } g$.
- Si g est un isomorphisme et si f est de rang fini, alors $g \circ f$ est de rang fini, et $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg } f$.

En français :

- Composer une application linéaire à droite par un isomorphisme conserve son rang.
- Composer une application linéaire à gauche par un isomorphisme conserve son rang.

Mieux.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

- Si f est un isomorphisme, alors $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im } g$.
- Si g est un isomorphisme, alors $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker } f$.

En français :

- Composer une application linéaire à droite par un isomorphisme conserve son image.
- Composer une application linéaire à gauche par un isomorphisme conserve son noyau.

Proposition.

- En effectuant des opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice rectangulaire, on ne change pas son rang.
- En effectuant des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice rectangulaire, on ne change pas son rang.



Calcul pratique du rang d'une matrice

37

Proposition (Rang d'une matrice échelonnée).

Le rang d'une matrice échelonnée est égal à son nombre de pivots.

Traitons le cas des six matrices suivantes ce qui fera office de preuve!

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 & c \\ 0 & 1 & b & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & e \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



V. Matrices équivalentes et rang



VI. Matrices semblables et trace



8

Notons $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$.

Écrivons $v = \sum_{i=1}^n \gamma_i e_i$. Comme f est linéaire, on a alors $f(v) = \sum_{i=1}^n \gamma_i f(e_i)$.

On a alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(v)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}\left(\sum_{i=1}^n \gamma_i f(e_i)\right) \stackrel{\text{WHY}}{=} \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(e_1), \dots, f(e_n)) \times \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} \stackrel{\text{WHY}}{=} \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(v)$$

14

Nous allons utiliser à plusieurs reprises la définition 7.

Notons $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$. Rappelons que pour $h \in \mathcal{L}(E, F)$, la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(h)$ est la matrice dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(h(e_j))$.

(i) Montrons l'égalité de matrices

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) + \mu \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(g)$$

en montrant l'égalité des colonnes.

Fixons $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Et montrons l'égalité

$$\text{Col}_j(\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\lambda f + \mu g)) = \text{Col}_j(\lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) + \mu \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(g))$$

• Le membre gauche vaut d'après la définition 7 :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}((\lambda f + \mu g)(e_j))$$

c'est-à-dire $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\lambda f(e_j) + \mu g(e_j))$, puis par opérations sur les colonnes de vecteurs (confer 4), vaut $\lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(e_j)) + \mu \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(g(e_j))$.

• Le membre droit vaut par opérations sur les matrices $\lambda \text{Col}_j(\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)) + \mu \text{Col}_j(\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(g))$, donc vaut (d'après la définition 7) $\lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(e_j)) + \mu \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(g(e_j))$.

(ii) Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrons l'égalité de matrices

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$$

Fixons $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Et montrons l'égalité

$$\text{Col}_j(\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(g \circ f)) = \text{Col}_j(\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f))$$

• Le membre gauche vaut d'après la définition 7 :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_G}((g \circ f)(e_j))$$

c'est-à-dire $\text{Mat}_{\mathcal{B}_G}(g(f(e_j)))$, c'est-à-dire d'après 8, $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(e_j))$,



- Le membre droit $\text{Col}_j(\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f))$ vaut d'après le chapitre Matrices (rappel $\text{Col}_j(AB) = A\text{Col}_j(B)$),

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(g) \times \text{Col}_j(\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f))$$

c'est-à-dire

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(e_j))$$

(iii) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^k) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^k$$

La preuve a lieu par récurrence sur k en utilisant (ii).

15

Calculons f^2 et vérifions si cet endomorphisme vaut f .

Pour cela, raisonnons matriciellement, c'est-à-dire, utilisons l'équivalence (qui provient du fait que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}$ est un isomorphisme entre l'espace vectoriel des endomorphismes et l'espace vectoriel des matrices carrées) :

$$f^2 = f \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)^2 = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$$

On a

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Après calculs, on a $A^2 = A$, donc $f^2 = f$ donc f est un projecteur.

16

Montrons que l'application

$$\begin{aligned} \Phi: \mathcal{L}(E, F) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f &\longmapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

— Montrons que Φ est une application linéaire.

Cela résulte de 14-i).

— Montrons que Φ est injective.

Soit $f \in \text{Ker } \Phi$.

Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ est la matrice nulle.

Donc

$$\forall j \in \llbracket 1, \dim E \rrbracket, \quad f(e_j) = \sum_{i=1}^{\dim F} 0e'_i$$

Donc f est l'application linéaire nulle.

— Montrons que Φ est surjective.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Considérons l'unique application linéaire $f: E \rightarrow F$ vérifiant

$$\forall j \in \llbracket 1, \dim E \rrbracket, \quad f(e_j) = \sum_{i=1}^{\dim F} a_{i,j} e'_i$$

Par construction, on a alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) = A$, c'est-à-dire $\Phi(f) = A$.

24

Calculer le produit $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}$ en interprétant la matrice de passage comme la matrice de l'application linéaire id_E dans des bonnes bases.

