Équations différentielles

24c-EquaDiff.pdf, 6 avril 2023, 7:55

Dans ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, c'est-à-dire contenant au moins deux points.
Les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble des nombres réels ou celui des nombres complexes.

I. Équations différentielles linéaires

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction et qui fait intervenir ses dérivées successives.
Par exemple,

$$y^{(3)} + 3\cos(y') + e^x y = \mathrm{ch}(x)$$

est une équation différentielle d'inconnue y, fonction de la variable x.
En général, il est très difficile de résoudre une équation différentielle et même de dire s'il y a ou non des solutions.

— On appelle *équation différentielle linéaire d'ordre n* toute équation de la forme

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y \;=\; b(x)$$

où $a_0, \ldots, a_n$ et b désignent des fonctions de I dans $\mathbb{K}$, continues sur I.

— On dit que (E) est homogène (ou sans second membre) si b est la fonction nulle.

— On dit que (E) est résolu en $y^{(n)}$ si a_n est la fonction constante égale à 1.

— Résoudre (E), c'est déterminer toutes les fonctions f qui sont n-fois dérivables sur I et telles que

$$\forall x \in I, \quad a_n(x)f^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)f'(x) + a_0(x)f(x) \;=\; b(x)$$

Une telle fonction est appelée solution de (E).

— On appelle équation homogène associée à (E) l'équation différentielle

$$(E_H) \qquad a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y \;=\; 0$$

1 **Proposition (Structure de l'ensemble des solutions).**

— L'ensemble des solutions $\mathscr{S}_H$ de l'équation différentielle *linéaire homogène* (E_H) est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{D}^n(I,\mathbb{K})$.

— Si f_P est une solution particulière de (E), alors l'ensemble des solutions de (E) est

$$\mathscr{S} \;=\; \left\{ f_H + f_P \mid f_H \in \mathscr{S}_H \right\}$$

- Le deuxième point peut s'écrire en abrégé $\mathscr{S} = \mathscr{S}_H + f_P$.

2 **Proposition (principe de superposition).**
Soit $a_0, \ldots, a_n : I \to \mathbb{K}$ et $b_1, b_2 : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues.
Si f_1 est une solution de

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y \;=\; b_1(x)$$

et si f_2 est une solution de

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y \;=\; b_2(x)$$

alors, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, la fonction $\lambda f_1 + \mu f_2$ est solution de

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y \;=\; \lambda b_1(x) + \mu b_2(x)$$

II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Une équation différentielle linéaire d'ordre 1 est de la forme

$$(E) \qquad y' + a(x)y = b(x)$$

où $a, b : I \to \mathbb{K}$ sont continues.

- Une solution de (E) est une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ dérivable telle que :

$$\forall x \in I, \quad f'(x) + a(x)f(x) = b(x).$$

- Lorsque a est la fonction nulle, résoudre (E) revient à chercher les primitives de la fonction b.
  Dans le cas général, résoudre (E) revient à une recherche de primitives (comme nous allons le voir).
- D'après la proposition ..., pour résoudre (E), il nous suffit de :
  — résoudre l'équation homogène (E_H),
  — trouver une solution particulière de l'équation (E).
- Il arrive que l'on ait à résoudre des équations différentielles de la forme :

$$\alpha(x)y' + \beta(x)y = \lambda(x)$$

  où les fonctions α, β et λ sont continues sur I. Dans ce cas, on se place sur un intervalle J inclus dans I sur lequel la fonction α ne s'annule pas, et l'on se ramène à une équation du type (E), avec $a = \dfrac{\beta}{\alpha}$ et $b = \dfrac{\lambda}{\alpha}$ qui sont continues sur J.

Résolution de l'équation homogène

3 preuve

Proposition. Soit $a : I \to \mathbb{K}$ continue.
Soit (E_H) l'équation différentielle homogène $y' + a(x)y = 0$.
Soit A une primitive de a sur I (qui existe d'après le théorème fondamental de l'analyse).
On a

$$\mathscr{S}_H = \mathrm{Vect}(f_0) \qquad \text{où } f_0 : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{-A(x)} \end{array}$$

- **Remarque.** La fonction f_0 est bien sûr non nulle. Pire (ou mieux!), elle ne s'annule pas!
- **Reformulation.** Les solutions de (E_H) sont les fonctions de la forme $\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \lambda\,\mathrm{e}^{-A(x)} \end{array}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

  Autrement dit

$$\mathscr{S}_H = \left\{x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-A(x)},\ \lambda \in \mathbb{K}\right\}$$

- **Structure.** L'ensemble des solutions d'une équation différentielle *linéaire d'ordre 1* est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1 : c'est une droite vectorielle.
- **Cas particulier.** Lorsque a est une fonction constante, disons lorsque $a \in \mathbb{K}$, alors l'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + ay = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-ax},\ \lambda \in \mathbb{K}\right\}$.

4 preuve

Proposition. Si f_H est une solution non nulle de (E_H), alors f_H ne s'annule pas et $\mathscr{S}_H = \mathrm{Vect}(f_H)$.

- Lorsqu'il y a une solution évidente non nulle de (E_H), on connaît $\mathscr{S}_H$ *sans avoir besoin de primitiver a.*

5 **Question.** Trouver une solution évidente, et résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ les équations différentielles :

$$y' + \frac{1}{x} y = 0 \qquad\qquad y' - \frac{2}{x} y = 0$$

6 preuve **Question.** Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :

$$y' + \frac{1}{1+x^2} y = 0 \qquad\qquad y' + \cos x \, y = 0 \qquad\qquad y' + \frac{x}{1+x^2} y = 0$$

Solution particulière

Maintenant que l'on dispose d'une méthode pour résoudre l'équation homogène (E_H), il reste à trouver une solution particulière de l'équation initiale (E).

- Il peut y avoir une solution évidente.
- Si le second membre a une certaine forme, on peut chercher une solution particulière de la même forme.
  En particulier, lorsque l'on a une équation différentielle à coefficients constants et un second membre qui est le produit d'une fonction polynomiale et d'une fonction exponentielle, c'est-à-dire de la forme $x \longmapsto P(x)\mathrm{e}^{\rho x}$ on peut chercher une solution de même type que le second membre, c'est-à-dire de la forme $x \longmapsto Q(x)\mathrm{e}^{\rho x}$ avec Q une fonction polynomiale.
- Lorsque le second membre est une combinaison linéaire de seconds membres que l'on sait traiter, on peut utiliser le *principe de superposition*.
  Pour pouvoir utiliser le principe de superposition, on découpe le second membre b en somme de termes pour lesquels on peut trouver une solution particulière.
- On peut utiliser la méthode de variation de la constante (cf. paragraphe suivant).

7 sol → 12 **Question.** Soit $a, \rho \in \mathbb{K}$. Résoudre $y' + ay = \mathrm{e}^{\rho x}$.

8 sol → 13 **Question.** Résoudre sur $\mathbb{R}$

$$y' + 2y = x^2 - 2x + 3 \qquad\qquad y' + y = \cos x$$

9 sol → 13 **Question.** Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$ l'équation différentielle $y' + \frac{1}{x} y = x + 1 + \frac{1}{x}$.
trouver un autre exemple pour illustrer la superposition.

Méthode de la variation de la constante

10 preuve

Proposition (existence de solutions).
L'équation différentielle linéaire du 1er ordre $y' + a(x)y = b(x)$ possède une (et même une infinité) de solutions.

- Dans la preuve, on voit que la constante λ a été remplacée par une fonction dérivable « que l'on fait donc varier ».
- Pour déterminer l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E), il faut donc :
  - déterminer l'ensemble $\mathscr{S}_H$ des solutions de l'équation homogène associée.
    Pour cela, soit l'on trouve une solution « évidente », soit on primitive a.
  - déterminer une solution particulière. Pour cela, on peut :
    - ⋆ trouver une solution « évidente »
    - ⋆ chercher une solution particulière en s'inspirant de la forme du second membre
    - ⋆ utiliser le principe de superposition
    - ⋆ utiliser la méthode de la variation de la constante.

11 sol → 14

Question. Résoudre l'équation différentielle $y' + \frac{1}{x}y = \frac{x}{x-1}$ sur $]1, +\infty[$.

Problème de Cauchy

La méthode de variation de la constante permet d'assurer l'existence de solutions de l'équation (E).
Le résultat suivant affirme que la solution est unique si l'on impose une condition initiale.
C'est la situation que l'on rencontre en général en sciences physiques : une équation différentielle décrit l'évolution d'un système en fonction du temps et, souvent, la condition initiale en précise son état au temps $t = 0$.

12 preuve

Proposition (Problème de Cauchy)
Soit $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$.
Le système $\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, appelé « problème de Cauchy », admet une unique solution.

- Les graphes de deux solutions d'une même équation différentielle linéaire d'ordre 1 sont disjoints ou confondus.
- On retrouve que si f est solution d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, alors f s'annule si et seulement si elle est identiquement nulle.
- L'utilisation du problème de Cauchy peut permettre de démontrer des propriétés des solutions d'une équation différentielle (cf. question ci-après).

13 sol → 15

Question. Soit a et b continues sur $\mathbb{R}$ et impaires.
Montrer que toute solution de (E) $y' + a(x)y = b(x)$ est paire.

14 sol → 15

Question. Déterminer l'unique solution sur $]0, \pi[$ de $y' + \frac{\cos x}{\sin x}y = 1$ s'annulant en $\frac{\pi}{2}$.

III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coeffs constants

Soit $a \in \mathbb{K}^*$, $b, c \in \mathbb{K}$ et $d : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue.
On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants :

$$(E) \qquad ay'' + by' + cy = d(x).$$

- L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ va jouer un rôle important. C'est l'équation caractéristique associée à (E). On définit également le polynôme caractéristique de (E) comme étant $aX^2 + bX + c$.
- On pourrait supposer $c \neq 0$, car si c est nul, l'équation différentielle s'écrit $y'' + by' = d(x)$ et on est ramené à une équation différentielle linéaire *d'ordre* 1, à savoir $z' + bz = d(x)$.

Résolution de l'équation homogène

- **Rappel** sur les équations d'ordre 1 à *coefficients constants*.
  L'ensemble des solutions $ay' + by = 0$ est $\mathrm{Vect}\big(x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{b}{a}x}\big)$.
  On remarque que $-\frac{b}{a}$ est l'unique solution du polynôme $aX + b$.

15 preuve

Proposition.
Soit $r \in \mathbb{K}$.
La fonction $\varphi_r : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{rx} \end{array}$ est solution de (E_H) si et seulement si r est racine de $aX^2 + bX + c$.

Voici un énoncé avec « du $\mathbb{C}$ partout ».

16 preuve

Théorème (solutions à valeurs complexes).
Notons Δ le discriminant du polynôme caractéristique $aX^2 + bX + c$ qui est dans $\mathbb{C}[X]$.
Soit f une solution de (E_H).

— Cas $\Delta \neq 0$. Notons r_1 et r_2 les deux racines complexes distinctes.
Il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$f : x \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{r_1 x} + \mu \mathrm{e}^{r_2 x}$$

— Cas $\Delta = 0$. Notons r_0 l'unique racine.
Il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$f : x \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{r_0 x} + \mu x \mathrm{e}^{r_0 x}$$

- **Reformulation (avec légère perte d'information).**
  — Cas $\Delta \neq 0$. Notons r_1 et r_2 les deux racines complexes distinctes.
  $$\mathscr{S}_H = \mathrm{Vect}\Big(x \mapsto \mathrm{e}^{r_1 x}, \quad x \mapsto \mathrm{e}^{r_2 x}\Big)$$
  — Cas $\Delta = 0$. Notons r_0 l'unique racine.
  $$\mathscr{S}_H = \mathrm{Vect}\Big(x \mapsto \mathrm{e}^{r_0 x}, \quad x \mapsto x\mathrm{e}^{r_0 x}\Big)$$
- **Reformulation exacte.**
  — Cas $\Delta \neq 0$. Notons r_1 et r_2 les deux racines complexes distinctes.
  Une base de $\mathscr{S}_H$ est la famille $\Big(x \mapsto \mathrm{e}^{r_1 x}, \quad x \mapsto \mathrm{e}^{r_2 x}\Big)$.
  — Cas $\Delta = 0$. Notons r_0 l'unique racine.
  Une base de $\mathscr{S}_H$ est la famille $\Big(x \mapsto \mathrm{e}^{r_0 x}, \quad x \mapsto x\mathrm{e}^{r_0 x}\Big)$.
- **Structure.** Dans tous les cas, $\mathscr{S}_H$ est un $\mathbb{C}$-espace-vectoriel de dimension 2. C'est un plan vectoriel.

Voici un premier énoncé avec « du $\mathbb{R}$ et encore un peu de $\mathbb{C}$ ».

17 **Proposition (solutions à valeurs *complexes* dans le cas où les coefficients sont réels).**
Notons Δ le discriminant du polynôme caractéristique aX^2+bX+c qui est dans $\mathbb{R}[X]$.
Soit f une solution de (E_H).

— Cas $\Delta > 0$. Notons r_1 et r_2 les deux racines réelles distinctes.
Il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que
$$f : x \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{r_1 x} + \mu\, \mathrm{e}^{r_2 x}$$

— Cas $\Delta = 0$. Notons r_0 l'unique racine réelle.
Il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que
$$f : x \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{r_0 x} + \mu\, x \mathrm{e}^{r_0 x}$$

— Cas $\Delta < 0$. Notons $\alpha \pm \mathrm{i}\beta$ les deux racines complexes conjuguées non réelles.
Il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que
$$f : x \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x + \mu\, \mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x$$

Voici un deuxième énoncé avec « du $\mathbb{R}$ partout ».

18 **Théorème (solutions à valeurs *réelles* dans le cas où les coefficients sont réels).**
Notons Δ le discriminant du polynôme caractéristique aX^2+bX+c qui est dans $\mathbb{R}[X]$.
Soit f une solution de (E_H).

— Cas $\Delta > 0$. Notons r_1 et r_2 les deux racines réelles distinctes.
Il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$f : x \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{r_1 x} + \mu\, \mathrm{e}^{r_2 x}$$

— Cas $\Delta = 0$. Notons r_0 l'unique racine réelle.
Il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$f : x \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{r_0 x} + \mu\, x \mathrm{e}^{r_0 x}$$

— Cas $\Delta < 0$. Notons $\alpha \pm \mathrm{i}\beta$ les deux racines complexes conjuguées non réelles.
Il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$f : x \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x + \mu\, \mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x$$

- L'énoncé avec « du $\mathbb{R}$ et encore un peu de $\mathbb{C}$ » servira peu.
Mais il est utile de l'avoir lu une fois dans sa vie pour comprendre d'où vient l'énoncé « avec du $\mathbb{R}$ partout ».
- **Reformulation (avec légère perte d'information).**
  — Cas $\Delta \neq 0$. Notons r_1 et r_2 les deux racines réelles distinctes.
$$\mathscr{S}_H = \mathrm{Vect}\Big(x \mapsto \mathrm{e}^{r_1 x}, \quad x \mapsto \mathrm{e}^{r_2 x}\Big)$$
  — Cas $\Delta = 0$. Notons r_0 l'unique racine réelle.
$$\mathscr{S}_H = \mathrm{Vect}\Big(x \mapsto \mathrm{e}^{r_0 x}, \quad x \mapsto x\mathrm{e}^{r_0 x}\Big)$$
  — Cas $\Delta < 0$. Notons $\alpha \pm \mathrm{i}\beta$ les deux racines complexes conjuguées non réelles.
$$\mathscr{S}_H = \mathrm{Vect}\Big(x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x, \quad x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x\Big)$$
- **Reformulation exacte.** à vous !

19 **Question.** Résoudre les équations différentielles :
sol → 16
$$y'' + 4y' - 5y = 0 \qquad y'' - 2y' + y = 0 \qquad y'' + 2\,y' + 2\,y = 0$$
Faire une remarque pertinente sur les solutions à valeurs complexes de la 3ème équation différentielle.

Solution particulière

Maintenant que l'on dispose d'une méthode pour résoudre l'équation homogène (E_H), il reste à trouver une solution particulière de l'équation (E).
Si le second membre a une certaine forme, on peut chercher une solution particulière de la même forme.

20
preuve

Proposition (avec second membre sous la forme d'une exponentielle).
Soit $\rho \in \mathbb{K}$. L'équation différentielle :

$$(E) \qquad ay'' + by' + cy = \mathrm{e}^{\rho x}$$

a une solution de la forme :

- $x \mapsto C\mathrm{e}^{\rho x}$ si ρ n'est pas racine de $aX^2 + bX + c$.
- $x \mapsto Cx\mathrm{e}^{\rho x}$ si ρ est racine simple de ...
- $x \mapsto Cx^2\mathrm{e}^{\rho x}$ si ρ est racine double de ...

- **Remarque.** Soit $f : x \mapsto Q(x)\mathrm{e}^{\rho x}$ où $Q \in \mathbb{K}[X]$. Au cours de la preuve, on a vu le calcul :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad af''(x) + bf'(x) + cf(x) = \Big(\underbrace{a}_{\frac{1}{2}\chi''(\rho)} Q''(x) + \underbrace{(2a\rho + b)}_{\chi'(\rho)} Q'(x) + \underbrace{(a\rho^2 + b\rho + c)}_{\chi(\rho)} Q(x) \Big) \mathrm{e}^{\rho x}.$$

en notant $\chi = aX^2 + bX + c$ le polynôme caractéristique de (E).

- **Plus généralement.** Si le second membre est le produit d'une fonction polynomiale, disons P, et d'une fonction exponentielle, disons $x \mapsto \mathrm{e}^{\rho x}$, on peut chercher une solution particulière de la même forme.
Soit $f : x \mapsto Q(x)\mathrm{e}^{\rho x}$ où $Q \in \mathbb{K}[X]$.
Le calcul est le même que précédemment, d'où l'équivalence

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad af''(x) + bf'(x) + cf(x) = P(x)\mathrm{e}^{\rho x} \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \Big(\underbrace{a}_{\frac{1}{2}\chi''(\rho)} Q''(x) + \underbrace{(2a\rho + b)}_{\chi'(\rho)} Q'(x) + \underbrace{(a\rho^2 + b\rho + c)}_{\chi(\rho)} Q(x) \Big) \mathrm{e}^{\rho x} = P(x)\mathrm{e}^{\rho x} \\ &\Longleftrightarrow \quad \underbrace{a}_{\frac{1}{2}\chi''(\rho)} Q'' \; + \; \underbrace{(2a\rho + b)}_{\chi'(\rho)} Q' \; + \; \underbrace{(a\rho^2 + b\rho + c)}_{\chi(\rho)} Q \; = \; P \end{aligned}$$

- **Encore plus généralement.** Cette idée ainsi que le principe de superposition permettent de trouver une solution particulière lorsque le second membre est le produit d'une fonction polynomiale et d'une fonction cosinus ou sinus.

21
preuve

Question.
Résoudre les équations différentielles suivantes :

(i) $y'' - 4y' + 3y = \mathrm{e}^x$

(ii) $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^x$

(iii) $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)\,\mathrm{e}^{-x}$

(iv) $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)\,\mathrm{e}^x$

(v) $y'' - 2y' + y = (x - 1)\,\mathrm{e}^x$

22
sol → 17

Question. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

(i) $y'' - 4\,y' + 3\,y = \mathrm{sh}\,x$.

(ii) $y'' + y = \sin^3 x$.

(iii) $y'' - 4\,y' + 3\,y = (2x + 1)\,\mathrm{sh}\,x$.

(iv) $y'' - 4y' + 3y = x\,\mathrm{e}^x \cos x$.

Existence de solutions. Problème de Cauchy

Soit $a \in \mathbb{K}^*$, $b, c \in \mathbb{K}$ et $d : I \to \mathbb{K}$ continue.

23 **Proposition (existence de solutions).**
L'équation différentielle linéaire du 2^{nd} ordre $ay'' + by' + cy = d(x)$ admet des solutions.

Vous verrez la preuve dans un cadre plus général en Spé.

24 **Proposition (problème de Cauchy).**
Soit $(x_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$.
Le problème de Cauchy $\begin{cases} ay'' + by' + cy = d(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$ admet une unique solution.

IV. Rappel sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2

25 **Définition.**
Une suite u est *récurrente linéaire d'ordre* 2 lorsque son terme général u_n vérifie une relation du type

$$\bigstar_{b,c} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n = 0 \qquad \text{avec } b, c \in \mathbb{C}$$

- L'équation $x^2 + bx + c = 0$ va jouer un rôle important, on la note $\text{ÉC}_{b,c}$.
  C'est l'équation caractéristique associée à la suite u.
- Il faut aussi voir la relation $\bigstar_{b,c}$ comme une relation du type :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \beta u_{n+1} + \lambda u_n \qquad \text{avec } \beta, \lambda \in \mathbb{C}$$

- On pourrait supposer $c \neq 0$, car si c est nul, $u_{n+2} = \beta u_{n+1}$ et on est ramené à une suite géométrique. Dans ce cas, 0 n'est pas racine de $\text{ÉC}_{b,c}$.

26 **Théorème (cas complexe).**
Soit u une suite *complexe* vérifiant la relation $\bigstar_{b,c}$ où $b, c \in \mathbb{C}$.
Notons Δ le discriminant de l'$\text{ÉC}_{b,c}$ de u, à savoir $x^2 + bx + c = 0$.

— Cas $\Delta \neq 0$. Notons z_1 et z_2 les deux solutions complexes distinctes de $\text{ÉC}_{b,c}$.
Il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda z_1^n + \mu z_2^n$$

— Cas $\Delta = 0$. Notons z_0 l'unique solution de $\text{ÉC}_{b,c}$ *que l'on suppose différente de* 0.
Il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda z_0^n + \mu n z_0^n$$

27 **Théorème (cas réel).**
Soit u une suite *réelle* vérifiant la relation $\bigstar_{b,c}$ où $b, c \in \mathbb{R}$.
Notons Δ le discriminant de l'$\text{ÉC}_{b,c}$ de u, à savoir $x^2 + bx + c = 0$.

— Cas $\Delta > 0$. Notons x_1 et x_2 les deux solutions réelles distinctes de $\text{ÉC}_{b,c}$.
Il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n$$

— Cas $\Delta = 0$. Notons x_0 l'unique solution de $\text{ÉC}_{b,c}$ *que l'on suppose différente de* 0.
Il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda x_0^n + \mu n x_0^n$$

— Cas $\Delta < 0$. Notons $z = re^{i\theta}$ l'une des deux solutions complexes conjuguées de $\text{ÉC}_{b,c}$.
Il existe un unique couple $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = A r^n \cos(n\theta) + B r^n \sin(n\theta)$$

- **Remarque.** Soit $f : x \mapsto Q(x)\mathrm{e}^{\rho x}$ où $Q \in \mathbb{K}[X]$. Au cours de la preuve, on a vu le calcul :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad af''(x) + bf'(x) + cf(x) = \Big(\underbrace{a}_{\frac{1}{2}\chi''(\rho)} Q''(x) + \underbrace{(2a\rho + b)}_{\chi'(\rho)} Q'(x) + \underbrace{(a\rho^2 + b\rho + c)}_{\chi(\rho)} Q(x)\Big)\mathrm{e}^{\rho x}.$$

en notant $\chi = aX^2 + bX + c$ le polynôme caractéristique de (E).

- **Plus généralement.** Si le second membre est le produit d'une fonction polynomiale, disons P, et d'une fonction exponentielle, disons $x \mapsto \mathrm{e}^{\rho x}$, on peut chercher une solution particulière de la même forme.
Soit $f : x \mapsto Q(x)\mathrm{e}^{\rho x}$ où $Q \in \mathbb{K}[X]$.
Le calcul est le même que précédemment, d'où l'équivalence

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad af''(x) + bf'(x) + cf(x) = P(x)\mathrm{e}^{\rho x} &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \Big(\underbrace{a}_{\frac{1}{2}\chi''(\rho)} Q''(x) + \underbrace{(2a\rho + b)}_{\chi'(\rho)} Q'(x) + \underbrace{(a\rho^2 + b\rho + c)}_{\chi(\rho)} Q(x)\Big)\mathrm{e}^{\rho x} = P(x)\mathrm{e}^{\rho x} \\ &\iff \underbrace{a}_{\frac{1}{2}\chi''(\rho)} Q'' + \underbrace{(2a\rho + b)}_{\chi'(\rho)} Q' + \underbrace{(a\rho^2 + b\rho + c)}_{\chi(\rho)} Q = P\end{aligned}$$

- **Encore plus généralement.** Cette idée ainsi que le principe de superposition permettent de trouver une solution particulière lorsque le second membre est le produit d'une fonction polynomiale et d'une fonction cosinus ou sinus.

- **Remarque.** Soit $f : x \mapsto Q(x)\mathrm{e}^{\rho x}$ où $Q \in \mathbb{K}[X]$. Au cours de la preuve, on a vu le calcul :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad af''(x) + bf'(x) + cf(x) = \Big(\underbrace{a}_{\frac{1}{2}\chi''(\rho)} Q''(x) + \underbrace{(2a\rho + b)}_{\chi'(\rho)} Q'(x) + \underbrace{(a\rho^2 + b\rho + c)}_{\chi(\rho)} Q(x)\Big)\mathrm{e}^{\rho x}.$$

en notant $\chi = aX^2 + bX + c$ le polynôme caractéristique de (E).

- **Plus généralement.** Si le second membre est le produit d'une fonction polynomiale, disons P, et d'une fonction exponentielle, disons $x \mapsto \mathrm{e}^{\rho x}$, on peut chercher une solution particulière de la même forme.
Soit $f : x \mapsto Q(x)\mathrm{e}^{\rho x}$ où $Q \in \mathbb{K}[X]$.
Le calcul est le même que précédemment, d'où l'équivalence

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad af''(x) + bf'(x) + cf(x) = P(x)\mathrm{e}^{\rho x} &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \Big(\underbrace{a}_{\frac{1}{2}\chi''(\rho)} Q''(x) + \underbrace{(2a\rho + b)}_{\chi'(\rho)} Q'(x) + \underbrace{(a\rho^2 + b\rho + c)}_{\chi(\rho)} Q(x)\Big)\mathrm{e}^{\rho x} = P(x)\mathrm{e}^{\rho x} \\ &\iff \underbrace{a}_{\frac{1}{2}\chi''(\rho)} Q'' + \underbrace{(2a\rho + b)}_{\chi'(\rho)} Q' + \underbrace{(a\rho^2 + b\rho + c)}_{\chi(\rho)} Q = P\end{aligned}$$

- **Encore plus généralement.** Cette idée ainsi que le principe de superposition permettent de trouver une solution particulière lorsque le second membre est le produit d'une fonction polynomiale et d'une fonction cosinus ou sinus.

3

$\boxed{\subset}$ Soit $f \in \mathscr{S}_H$.

Montrons que $f \in \mathrm{Vect}(f_0)$, c'est-à-dire montrons que $\dfrac{f}{f_0}$ est constante (licite, car f_0 ne s'annule pas).

On pose $\varphi : x \mapsto \dfrac{f(x)}{f_0(x)} = f(x)\mathrm{e}^{A(x)}$.
La fonction φ est dérivable sur I et

$$\forall\, x \in I, \quad \varphi'(x) = \big(f'(x) + a(x) f(x)\big)\,\mathrm{e}^{A(x)}$$

Comme $f \in \mathscr{S}_H$, on a $\varphi' = 0$.
Comme on est sur un intervalle, la fonction φ est constante.

$\boxed{\supset}$ Comme $\mathscr{S}_H$ est stable par combinaison linéaire, il suffit de vérifier que $f_0 \in \mathscr{S}_H$.
La fonction f_0 est bien sûr dérivable et on a $f_0' : x \mapsto -a(x)\mathrm{e}^{-A(x)} = -a(x) f_0(x)$.
Autrement dit, $f_0 \in \mathscr{S}_H$.

4

Rappel. On a $\mathscr{S}_H = \mathrm{Vect}(f_0)$ avec $f_0 : x \mapsto \mathrm{e}^{-A(x)}$, donc f_0 ne s'annule pas.
Supposons que $f_H \in \mathscr{S}_H \setminus \{0\}$.
Alors f_H s'écrit λf_0 avec $\lambda \neq 0$.
Comme f_0 ne s'annule pas, il en est de même de f_H.

On a $f_H \in \mathscr{S}_H$, donc $\mathrm{Vect}(f_H) \subset \mathscr{S}_H = \mathrm{Vect}(f_0)$.
Comme $f_H \neq 0$, on a $\dim\Big(\mathrm{Vect}(f_H)\Big) = 1$.
On obtient l'égalité par inclusion et égalité des dimensions.

6

1.
2. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \cos x$ est $x \mapsto \sin x$; donc les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda \exp(-\sin x)$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
3. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ est :

$$x \mapsto \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right);$$

donc les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène sont les fonctions :

$$x \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}} \text{avec } \lambda \in \mathbb{K}.$$

7

Cherchons une solution particulière de la forme $x \mapsto Ce^{\rho x}$ avec $C \in \mathbb{K}$.
On a l'équivalence

$$f_P \in \mathscr{S} \iff \forall\, x \in \mathbb{R},\ C(\rho + a)\mathrm{e}^{\rho x} = 0 \iff C(\rho + a) = 0$$

— Cas $\rho + a \neq 0$.

Alors la fonction $f_P : x \mapsto \dfrac{1}{\rho + a}\mathrm{e}^{\rho x}$ est solution de (E).

— Cas $\rho = -a$. Alors le polynôme caractéristique est $X + a$ et admet ρ pour racine !
On cherche une solution particulière f_P de la forme $x \mapsto Q(x)e^{-\rho x}$ avec Q de degré 1.
On trouve que $f_P : x \mapsto xe^{\rho x}$ est solution de (E).

8

Résolvons (E) $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$ sur $\mathbb{R}$.

Éq homogène.

On a

$$\begin{aligned} \mathscr{S}_H &= \operatorname{Vect}\left(x \mapsto e^{-A(x)}\right) \qquad \text{avec } A \text{ une primitive de } x \mapsto 2 \\ &= \operatorname{Vect}\left(x \mapsto e^{-2x}\right) \end{aligned}$$

Sol Part. Cherchons une solution particulière f_P de la forme $f_P : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + \beta x + \gamma$.

On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} f_P \in \mathscr{S} &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_P'(x) + 2f_P(x) = x^2 - 2x + 3 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad (x + \beta) + 2(\tfrac{1}{2}x^2 + \beta x + \gamma) = x^2 - 2x + 3 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + (1 + 2\beta)x + (\beta + 2\gamma) = x^2 - 2x + 3 \\ &\iff \begin{cases} 1 + 2\beta = -2 \\ \beta + 2\gamma = 3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \beta = -\frac{3}{2} \\ \gamma = \frac{4}{9} \end{cases} \end{aligned}$$

Bilan. La fonction $f_P : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{4}{9}$ est une solution particulière de (E).

Bilan. On a

$$\begin{aligned} \mathscr{S} &= \mathscr{S}_H \text{ "+" } f_P \\ &= \operatorname{Vect}\left(x \mapsto e^{-2x}\right) + f_P \\ &= \left\{x \mapsto \mu e^{-2x} + \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{3}{2}x + \tfrac{4}{9},\ \mu \in \mathbb{K}\right\} \end{aligned}$$

9

Éq homogène.

On a

$$\begin{aligned} \mathscr{S}_H &= \operatorname{Vect}\left(x \mapsto e^{-A(x)}\right) \qquad \text{avec } A \text{ une primitive de } x \mapsto \tfrac{1}{x} \\ &= \operatorname{Vect}\left(x \mapsto e^{-\ln x}\right) \\ &= \operatorname{Vect}\left(x \mapsto \tfrac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Sol Part.

Une solution de $y' + \dfrac{1}{x}y = x + 1$ est $x \mapsto \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x$.
Une solution de $y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{1}{x}$ est $x \mapsto 1$.
Par principe de superposition, une solution particulière de (E) est

$$f_P : x \mapsto \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$$

Bilan. On a

$$\begin{aligned}\mathscr{S} &= \mathscr{S}_H \,''+''\, f_P \\ &= \mathrm{Vect}\left(x \mapsto \tfrac{1}{x}\right) + f_P \\ &= \left\{x \mapsto \mu\frac{1}{x} + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x + 1,\ \mu \in \mathbb{K}\right\}\end{aligned}$$

10

Soit f de la forme $x \mapsto \lambda(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$ avec $\lambda : I \to K$ dérivable.
On a les équivalences

$$\begin{aligned} f \in \mathscr{S} &\iff \forall x \in I,\ \left(\lambda'(x)\mathrm{e}^{-A(x)} - \lambda(x)a(x)\mathrm{e}^{-A(x)}\right) + a(x)\left(\lambda(x)\mathrm{e}^{-A(x)}\right) = b(x) \\ &\iff \lambda'(x)\mathrm{e}^{-A(x)} = b(x) \\ &\iff \lambda \text{ primitive de } b\mathrm{e}^{A}\end{aligned}$$

Prenons λ une primitive de $b\mathrm{e}^A$ qui existe en vertu du théorème fondamental de l'analyse.
Alors $f : x \mapsto \lambda(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$ est solution de (E).
On a alors

$$\mathscr{S} = \mathrm{Vect}(\mathrm{e}^{-A}) + f_P$$

où $f_P : x \mapsto \lambda(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$ avec λ une primitive de $b\mathrm{e}^A$.

11

Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{\lambda}{x}$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
Cherchons une solution particulière de la forme :

$$f_1 : x \mapsto \frac{\lambda(x)}{x}$$

où λ est une fonction dérivable sur $]1, +\infty[$.
Après calculs, on trouve que la fonction f_1 est solution si et seulement si λ est une primitive sur $]1, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2}{x-1} = \dfrac{(x+1)(x-1)+1}{x-1} = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$.
Par conséquent, une solution particulière sur $]1, +\infty[$ est $f_1 ; x \mapsto \dfrac{x}{2} + 1 + \dfrac{\ln(x-1)}{x}$.
Ainsi, les solutions de l'équation sur $]1, +\infty[$ sont les fonctions :

$$x \mapsto \frac{x}{2} + 1 + \frac{\ln(x-1)}{x} + \frac{\lambda}{x} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{K}.$$

12

Unicité. Soit f_1 et f_2 deux solutions à ce problème de Cauchy.
Alors $\begin{cases} f_1 - f_2 \in \mathscr{S}_H \\ (f_1 - f_2)(x_0) = 0 \end{cases}$
Ainsi, $f_1 - f_2$ est solution de l'équation homogène et s'annule.
Donc c'est la fonction nulle, en vertu de la proposition ...

Existence. Posons $f : x \mapsto \mu\mathrm{e}^{-A(x)} + \lambda(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$ où λ est une primitive de la fonction $b\mathrm{e}^A$.
Il suffit de prendre $\mu = y_0\mathrm{e}^{A(x_0)} - \lambda(x_0)$ pour que $f(x_0) = y_0$.

13

Soit f une solution de E.
On remarque que $g : x \mapsto f(-x)$ est également solution (on utilise le fait que a et b sont impaires).
De plus, $g(0) = f(0)$.
Ainsi, f et g satisfont au même problème de Cauchy (lequel?!à, donc elles sont égales.

14

— **Solution de (E_H).** Une primitive de $x \mapsto \dfrac{\cos x}{\sin x}$ est $x \mapsto \ln(\sin)$. D'où, après simplification :

$$\mathscr{S}_H = \mathrm{Vect}\Big(x \mapsto \frac{1}{\sin x}\Big)$$

— **Solution particulière.**
Soit f_P une fonction de la forme $f_P : x \mapsto \lambda(x)\dfrac{1}{\sin x}$ où λ est une fonction dérivable sur $]0, \pi[$.
On a l'équivalence

$$f_P \text{ solution de } (E) \iff \cdots \iff \lambda \text{ primitive de } x \mapsto 1 \times \mathrm{e}^{\ln(\sin x)} = \sin x$$

La fonction $f_P : x \mapsto -\cos(x) \times \dfrac{1}{\sin x}$ est une solution particulière.

— **Solution de (E).** On a $\mathscr{S} = \mathscr{S}_H + f_P$.
Autrement dit, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto \mu\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{-\cos x}{\sin x}$ avec $\mu \in \mathbb{K}$.

— **Solution du problème de Cauchy.** L'unique solution s'annulant en $\frac{\pi}{2}$ est $x \mapsto -\dfrac{\cos x}{\sin x}$.

15

Cette équivalence provient de la relation :

$$a\varphi_r'' + b\varphi_r' + c\varphi_r = (ar^2 + br + c)\varphi_r$$

et du fait que la fonction φ_r n'est pas la fonction nulle.

16

Comme $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, l'équation caractéristique possède au moins une racine $r \in \mathbb{K}$.
Soit f de la forme $x \longmapsto \lambda(x)\mathrm{e}^{rx}$ avec λ une fonction deux fois dérivable.
Alors f est deux fois dérivable et on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda(x)\mathrm{e}^{rx} \\ f'(x) &= \big(\lambda'(x) + r\lambda(x)\big)\,\mathrm{e}^{rx} \\ f''(x) &= \big(\lambda''(x) + 2r\lambda'(x) + r^2\lambda(x)\big)\,\mathrm{e}^{rx} \end{aligned}$$

Pour $x \in I$, on a donc :

$$\begin{aligned} af''(x) + bf'(x) + cf(x) &= \big(a\lambda''(x) + (2ar + b)\lambda'(x) + (ar^2 + br + c)\lambda(x)\big)\mathrm{e}^{rx} \\ &= \big(a\lambda''(x) + (2ar + b)\lambda'(x)\big)\mathrm{e}^{rx} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$f \in \mathscr{S}_H \iff \lambda' \text{ solution de } ay' + (2ar + b)y = 0 \iff \lambda' \in \mathrm{Vect}\big(x \mapsto \mathrm{e}^{-(2r + \frac{b}{a})x}\big)$$

— Cas où $2ar+b\neq 0$.
On a donc l'équivalence

$$f\in\mathscr{S}_H \iff \exists\mu\in\mathbb{K},\ \lambda' : x\longmapsto \mu\mathrm{e}^{-(2r+\frac{b}{a})x} \iff \exists\mu,\gamma\in\mathbb{K},\quad \lambda : x\mapsto \frac{\mu}{-(2r+\frac{b}{a})}\mathrm{e}^{-(2r+\frac{b}{a})x}+\gamma$$

Ce qui équivaut à f de la forme $f : x\mapsto \dfrac{\mu}{-(2r+\frac{b}{a})}\mathrm{e}^{-(2r+\frac{b}{a})x}\mathrm{e}^{rx}+\gamma\mathrm{e}^{rx}$.

Comme $r+r'=-\frac{b}{a}$, on obtient le résultat annoncé.

— Cas où $2ar+b=0$.
Alors λ' est de la forme $x\longmapsto \mu\mathrm{e}^{0\times x}=\mu$ avec $\mu\in\mathbb{K}$.
Donc $\lambda : x\mapsto \mu x+\gamma$.
Ainsi $f : x\mapsto(\mu x+\gamma)\mathrm{e}^{rx}$.

19

1. L'équation caractéristique $r^2+4r-5=0$ admet comme racines 1 et -5 donc les solutions à valeurs dans $\mathbb{K}$ sont les fonctions :

$$x\mapsto \lambda_1 e^x+\lambda_2 e^{-5x} \text{ avec } (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2.$$

2. L'équation caractéristique $r^2-2r+1=0$ admet 1 comme racine double, donc les solutions à valeurs dans $\mathbb{K}$ sont les fonctions :

$$x\mapsto(\lambda_1+\lambda_2 x)e^x \text{ avec } (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2.$$

3. L'équation caractéristique $r^2+2r+2=0$ admet comme racines $-1+i$ et $-1-i$, donc les solutions complexes sont les fonctions :

$$x\mapsto \lambda_1 e^{-x+ix}+\lambda_2 e^{-x-ix} \text{ avec } (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{C}^2$$

et les solutions réelles sont les fonctions :

$$x\mapsto(\lambda_1\cos x+\lambda_2\sin x)e^{-x} \text{ avec } (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2.$$

On remarque que les solutions complexes sont aussi les fonctions :

$$x\mapsto(A\cos x+B\sin x)e^{-x} \text{ avec } (A,B)\in\mathbb{C}^2.$$

20

Distinguer les cas.
Supposons ρ pas racine de ...
Posons $f : x\mapsto Cxe^{\rho x}$ avec $C\in\mathbb{K}$.
On a les équivalences

$$f \text{ solution de } (E) \iff \dots \iff C=\frac{1}{\chi(\rho)}$$

21

1. Comme 1 est racine simple de l'équation caractéristique, les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions $x \mapsto \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{3x}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$.

   On cherche une solution sous la forme $f : x \mapsto Cx e^x$ et on trouve que $x \mapsto -\dfrac{x}{2} e^x$ est une solution particulière. Les solutions sont donc les fonctions :

$$x \mapsto \left(-\frac{x}{2} + \lambda_1\right) e^x + \lambda_2 e^{3x} \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

2. Comme 1 est racine double de l'équation caractéristique, les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions $x \mapsto (\lambda_1 + \lambda_2 x)\, e^x$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. On cherche une solution sous la forme $f : x \mapsto Cx^2 e^x$ et on trouve que $x \mapsto \dfrac{x^2}{2} e^x$ est une solution particulière. Les solutions sont donc les fonctions :

$$x \longmapsto \left(\frac{1}{2}x^2 + \lambda_1 + \lambda_2 x\right) e^x \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

3. Comme -1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution de la forme $x \mapsto (ax + b)\, e^{-x}$ et l'on trouve $x \mapsto \left(\dfrac{x}{4} + \dfrac{5}{16}\right) e^{-x}$, les solutions sont donc les fonctions :

$$x \longmapsto \left(\frac{x}{4} + \frac{5}{16}\right) e^{-x} + \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{3x} \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

4. Comme 1 est racine simple de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme $x \mapsto (ax^2 + bx)\, e^x$

   et l'on trouve $x \mapsto \left(-\dfrac{x^2}{2} - x\right) e^x$, les solutions sont donc les fonctions :

$$x \longmapsto \left(-\frac{x^2}{2} - x + \lambda_1\right) e^x + \lambda_2 e^{3x} \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

5. Comme 1 est racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme $x \mapsto (ax^3 + bx^2)\, e^x$ et l'on trouve $x \mapsto \left(\dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^2}{2}\right) e^x$, les solutions sont donc les fonctions :

$$x \longmapsto \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \lambda_1 + \lambda_2 x\right) e^x \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

22

1. Une solution de $y'' - 4y' + 3y = e^x$ est $x \mapsto -\dfrac{x}{2} e^x$ et une solution de $y'' - 4y' + 3y = e^{-x}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{8} e^{-x}$.

   En utilisant le principe de superposition, on obtient la solution particulière $x \mapsto -\dfrac{1}{16} e^{-x} - \dfrac{x}{4} e^x$.

   Les solutions sont donc les fonctions :

$$x \mapsto -\frac{1}{16} e^{-x} - \frac{x}{4} e^x + \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{3x} \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

2. Les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions :

$$x \mapsto \lambda_1 \sin x + \lambda_2 \cos x \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

   On linéarise le second membre :

$$\forall x \in \mathbb{R} \sin^3 x = -\frac{1}{4} \sin 3x + \frac{3}{4} \sin x$$

et l'on utilise le principe de superposition. On est ainsi amené à déterminer une solution f_1 de $y''+y=\sin 3x$ et une solution f_2 de $y''+y=\sin x$.
Comme la fonction $x\mapsto \sin 3x$ est combinaison linéaire des fonctions $x\mapsto e^{3ix}$ et $x\mapsto e^{-3ix}$, et que $\pm 3i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, on peut chercher f_1 comme combinaison linéaire des fonctions $x\mapsto e^{3ix}$ et $x\mapsto e^{-3ix}$, c'est-à-dire sous la forme $x\mapsto a\cos 3x+b\sin 3x$. On trouve :

$$f_1 : x\mapsto -\frac{\sin 3x}{8}\cdot$$

En revanche, comme i et $-i$ sont racines simples de l'équation caractéristique, on cherche la solution f_2 de la forme :

$$x\mapsto a\,x\cos x+c\,x\sin x,$$

ce qui donne $f_2 : x\mapsto -\frac{1}{2}x\cos x$. Les solutions sont donc les fonctions :

$$x\mapsto \frac{\sin 3x}{32}+\left(\lambda_1-\frac{3x}{8}\right)\cos x+\lambda_2\sin x \text{ avec } (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2.$$

3. On a vu, dans l'exercice précédent, que l'équation :

$$y''-4y'+3y=(2x+1)\,e^x$$

admet pour solution particulière $f_1 : x\mapsto \left(-\frac{x^2}{2}-x\right)e^x$ et que l'équation :

$$y''-4y'+3y=(2x+1)\,e^{-x}$$

admet pour solution particulière $f_2 : x\mapsto \left(\frac{x}{4}+\frac{5}{16}\right)e^{-x}$.
On en déduit que l'équation :

$$y''-4\,y'+3\,y=(2x+1)\operatorname{sh}x$$

admet comme solution particulière :

$$f_0 : x\mapsto \frac{1}{2}\big(f_1(x)-f_2(x)\big)=\left(-\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}x\right)e^x-\left(\frac{x}{8}+\frac{5}{32}\right)e^{-x}.$$

Les solutions sont donc les fonctions :

$$x\longmapsto f_0(x)+\lambda_1 e^x+\lambda_2 e^{3x} \text{ avec } (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2.$$

4. On cherche d'abord une solution de $y''-4y'+3y=x\,e^{(1+i)x}$ sous la forme $f_1 : x\mapsto (a\,x+b)\,e^{(1+i)x}$, puisque $1+i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, et l'on trouve :

$$f_1 : x\longmapsto \left(\left(-\frac{1}{5}+\frac{2i}{5}\right)x-\frac{14}{25}-\frac{2i}{25}\right)e^{(1+i)x}$$

ce qui donne comme solution particulière de l'équation donnée :

$$f_0 : x\longmapsto \operatorname{Re}(f_1)(x)=\left(-\frac{x}{5}-\frac{14}{25}\right)e^x\cos x-\left(\frac{2x}{5}-\frac{2}{25}\right)e^x\sin x.$$

Les solutions sont donc les fonctions :

$$x\mapsto f_0(x)+\lambda_1 e^x+\lambda_2 e^{3x} \text{ avec } (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2.$$