Représentation matricielle des applications linéaires

exercices

101 Matrice d'une famille de matrices

Écrire dans la base canonique $(E_{ij})_{i,j}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de la famille $(E_{ij}+I)_{i,j}$.

102 Un nilpotent chez les polynômes seul

Soit $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

1. Sans aucun calcul, déterminer une base de l'image de M, ainsi qu'une base du noyau.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer M^n.
3. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_3[X] \\ P & \longmapsto & -3XP(X) + X^2P'(X) \end{array}$
   Montrer que f est un endomorphisme de E.
   Déterminer la matrice de f dans la base canonique de E.
   Sans aucun calcul, déterminer une base de l'image et du noyau de f.

103 Une symétrie chez les polynômes

Soit $E = \mathbb{K}[X]$. On considère l'endomorphisme $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P(X) & \longmapsto & P(1-X) \end{array}$.

1. Avec un théorème de cours, montrer sans effort que $E = \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{id}_E)$.
2. Montrer que φ induit un endomorphisme φ_n sur $E_n = \mathbb{K}_n[X]$.
3. Écrire la matrice M_n de φ_n dans la base canonique $\mathcal{B}_n = (1, X, \dots, X^n)$.

Désormais, on enlève les « indices n », donc on note φ l'endomorphisme de $E = \mathbb{K}_n[X]$.
On note M la matrice de φ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$.
Enfin, on prend $\boxed{n = 2}$.

4. Déterminer $\mathrm{rg}(\varphi - \mathrm{id}_E)$.
   En déduire, sans calcul ou presque, $\dim\Big(\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{id}_E)\Big)$ et $\dim\Big(\mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{id}_E)\Big)$.
5. Sans effort, montrer que M est semblable à $M' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.
6. Expliciter une base $\mathcal{B}'$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = M'$.
   Et enfin, expliciter la matrice de passage $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$.
   Quelle relation matricielle relie les matrices M' et M ?

Recommencer l'exercice pour $n = 3$.

104 L'effet « Vache qui rit »

Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et f_A l'endomorphisme suivant (que l'on notera f)

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array}$$

1. Déterminer $f(E_{21})$ où $E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
2. Donner la matrice de l'endomorphisme f dans la base $(E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22})$.
3. Même question dans la base $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.
4. Déterminer le rang de l'endomorphisme f. Bonus : l'exprimer en fonction de A.

105 Autour de la trace

1. Montrer que $\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall\, P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(P^{-1}AP)$.
2. Expliquer comment on peut définir la trace d'un endomorphisme en dimension finie.
3. Soit E dimension finie et p un projecteur de E. Montrer que $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

Matrices particulières et similitude

106 Formes spéciales de matrices

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
On se donne un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ et on calcule $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.
Déterminer quelles propriétés de f traduisent le fait que M présente les formes suivantes (quand une matrice est présentée « par blocs »), il sera toujours sous-entendu que le premier « paquet » de lignes (resp. de colonnes) est composé de r lignes (resp. colonnes).

(i) $M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$

(ii) $M = I_n$

(iii) $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$

(iv) $\operatorname{rg} M = r$

(v) $M = \left(\begin{array}{ccc} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ \hline * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * \end{array}\right)$

(vi) $M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \end{array}\right)$

(vii) $M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \hline 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \end{array}\right)$

(viii) $M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \end{array}\right)$.

107 Matrice de projecteur

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 = A$.

Pour tout $r \in [\![0, n]\!]$, on note $J_r = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{array}\right] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que A est semblable à J_r où r est à préciser en fonction de A.

108 Symétrie

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 = I$.

Pour tout $r \in [\![0, n]\!]$, on note $D_r = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & -I_{n-r} \end{array}\right] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que A est semblable à D_r où r est à préciser en fonction de A.

109 Matrice nilpotente d'indice maximal

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^{n-1} \neq 0$ et $A^n = 0$.

1. Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que la famille $\left(X, AX, \dots, A^{n-1}X\right)$ soit une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
2. Montrer que A est semblable à

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Montrer que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\mathrm{Vect}(I, A, \dots, A^{n-1})$.

Interpréter/Traduire avec des matrices !

110 La matrice de Vandermonde

Soit α, β, γ trois scalaires *distincts* et :

$$V \;=\; \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{bmatrix}$$

Montrer sans aucun calcul que V est inversible.

Interpréter V comme la matrice dans les bases canoniques d'une certaine application linéaire $\varphi : \mathbb{K}_2[X] \to \mathbb{K}^3$

Énoncer un résultat général en remplaçant 3 par n.

111 La formule d'inversion de Pascal

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de scalaires. On suppose que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad b_n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

1. Trouver une matrice $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ telle que

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \;=\; M \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

   On fera un dessin de M. Et en guise de défi, on donnera le coefficient $m_{i,j}$ de M.

2. On pose $B = M^\top$. Sans aucun calcul, montrer que B est inversible (on pourra faire intervenir un bon endomorphisme).
3. Déduire des questions précédentes une expression de a_n en fonction des b_k.

112 Le retour

Voici un exercice déjà traité dans le chapitre Polynômes :

> *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $Q_n \in \mathbb{K}[X]$ que l'on explicitera avec ses coefficients tel que $Q_n - Q_n' = X^n$.*

Expliquer comment traiter cet exercice avec le chapitre actuel.

113 Inverse d'une matrice bi-diagonale

Soit A la matrice de taille n ayant des 1 sur la diagonale, des -1 sur la sur-diagonale et des 0 ailleurs :

$$\operatorname{coeff}_{i,j}(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ -1 & \text{si } j = i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Trouver un endomorphisme $\varphi : \mathbb{K}_{\ldots}[X] \to \ldots$ ayant A dans la base canonique.
Montrer que A est inversible. Rappeler le lien entre A^{-1} et φ^{-1}.
Expliciter tout ce petit monde !

Rang d'une matrice

114 De tête

Déterminer sans calcul le noyau et l'image des applications linéaires canoniquement associées aux matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

115 Rang de la matrice de Vandermonde

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$.
Soit

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}$$

Déterminer le rang de V.

116 Rang et trace

Montrer que deux matrices semblables ont même rang et même trace.

117 En soustrayant une homothétie, ...

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblables.
Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, les matrices $A - \lambda I$ et $B - \lambda I$ ont même rang.

118 Un énoncé étonnant !

Proposition. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*
On retire UNE *ligne à A et on note A' la matrice obtenue, qui appartient donc à $\mathcal{M}_{n-1,p}(\mathbb{K})$.*
Alors le rang de A' vaut

$$\operatorname{rg}(A) \ \textit{si} \ \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \textit{ est dans } \operatorname{Im} A \qquad \textbf{\textit{et sinon}} \quad \operatorname{rg}(A) - 1$$

Pour prouver ce résultat, supposons que l'on retire la $i^{\text{ème}}$ ligne de A et posons

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K}) \\ C & \longmapsto & C' \end{array}$$ l'application de « suppression de la ligne i » pour une colonne

1. Montrer que φ est linéaire et déterminer une base et la dimension de son noyau.
2. Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Montrer l'égalité

$$\dim V \ = \ \dim(V \cap \operatorname{Ker} \varphi) \ + \ \dim \varphi(V)$$

3. En choisissant judicieusement V, prouver la proposition.

119 Sous-matrice inversible de taille maximale

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Montrer que le rang de A est la taille maximale des sous-matrices de A inversibles :

$$\mathrm{rg}(A) \;=\; \max\left\{t \in \mathbb{N} \mid \widetilde{A} \text{ sous-matrice de } A \text{ inversible de taille } t\right\}$$

120 Autour du rang 1

1. Soit $K \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ une colonne et $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ une ligne.
   On pose $A = KL$.
   Montrer que $\mathrm{rg}\, A \leqslant 1$.
   Montrer que si A est de rang 1, alors K et L sont de rang 1.
   Montrer que si K et L sont de rang 1, alors A est de rang 1.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1.
   Montrer qu'il existe $(K, L) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ tel que $A = KL$.
   Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A^2 = \lambda A$, puis montrer que $\lambda = \mathrm{tr}\, A$.

121 Again

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices telles que $AB = 0$ et $A + B$ est inversible.
Montrer que $\mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B) = n$.

122 Matrices par blocs

Soit M la matrice diagonale par blocs :

$$M \;=\; \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_n \end{bmatrix}.$$

Déterminer le rang de M en fonction du rang des A_i, où chaque A_i est carrée de taille t_i.
Traiter le cas où toutes les matrices A_i sont égales à A.

123 Rang d'un endomorphisme

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et f_A l'endomorphisme suivant (que l'on notera f)

$$f: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array}$$

Déterminer le rang de l'endomorphisme f.

Vers la réduction des endomorphismes

124 Un endomorphisme diagonalisable

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. On a $A - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A - 3I = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

1. Donner le rang des matrices $A - I$, $A - 2I$ et $A - 3I$.
   Puis donner une base de $\operatorname{Ker}(A - I)$, $\operatorname{Ker}(A - 2I)$ et $\operatorname{Ker}(A - 3I)$.
2. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_2[X] \\ P & \longmapsto & (X+2)P'(X) + P(X-1) \end{array}$
   Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$ (que ne faut-il pas oublier dans cette vérification ?). Puis écrire sa matrice dans la base canonique.
3. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{K}_2[X]$ dans laquelle la matrice de φ est diagonale.

Pour la culture (spé), on dit que l'endomorphisme φ est diagonalisable. Attention, un endomorphisme quelconque n'est pas forcément diagonalisable.

125 Une matrice trigonalisable

Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \\ -3 & 4 & -5 \end{bmatrix}$. Montrer que A est semblable à $T = \left[\begin{array}{cc|c} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mu \end{array}\right]$ où $\lambda = -1$ et $\mu = 2$.

126 Le lemme des noyaux (cas scindé)

Pour l'instant, E n'est pas supposé de dimension finie.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
On suppose que $P = X^3 - 2X$ est un polynôme annulateur de f.

1. Factoriser le polynôme P dans $\mathbb{K}[X]$. Est-il scindé ?
2. Montrer qu'il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes tels que $X^2U + (X-2)V = 1$.
3. Montrer que $\operatorname{Ker}(f^2)$ et $\operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{id})$ sont en somme directe.
4. Ici E est de dimension finie et est équipé d'une base $\mathcal{B}$.
   On considère φ l'unique endomorphisme tel que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.
   Montrer que $E = \operatorname{Ker}(\varphi^2) \oplus \operatorname{Ker}(\varphi - 2\,\mathrm{id}_E)$.

On pourra calculer $\operatorname{rg}(A^2)$ et $\operatorname{rg}(A - 2I)$ où A est la matrice ci-dessus.

127 Trigonalisation et racine carrée

Soit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{K}^3$ dont la matrice dans la base canonique de E est :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Après calculs, on a

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

1. Rappeler les grandes lignes de la démonstration de l'égalité $E = \operatorname{Ker}(f^2) \oplus \operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{id})$.
2. Montrer, sans vouloir l'exhiber, qu'il existe un vecteur v appartenant à $\operatorname{Ker}(f^2)$ mais n'appartenant pas à $\operatorname{Ker} f$. Montrer que $(f(v), v)$ est une base de $\operatorname{Ker}(f^2)$.
3. Montrer que A est semblable à $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.
4. On veut montrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de E vérifiant $g^2 = f$.
   On suppose pour cela qu'un tel endomorphisme existe.
   Établir que $\operatorname{Ker}(f^2)$ est stable par g, puis montrer qu'il existe une base $\mathscr{C}$ de E telle que
   $$\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(g) = \begin{bmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \end{bmatrix}$$
   En utilisant la matrice de f dans cette même base $\mathcal{C}$, trouver une contradiction et conclure.

128 Étude matricielle de la lettre C

On considère la matrice $\mathbf{C} \in \mathcal{M}_7(\mathbb{K})$ définie par

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On note φ l'endomorphisme canoniquement associé à C.

1. Donner le rang de φ, puis une base de $\operatorname{Ker}\varphi$.
2. Montrer que $W = \operatorname{Im}\varphi$ est stable par φ.
   Montrer que φ induit un endomorphisme sur $\operatorname{Im}\varphi$, que l'on notera $\widetilde{\varphi}$.
3. Écrire la matrice de $\widetilde{\varphi}$ dans la base canonique, que l'on notera $\widetilde{\mathbf{C}}$.
4. Montrer que $\widetilde{\mathbf{C}}$ est semblable à $\widetilde{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\mathbf{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\mathbf{2}} \end{bmatrix}$.
5. On peut montrer que $X^4 - X^3 - 2X^2 + 2X$ est un polynôme annulateur de $\mathbf{C}$, donc de φ.
   En déduire que
   $$E \;=\; \operatorname{Ker}\varphi \oplus \operatorname{Im}\varphi$$
6. Montrer que $\mathbf{C}$ est semblable à
   $$D = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\mathbf{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\mathbf{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

129 On est en Piston 3

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

1. Déterminer les scalaires $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $A - \lambda I$ ne soit pas inversible.
   Il y en a combien ?
   Que vaut la somme (visuellement infinie !) :
   $$\sum_{\alpha \in \mathbb{K}} \dim \operatorname{Ker}(A - \alpha I)$$
2. Donner une base $\mathcal{B}_\lambda$ de $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)$ pour les λ précédents.
3. On note $\mathcal{C}$ la concaténation de toutes ces bases $\mathcal{B}_\lambda$. Que dire de $\mathcal{C}$?
4. Montrer que A est semblable à $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Représentation matricielle des applications linéaires

corrigés

1. On a
$$\operatorname{Im} M = \operatorname{Vect}(\underbrace{C_1, C_2, C_3}_{\text{famille libre}}) \qquad \text{donc } \operatorname{rg}(M) = 3$$
D'après le théorème du rang, on a $\dim \operatorname{Ker} M = 1$.

De plus, $E_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ est dans $\operatorname{Ker} M$. Donc (E_4) est une famille libre de $\operatorname{Ker} M$.

Comme elle est de bon cardinal, c'est une base de $\operatorname{Ker} M$.

2. On a
$$M^2 = M \times M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
puis
$$M^3 = M \times M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
puis
$$M^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
Pour $n \geqslant 4$, on a $M^n = M^{n-4} \times M^4 = M^{n-4} \times 0 = 0$.

3. • Linéarité : à vous.
• Montrons que l'image de f est incluse dans $\mathbb{K}_3[X]$.
Fixons $P \in \mathbb{K}_3[X]$, c'est-à-dire $\deg P \leqslant 3$ et examinons le degré de $f(P)$.
Il est clair que $\deg f(P) \leqslant 4$.
Reste à vérifier que le terme en X^4 de $f(P)$ est nul.
En notant a le coefficient en X^3 de P, le terme en X^4 de $f(P) = -3XP(X) + X^2P'(X)$ vaut
$$-3X \times (aX^3) + X^2 \times (3aX^2)$$
donc est nul.
• **Matrice dans la base canonique.** On a
$$\begin{cases} f(1) = -3X \\ f(X) = -2X^2 \\ f(X^2) = -X^3 \\ f(X^3) = 0 \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{cano}}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$
• Une base de $\operatorname{Im}\left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{cano}}}(f)\right)$ est la famille $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$ donc

une base de $\operatorname{Im} f$ est la famille $(-3X, -2X^2, -X^3)$.

• Une base de $\operatorname{Ker}\left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{cano}}}(f)\right)$ est la famille $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ donc

une base de $\operatorname{Ker} f$ est la famille (X^3).

Des précisions pour ceux qui veulent. Soit $P \in \mathbb{K}_3[X]$ que l'on écrit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$.
On a les équivalences suivantes :
$$P \in \operatorname{Ker} f \iff \begin{bmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{bmatrix} \in \operatorname{Ker} M = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \iff P \in \operatorname{Vect}(X^3)$$

1. L'endomorphisme φ est une symétrie (involution), c'est-à-dire vérifie $\varphi^2 = \mathrm{id}$.
   (Pour la culture, $P = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ est **un** polynôme annulateur de φ).
   D'après le cours, on sait que l'on a

   $$E = \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{id}_E)$$

   Pouvez-vous rappeler l'idée de la preuve ?

   Il s'agit d'une Analyse-Synthèse. On note $F = \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{id}_E)$.
   On fixe un vecteur de E, ici on fixe $P \in E$.
   Montrons qu'il existe un unique couple $(P_F, P_G) \in F \times G$ tel que $P = P_F + P_G$.

   Analyse. On suppose qu'il existe $P_F, P_G \in E$ tels que $\begin{cases} P_F \in F \\ P_G \in G \\ P = P_F + P_G \end{cases}$.

   En appliquant φ à la première égalité, on obtient la seconde, d'où :

   $$\begin{cases} P(X) & = & P_F(X) + P_G(X) \\ P(1-X) & = & P_F(1-X) + P_G(1-X) \end{cases}$$

   En tenant compte des appartenances ($P_F \in F$ et $P_G \in G$), la deuxième égalité s'écrit différemment, d'où :

   $$\begin{cases} P(X) & = P_F(X) + P_G(X) \\ P(1-X) & = P_F(X) - P_G(X) \end{cases}$$

   Par somme et différence, on obtient ;

   $$\begin{cases} P_F = \dfrac{P(X) + P(1-X)}{2} \\ P_G = \dfrac{P(X) - P(1-X)}{2} \end{cases}$$

   Synthèse. On pose P_F et P_G comme ci-dessus et on vérifie les trois points.

2. — L'application φ_n est linéaire, par héritage (car φ est un endomorphisme donc linéaire !).
   — Montrons que φ_n envoie $\mathbb{K}_n[X]$ dans $\mathbb{K}_n[X]$.
   Pour cela, prenons un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et montrons que $\varphi(P) \in \mathbb{K}_n[X]$.
   Comme φ_n est linéaire, il suffit de vérifier cette appartenance pour chaque polynôme de la base canonique.
   Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Montrons que $\varphi_n(X^k) \in \mathbb{K}_n[X]$.
   On a $\varphi_n(X^k) = (1-X)^k$ qui est un polynôme de degré $\leqslant k$ (en fait de degré k exactement), donc est de degré $\leqslant n$.

3. D'après la formule du binôme de Newton, on a :

   $$\begin{aligned} \varphi_n(X^j) &= (1-X)^j \\ &= \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} 1^{j-i} (-X)^i \\ &= \sum_{i=0}^{j} (-1)^i \binom{j}{i} X^i \\ &= \sum_{i=0}^{j} (-1)^i \binom{j}{i} X^i \quad + \quad \sum_{i=j+1}^{n} 0\, X^i \end{aligned}$$

   Ainsi, en indexant les lignes (et colonnes) la matrice par $[\![0, n]\!]$ (comme Python d'ailleurs), on obtient

   $$\forall\, i, j \in [\![0, n]\!], \quad \mathrm{coeff}_{i,j}(M_n) = \begin{cases} (-1)^i \dbinom{j}{i} & \text{si } i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   ce que l'on peut écrire sans disjonction de cas grâce à la convention sur le coefficient binomial :

   $$\forall\, i, j \in [\![0, n]\!], \quad \mathrm{coeff}_{i,j}(M_n) = (-1)^i \binom{j}{i}$$

   Cette matrice est triangulaire supérieure, avec une diagonale ayant des 1 et des -1, en alternance (précisément, le coefficient en haut à gauche vaut 1 et celui en bas à droite vaut $(-1)^n$).

Les signes $-$ se trouvent sur les lignes indexées par un entier impair (la première ligne étant indexée par 0)

Remarque. Si l'on veut indexer les lignes (et colonnes) par $[\![1, n+1]\!]$, on a

$$\forall\, k, \ell \in [\![1, n+1]\!], \quad \operatorname{coeff}_{k,\ell}(M_n) \;=\; (-1)^{k-1}\binom{\ell-1}{k-1}$$

4. Dans le cas où $n = 2$, la matrice de φ dans la base canonique $\mathcal{B}$ peut se déduire du cas général (en prenant donc $n = 2$). Cela va peut-être plus vite de la redéterminer à la main. On a

$$\varphi(1) = 1, \qquad \varphi(X) = 1 - X, \qquad \varphi(X^2) = 1 - 2X + X^2$$

donc la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ vaut

$$M \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On a $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi - \mathrm{id}_E) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) - \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) = M - I \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Le rang de la matrice $M - I$ vaut 1 donc $\operatorname{rg}(\varphi - \mathrm{id}_E) = 1$.

D'après le théorème du rang, on a donc $\dim\big(\operatorname{Ker}(\varphi - \mathrm{id}_E)\big) = 2$.

Puis avec la décomposition de $E = \mathbb{K}_2[X]$, on a $\dim\big(\operatorname{Ker}(\varphi + \mathrm{id}_E)\big) = 1$.

5. Pour montrer que $M = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est semblable à M', on va montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ telle que $M' = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$.

Considérons une base $\mathcal{B}'$ de E adaptée à la décomposition

$$E \;=\; \operatorname{Ker}(\varphi - \mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(\varphi + \mathrm{id}_E)$$

Ainsi, grâce aux dimensions déterminées précédemment, $\mathcal{B}'$ est du type

$$\mathcal{B}' \;=\; \underbrace{(e_1', e_2')}_{\substack{\text{base de} \\ \operatorname{Ker}(\varphi - \mathrm{id}_E)}} \;\vee\; \underbrace{(e_3')}_{\substack{\text{base de} \\ \operatorname{Ker}(\varphi + \mathrm{id}_E)}}$$

D'où

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi) \;=\; \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \varphi(e_1') & \varphi(e_2') & \varphi(e_3') \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{array} \end{array}$$

Remarque. Ne pas oublier que les e_i' sont des polynômes ! On a montré leur existence, mais on ne les a pas encore explicités (par ailleurs, il n'y a pas unicité).

6. Explicitons une base de $\operatorname{Ker}(M - I)$ et de $\operatorname{Ker}(M + I)$.

On en déduira une base de $\operatorname{Ker}(\varphi - \mathrm{id}_E)$ et $\operatorname{Ker}(\varphi + \mathrm{id}_E)$ et ceci « en réincarnant des colonnes en polynômes ! ».

On a

$$M \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M - I \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M + I \;=\; \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

On a

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \operatorname{Ker}(M - I) \qquad\qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \operatorname{Ker}(M + I)$$

Pour des raisons de dimension,

$$\text{une base de } \operatorname{Ker}(M - I) \text{ est } \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\text{une base de } \mathrm{Ker}(M+I) \text{ est } \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

Donc

$$\text{une base de } \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{id}_E) \text{ est } \Big(1,\ X^2 - X\Big)$$

$$\text{une base de } \mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{id}_E) \text{ est } \Big(-2X+1\Big)$$

Ainsi,

$$\text{une base de } E = \mathbb{K}_2[X] \text{ est } \mathcal{B}' = \Big(1,\ X^2 - X,\ -2X+1\Big)$$

On peut « faire un peu de ménage » (prendre des coefficients dominants positifs par exemple), et on pose

$$\boxed{\mathcal{B}' = \Big(1,\ X^2 - X,\ 2X - 1\Big)}$$

D'après la formule de changement de bases pour un endomorphisme, on a

$$M' = \Omega^{-1} M \Omega \qquad \text{avec } \Omega = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$$

Avec notre base $\mathcal{B}' = \Big(1, X^2 - X,\ 2X - 1\Big)$, on a :

$$\Omega = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour le fun. On peut s'amuser à vérifier que la formule de changement de bases est vraie ! Un calcul matriciel montre que $\Omega M' = M\Omega$, donc c'est tout bon !

7. On a $\varphi(1) = 1$, $\varphi(X) = 1 - X$, $\varphi(X^2) = 1 - 2X + X^2$, $\varphi(X^3) = 1 - 3X + 3X^2 - X^3$.
Donc la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ vaut

$$M \ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ainsi,

$$M - I \ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad M + I \ = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On arrive encore à lire à l'œil nu le rang de chacune de ces matrices, donc on doit pouvoir trouver une base du noyau également à l'œil nu.

Remarque. Si le rang ne se lit pas à l'œil nu, on peut échelonner la matrice ce qui ne change pas son rang et surtout, si l'on échelonne **en ligne**, on ne change pas le noyau ! Donc on pourra trouver rapidement une base du noyau.
A gauche, voilà les opérations élémentaires effectuées

$$L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1,\ \ L_2 \leftarrow -L_2,\ \ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2,\ \ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2,\ \ L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

A droite, voilà les opérations élémentaires effectuées

$$L_2 \leftarrow -L_2, \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2,\ \ L_1 \leftarrow L_1 - \tfrac{1}{2}L_2,\ \ L_1 \leftarrow \tfrac{1}{2}L_1,\ \ L_2 \leftarrow \tfrac{1}{2}L_2$$

Cela conduit aux deux matrices échelonnées (ayant chacune deux pivots, donc chacune de rang 2)

$$(M - I)^{\text{éch.}} \ = \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad (M + I)^{\text{éch.}} \ = \begin{bmatrix} \boxed{1} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour des raisons de dimension,

$$\text{une base de } \operatorname{Ker}(M - I) \text{ est } \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\text{une base de } \operatorname{Ker}(M + I) \text{ est } \left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right) \text{ ou encore } \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix} \right)$$

Rappel. Pour une matrice rectangulaire A, on a $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^{\text{éch}}$. En effet, effectuer des opérations élémentaires sur les lignes de A revient à multiplier A à gauche par une matrice inversible P, ainsi, $A^{\text{éch}} = PA$ pour une certaine matrice inversible P. Or $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Ker}(PA)$ car P est inversible.

Il s'agit maintenant de réincarner les colonnes en polynômes.
D'après l'étude matricielle,

$$\text{une base de } \operatorname{Ker}(\varphi - \mathrm{id}_E) \text{ est } \left(1,\ X^2 - X\right)$$

$$\text{une base de } \operatorname{Ker}(\varphi + \mathrm{id}_E) \text{ est } \left(2X - 1,\ 4X^3 - 6X^2 + 1\right)$$

Pour le fun. On peut s'amuser à faire une petite vérification.

— Les polynômes de $\operatorname{Ker}(\varphi - \mathrm{id}_E)$ sont invariants par « X donne $1 - X$ ». Il y a intérêt à ce que ce soit le cas pour les deux polynômes fournis.
  Le polynôme constant $1 = X^0$ a pour image par φ le polynôme $(1 - X)^0$ qui vaut 1. Donc 1 est invariant par φ.
  Le polynôme $-X + X^2 = X(X - 1)$ a pour image par φ le polynôme $(1 - X)(1 - X - 1)$ qui vaut $-(1 - X)X = X(X - 1)$. Donc $-X + X^2$ est invariant par φ.

— Les polynômes de $\operatorname{Ker}(\varphi + \mathrm{id}_E)$ sont transformés en leur opposé en appliquant φ.
  Il y a intérêt à ce que ce soit le cas pour les deux polynômes fournis.
  Le polynôme $2X - 1$ a pour image par φ le polynôme $2(1 - X) - 1$ qui vaut $-(2X - 1)$. C'est bon !
  Le polynôme $1 - 6X^2 + 4X^3$ a pour image par φ le polynôme $1 - 6(1 - X)^2 + 4(1 - X)^3$ qui vaut $-1 + 6X^2 - 4X^3 = -(1 - 6X^2 + 4X^3)$. C'est bon !

(i) On a $M = 0_n$ si et seulement si $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
En effet, dire que $M = 0_n$ revient à dire que $\forall j \in [\![1, n]\!], f(e_j) = 0_E$.
Il est clair que cette condition est vraie pour l'endomorphisme nul.
Réciproquement, si f vérifie cette condition, il coïncide avec l'endomorphisme nul sur la base $\mathscr{B}$, donc il lui est égal par prolongement des identités.

(ii) On a $M = I_n$ si et seulement si $f = \mathrm{id}_E$.
En effet, dire que $M = I_n$ revient à dire que $\forall j \in [\![1, n]\!], f(e_j) = e_j$ donc $f = \mathrm{id}_E$.

(iii) On a $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si f est un automorphisme. (C'est une propriété du cours).

(iv) On a $\operatorname{rg} M = r$ si et seulement si $\operatorname{rg} f = r$. (C'est une propriété du cours).
Notons que cette question généralise les première et troisième questions. La première correspond au cas $r = 0$ et la troisième au cas $r = n$.

(v) Étant donné un vecteur $y \in E$, dire que les r premiers coefficients de sa matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y)$ sont nuls signifie que dans sa décomposition

$$y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i,$$

les r premiers coefficients sont nuls $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$.
C'est donc équivalent à l'appartenance $y \in \mathrm{Vect}(e_{r+1}, \ldots, e_n)$.
Ainsi, dire que M est de la forme de l'énoncé signifie que $\forall j \in [\![1, n]\!], f(e_j) \in \mathrm{Vect}(e_{r+1}, \ldots, e_n)$.
Puisque $\operatorname{Im} f = \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$, cette condition est donc équivalente à l'inclusion

$$\operatorname{Im} f \subset \mathrm{Vect}(e_{r+1}, \ldots, e_n)$$

(vi) Dire que M est de la forme de l'énoncé signifie que $\forall j \in [\![1, r]\!], f(e_j) = 0_E$. Par stabilité par combinaison linéaire, c'est donc équivalent à l'inclusion

$$\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r) \subset \operatorname{Ker} f.$$

(vii) En reprenant le raisonnement exposé au début de la question (v), on voit que dire que M est de la forme de l'énoncé signifie que $\forall j \in [\![1, r]\!], f(e_j) \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r)$.
On voit facilement (par linéarité de f, et par stabilité par combinaison linéaire de $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r)$) que cela est équivalent à la condition

$$\forall\, x \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r),\ \ f(x) \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r)$$

que l'on peut redire de manière plus concise sous la forme

$$f\,[\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r)] \subset \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r).$$

On dit alors naturellement que $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r)$ est *stable par* f.

(viii) Exactement comme dans la question précédente, on voit que M est de la forme de l'énoncé si et seulement si les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r)$ et $\mathrm{Vect}(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ sont tous les deux stables sous f.
(En particulier, dans ce cas, E se décompose en somme directe de deux sous-espaces stables par f, ce qui est une propriété intéressante).

Supposons que l'on retire la $i^{\text{ème}}$ ligne de A.
Posons $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K}) \\ C & \longmapsto & C' \end{array}$ l'application de « suppression de la ligne i ».
Cette application φ est linéaire et on a

$$\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Vect}(E_i) \qquad \text{où } E_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

En particulier, $\dim \operatorname{Ker}\varphi = 1$.
Notons V le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ engendré par les colonnes $C_1, \dots, C_p$ de A.
Autrement dit, $V = \operatorname{Im} A$.
En appliquant le théorème du rang à la restriction de φ à V, on obtient

$$\dim V \;=\; \dim(V \cap \operatorname{Ker}\varphi) \;+\; \dim \varphi(V)$$

(en effet, l'espace de départ de $\varphi_{|V}$ est V, le noyau de $\varphi_{|V}$ est $V \cap \operatorname{Ker}\varphi$, et l'image de $\varphi_{|V}$ est $\varphi(V)$).
Comme $V \cap \operatorname{Ker}\varphi \subset \operatorname{Ker}\varphi$, on a

$$\dim(V \cap \operatorname{Ker}\varphi) \in \{0, 1\}$$

et vaut 1 si et seulement si $\operatorname{Ker}\varphi \subset V$, c'est-à-dire $E_i \in V$.
Par construction, on a

$$\dim V = \operatorname{rg}(A) \qquad \text{et} \qquad \dim \varphi(V) = \operatorname{rg}(A')$$

En effet, on a $V = \operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_p) = \operatorname{Im} A$, et $\varphi(V) = \operatorname{Vect}(C'_1, \dots, C'_p)$, où C'_j désigne la $j^{\text{ème}}$ colonne de A privé de sa $i^{\text{ème}}$ ligne.
On déduit donc

$$\operatorname{rg}(A) - \operatorname{rg}(A') \;\in\; \{0, 1\}$$

et vaut 1 si et seulement si $E_i \in \operatorname{Im} A$.

120

1.
2. On a alors $A^2 = C(LC)L = C[\lambda]L = \lambda A$.

129

Une base de $\mathrm{Ker}(\Omega - 3I)$ est $\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$.

Une base de $\mathrm{Ker}(\Omega)$ est $\left(\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\right)$.

Notons P la matrice formée par ces 3 colonnes :

$$P = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\-1 & 0 & 2\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Elle est inversible (cela se voit presque à l'oeil nu ; on peut permuter les colonnes 2 et 3 et voir des blocs inversibles ; sinon, échelonner !).

Un calcul matriciel montre que $\Omega P = P\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

Mais, on avait dit « sans calcul » ! La formule de changement de base pour l'endomorphisme canoniquement associé à Ω fournit l'égalité matricielle !