

Équations différentielles

exercices



101 Faire ses gammes (1)

Résoudre les équations différentielles suivantes sur des intervalles sur lesquels la fonction en facteur de y' ne s'annule pas :

$$1. (x \ln x) y' - y = -\frac{1}{x}(\ln x + 1)$$

$$2. (1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$$

$$3. (1-x)y' + y = \frac{x-1}{x}$$

$$4. y' + y = \frac{1}{1+e^x}$$

$$5. y' \sin x - y \cos x + 1 = 0$$

$$6. 2xy' + y = x^n, \text{ où } n \text{ est un entier.}$$

102 Faire ses gammes (2)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$(i) y'' + y' - 6y = 1 - 8x - 30x^2$$

$$(ii) y'' + y' = 3 + 2x$$

$$(iii) y'' + 4y = 4 + 2x - 8x^2 - 4x^3$$

$$(iv) y'' + 4y' + 4y = (16x^2 + 16x - 14)e^{2x}$$

$$(v) y'' - 3y' + 2y = (-3x^2 + 10x - 7)e^x$$

$$(vi) y'' - 4y' + 4y = x \operatorname{ch} 2x$$

$$(vii) y'' + 3y' + 2y = e^x$$

$$(viii) y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$$

$$(ix) y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$$

$$(x) y'' + y' - 2y = 8 \sin 2x$$

103 Astucieux !

Résoudre sur $] -1, +\infty[$ l'équation différentielle $(t^2 + 3t + 2)y' + (2t + 3)y = \frac{1}{1+t^2}$.

104 Équation fonctionnelle (1)

Trouver toutes les applications f non nulles et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$(\star) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

Parmi ces applications, déterminer celles qui sont à valeurs réelles.

105 Équation fonctionnelle (2)

Trouver toutes les applications f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$(\star) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x)f(y)$$

106 Champ magnétique

Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique dirigé suivant l'axe Oz est régi

$$\text{par un système différentiel de la forme } \begin{cases} x'' = \omega y' \\ y'' = -\omega x' \\ z'' = 0 \end{cases}$$

où ω est une constante dépendant de la masse et de la charge de la particule ainsi que du champ magnétique. En utilisant la fonction $u = x' + iy'$, résoudre ce système différentiel.

107 Par analyse synthèse

Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

- On cherche l'ensemble des fonctions f définies et continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$(E) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - \int_0^x (x-t)f(t) dt = \varphi(x).$$

Montrer qu'il existe une unique fonction solution.

- Déterminer la fonction f dans le cas où $\varphi = \cos$.

108**Avec un gros second membre**Soit $\varphi : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$f \mapsto f'' - 2f' + 5f$$

Montrer que φ est un endomorphisme et préciser son noyau.

Résoudre

$$y'' - 2y' + 5y = -4e^{-x} \cos x + 7e^{-x} \sin x - 4e^x \sin 2x$$

109**Avec fonction auxiliaire (1)**

On considère l'équation :

$$(E) \quad (1 - x^2)y'' - xy' + y = 0$$

Résoudre cette équation sur $] -1, 1[$ en considérant la fonction $z : t \mapsto y(\sin t)$.**110****Avec fonction auxiliaire (2)**

On considère l'équation :

$$(E) \quad xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$$

Résoudre cette équation sur $]0, +\infty[$ en considérant la fonction $z : x \mapsto xy(x)$.**111****Second ordre avec terme manquant**Résoudre l'équation différentielle suivante sur tout intervalle ne contenant pas -1 :

$$(E) \quad (1+x)^2 y'' + (1+x)y' = 2$$

112**Second ordre à coeffs non constants (2)**Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$. Soit (E) l'équation différentielle

$$ax^2 y'' + bxy' + cy = 0$$

1. Soit
- y
- une fonction deux fois dérivable sur
- $I = \mathbb{R}_+^*$
- .

Montrer que y est solution de (E) sur I si et seulement si la fonction $z : t \mapsto y(e^t)$ est solution d'une équation du second ordre à coefficients constants que l'on donnera.

2. Quelle est la forme des solutions de
- (E)
- sur
- $I = \mathbb{R}_+^*$
- ? sur
- $\mathbb{R}_-^*$
- ?

3. Résoudre sur
- $\mathbb{R}_+^*$
- et
- $\mathbb{R}_-^*$
- l'équation :

$$x^2 y'' - xy' + y = 0$$

113**Une équation fonctionnelle**Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et f une fonction réelle dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$(\star) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(\lambda - x).$$

1. Montrer que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions réelles vérifiant $(\star)$.

114**Second ordre à coeffs non constants**On souhaite résoudre sur $I =]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(H) \quad y'' + \frac{1}{x^2} y = 0$$

Soit $y \in \mathcal{D}^2(I, \mathbb{K})$. On considère $z : t \mapsto y(e^t)$ définie sur $J = \mathbb{R}$.Montrer que y est solution de (H) sur I , si et seulement si, z est solution d'une équation du second ordre à coefficients constants (E) sur J que l'on déterminera.

Conclure.

115 Un exercice retord (qui occupe une heure de colle, dixit ED !)

Soit f une fonction dérivable sur $I =]0, +\infty[$ vérifiant :

$$(\star) \quad \forall x \in I, \quad f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

1. Montrer que la fonction f est deux fois dérivable sur I .
2. Déterminer l'ensemble des fonctions vérifiant $(\star)$.

On sera peut-être amené à utiliser l'exercice précédent.

116 Une preuve du cours

Soit a et b deux scalaires et c une fonction continue de I dans $\mathbb{K}$. Considérons l'équation :

$$(E) \quad y'' + ay' + by = c(x)$$

et r une racine de l'équation caractéristique.

1. Soit y une fonction deux fois dérivable sur I et la fonction z définie sur I par :

$$\begin{aligned} z : I &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto e^{-rx} f(x). \end{aligned}$$

Montrer que la fonction y est solution de l'équation (E) si et seulement si la fonction z' est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

2. En déduire que l'équation (E) admet des solutions.

Équations différentielles

corrigés

1. On se place sur l'intervalle $I =]0, 1[$ ou sur $I =]1, +\infty[$. Sur l'intervalle I , l'équation différentielle se réécrit :

$$y' - \frac{1}{x \ln x} y = -\frac{\ln x + 1}{x^2 \ln x}.$$

Comme

$$\forall x \in I \frac{1}{x \ln x} = \frac{\ln'(x)}{\ln(x)},$$

une solution de l'équation homogène est la fonction $x \mapsto \ln x$.

On cherche une solution de la forme $x \mapsto \lambda(x) \ln x$ avec λ une fonction dérivable sur I . On est alors ramené à trouver une primitive sur I de la fonction $x \mapsto -\frac{\ln x + 1}{x^2 \ln^2 x}$.

On remarque que :

$$\forall x \in I \frac{\ln x + 1}{x^2 \ln^2 x} = \frac{u'(x)}{u^2(x)}$$

où u est la fonction $x \mapsto x \ln x$.

Par conséquent, une primitive sur I de la fonction $x \mapsto -\frac{\ln x + 1}{x^2 \ln^2 x}$ est $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$.

Les solutions sur I sont donc les fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{x} + \lambda \ln x \text{ avec } \lambda \in \mathbb{K}$$

On aurait, bien sûr, pu remarquer que la fonction $x \mapsto 1/x$ était une solution particulière.

2. On se place sur l'intervalle $I =]-1, +\infty[$. Sur l'intervalle I , l'équation différentielle se réécrit :

$$y' + \frac{1}{1+x} y = \frac{1 + \ln(1+x)}{1+x} = \frac{1}{1+x} + \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

Une solution de l'équation homogène est la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ et la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est une solution particulière. Les solutions sur I sont donc les fonctions :

$$x \mapsto \ln(1+x) + \frac{\lambda}{1+x} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{K}$$

3. On se place sur l'intervalle $I = \mathbb{R}^*$, sur $I =]0, 1[$ ou sur $I =]1, +\infty[$. Sur l'intervalle I , l'équation différentielle se réécrit :

$$y' + \frac{1}{1-x} y = -\frac{1}{x}.$$

Une solution de l'équation homogène est la fonction $x \mapsto x - 1$. On cherche une solution de la forme $x \mapsto \lambda(x)(x - 1)$ avec λ une fonction dérivable sur I . On est alors ramené à trouver une primitive sur I de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x(1-x)}$.

On écrit :

$$\forall x \in I \frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}.$$

Par suite, une solution particulière sur I est donnée par :

$$x \mapsto (x-1) \ln \left| \frac{x}{x-1} \right|.$$

Les solutions sur I sont donc les fonctions :

$$x \mapsto \left(\ln \left| \frac{x}{x-1} \right| + \lambda \right) (x-1) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{K}$$

4. Une solution de l'équation homogène est la fonction $x \mapsto e^{-x}$. On cherche une solution de la forme $x \mapsto \lambda(x)e^{-x}$ avec λ une fonction dérivable sur I . On est alors ramené à trouver une primitive sur I de la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x}$.

On remarque que :

$$\forall x \in I \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

où u est la fonction $x \mapsto 1 + e^x$. Par conséquent, une primitive sur I de la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x}$ est donnée par $x \mapsto \ln(1 + e^x)$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions $x \mapsto e^{-x} \ln(1 + e^x) + \lambda e^{-x}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

5. On se place sur un intervalle $I_n =]n\pi, (n+1)\pi[$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Une solution de l'équation homogène est la fonction $x \mapsto \sin x$. On remarque d'autre part que la fonction $x \mapsto \cos x$ est une solution particulière de l'équation. Les solutions sur I_n sont donc les fonctions $x \mapsto \cos x + \lambda \sin x$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
6. On se place sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $I = \mathbb{R}_-^*$. Une solution de l'équation homogène est donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{|x|}}$.

En cherchant une solution particulière sous la forme $x \mapsto \frac{\lambda(x)}{\sqrt{|x|}}$ avec λ une fonction dérivable

sur I , on obtient la solution $x \mapsto \frac{x^n}{2n+1}$. Les solutions sur I sont donc les fonctions :

$$x \mapsto \frac{x^n}{2n+1} + \frac{\lambda}{\sqrt{|x|}} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{K}.$$

1. L'équation caractéristique est $r^2 + r - 6 = 0$ qui a deux racines 2 et -3 donc les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions $x \mapsto \lambda_1 e^{2x} + \lambda_2 e^{-3x}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. On cherche une solution particulière polynomiale et on trouve $x \mapsto 2 + 3x + 5x^2$ donc les solutions sont les fonctions :

$$x \mapsto 2 + 3x + 5x^2 + \lambda_1 e^{2x} + \lambda_2 e^{-3x} \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

2. L'équation caractéristique est $r^2 + r = 0$ qui a deux racines 0 et -1 donc les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions $x \mapsto \lambda_1 + \lambda_2 e^{-x}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. On cherche une solution particulière polynomiale et l'on trouve $x \mapsto x + x^2 + 5x^2$ donc les solutions sont les fonctions :

$$x \mapsto x + x^2 + \lambda_1 + \lambda_2 e^{-x} \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

3. L'équation caractéristique est $r^2 + 4 = 0$ qui a deux racines $2i$ et $-2i$ donc les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions $x \mapsto \lambda_1 \cos(2x) + \lambda_2 \sin(2x)$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 3. On trouve la fonction $x \mapsto 2 + 2x - 2x^2 - x^3$. Les solutions réelles sont donc les fonctions :

$$x \mapsto 2 + 2x - 2x^2 - x^3 + \lambda_1 \cos(2x) + \lambda_2 \sin(2x) \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

4. L'équation caractéristique est $r^2 + 4r + 4 = 0$ qui a une racine double -2 donc les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions $x \mapsto \lambda_1 e^{-2x} + \lambda_2 x e^{-2x}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. On cherche une solution particulière sous la forme $f : x \mapsto P(x)e^{2x}$ avec P polynomial. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} f''(x) + 4f'(x) + 4f(x) = (P''(x) + 8P'(x) + 16P(x)) e^{2x}$$

Comme on veut avoir :

$$\forall x \in \mathbb{R} P''(x) + 8P'(x) + 16P(x) = 16x^2 + 16x - 14,$$

on cherche une solution de degré deux sous la forme $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$. On obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} P''(x) + 8P'(x) + 16P(x) = 16ax^2 + (16b + 16a)x + 16c + 8b + 2a,$$

donc $P : x \mapsto x^2 - 1$ est solution. Les solutions sont les fonctions :

$$x \mapsto (x^2 - 1)e^{2x} + \lambda_1 e^{-2x} + \lambda_2 x e^{-2x} \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

5. L'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$ qui a deux racines 1 et 2 donc les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions $x \mapsto \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. On cherche une solution particulière sous la forme $f : x \mapsto P(x)e^x$ avec P polynomial. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = (P''(x) - P'(x)) e^x$$

Comme on veut avoir :

$$\forall x \in \mathbb{R} P''(x) - P'(x) = -3x^2 + 10x - 7,$$

on cherche une solution de degré 3 sous la forme $P : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$. On obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} P''(x) - P'(x) = -3ax^2 + (6a - 2b)x + 2b - c,$$

donc $P : x \mapsto x^3 - 2x^2 + 3x$ est solution. Les solutions sont les fonctions :

$$x \mapsto (x^3 - 2x^2 + 3x)e^x + \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x} \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

6. L'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 4 = 0$ qui a une racine double 2 donc les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions $x \mapsto \lambda_1 e^{2x} + \lambda_2 x e^{2x}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. On cherche une solution particulière de $y'' - 4y' + 4y = \frac{x}{2} e^{2x}$ sous la forme $f : x \mapsto P(x)e^{2x}$ avec P polynomial. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = P''(x)e^{2x}$$

Comme on veut avoir :

$$\forall x \in \mathbb{R} P''(x) = x/2,$$

il suffit de prendre $P : x \mapsto x^3/12$. On trouve de même qu'une solution de $y'' - 4y' + 4y = \frac{x}{2}e^{-2x}$ est $x \mapsto \frac{xe^{-2x}}{32} + \frac{e^{-2x}}{64}$ puis l'on applique le principe de superposition des solutions. Les solutions sont les fonctions :

$$x \mapsto \frac{x^3 e^{2x}}{12} + \frac{x e^{-2x}}{32} + \frac{e^{-2x}}{64} + (\lambda_1 + \lambda_2 x) e^{2x} \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

7. L'équation caractéristique est $r^2 + 3r + 2 = 0$ qui a deux racines -2 et -1 donc les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions $x \mapsto \lambda_1 e^{-2x} + \lambda_2 e^{-x}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. On cherche une solution particulière sous la forme $x \mapsto C e^x$ et l'on trouve $x \mapsto \frac{1}{6} e^x$ donc les solutions sont les fonctions :

$$x \mapsto \frac{1}{6} e^x + \lambda_1 e^{-2x} + \lambda_2 e^{-x} \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

8. L'équation caractéristique est $r^2 + 3r + 2 = 0$ qui a deux racines -2 et -1 donc les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions $x \mapsto \lambda_1 e^{-2x} + \lambda_2 e^{-x}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. On cherche une solution particulière sous la forme $x \mapsto C x e^{-x}$ et l'on trouve $x \mapsto x e^{-x}$ donc les solutions sont les fonctions :

$$x \mapsto x e^{-x} + \lambda_1 e^{-2x} + \lambda_2 e^{-x} \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

9. L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = 0$ qui a une racine double -1 donc les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions $x \mapsto \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 x e^{-x}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. On cherche une solution particulière sous la forme $x \mapsto C x^2 e^{-x}$ et l'on trouve $x \mapsto x^2 e^{-x}$ donc les solutions sont les fonctions :

$$x \mapsto x^2 e^{-x} + \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 x e^{-x} \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

10. L'équation caractéristique est $r^2 + r - 2 = 0$ dont les racines sont 1 et -2 donc les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions $x \mapsto \lambda_1 e^{-2x} + \lambda_2 e^{-x}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. On cherche une solution particulière de l'équation sous la forme $x \mapsto \lambda \sin(2x) + \mu \cos(2x)$ et l'on trouve $x \mapsto -\frac{6}{5} \sin 2x - \frac{2}{5} \cos 2x$ donc les solutions sont les fonctions :

$$x \mapsto \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{-2x} - \frac{6}{5} \sin 2x - \frac{2}{5} \cos 2x \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

Raisonnons par analyse synthèse.

— Soit f une fonction non nulle deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant (*).

On a alors : $f(0) = f(0)^2$.

— Si $f(0) = 0$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} 2f(x) = 2f(0)f(x) = 0$$

donc f est la fonction nulle ce qui est exclu.

— Donc, $f(0) = 1$. On en déduit que :

$$\forall y \in \mathbb{R} f(y) + f(-y) = 2f(y)$$

c'est-à-dire que la fonction f est paire.

— En fixant y et en dérivant par rapport à x , on obtient :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 f'(x+y) + f'(x-y) = 2f'(x)f(y)$$

puis en redérivant, on a :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 f''(x+y) + f''(x-y) = 2f''(x)f(y). \quad (1)$$

— En fixant x et en dérivant deux fois par rapport à y , on obtient :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''(y). \quad (2)$$

Des relations (1) et (2), on obtient :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 f''(x)f(y) = f(x)f''(y).$$

En particulier, en prenant $y = 0$, comme $f(0) = 1$, on en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R} f''(x) = f''(0)f(x).$$

— Soit $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\omega^2 = f''(0)$. Alors, comme f' est impaire, f est l'unique solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'' - \omega^2 y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Par suite, on a $f : x \mapsto \frac{e^{\omega x} + e^{-\omega x}}{2}$.

— Réciproquement, pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, la fonction $x \mapsto \frac{e^{\omega x} + e^{-\omega x}}{2}$ vérifie (*).

Les solutions sont donc les fonctions :

$$x \mapsto \frac{e^{\omega x} + e^{-\omega x}}{2} \text{ avec } \omega \in \mathbb{C}.$$

Soit $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. La fonction $f : x \mapsto e^{(A+iB)x} + e^{-(A+iB)x}$ est à valeurs réelles si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R} e^{Ax} \sin(Bx) - e^{-Ax} \sin(Bx) = \sin(Bx) 2 \operatorname{sh}(Ax) = 0.$$

Si B est nul, alors la fonction f est à valeurs réelles ; sinon, en considérant le réel $\frac{\pi}{2B}$, on obtient que la fonction f est à valeurs réelles si et seulement si A est nul.

Les solutions réelles sont donc les fonctions :

$$x \mapsto \cos \omega x \quad \text{et} \quad x \mapsto \operatorname{ch} \omega x \text{ avec } \omega \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de l'équation $z'' = 0$ sont les fonctions affines (on peut ou bien se rappeler d'un résultat du chapitre Dérivation, ou bien appliquer le cours sur les EDL d'ordre 2).

Soit $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions deux fois dérivables.

Notons f la fonction $x + iy$, ainsi que $u = f' = x' + iy'$.

On a les équivalences :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} x'' = \omega y' \\ y'' = -\omega x' \end{cases} &\iff x'' + iy'' = -i\omega(x' + iy') \\
 &\iff f'' = -i\omega f' \\
 &\iff u' + i\omega u = 0 \\
 &\iff u \in \text{Vect}_{\mathbb{C}}(t \mapsto e^{-i\omega t}) \\
 &\iff \exists \lambda \in \mathbb{C}, u : t \mapsto \lambda e^{-i\omega t} \\
 &\iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, u : t \mapsto (\alpha + i\beta)(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)) \\
 &\iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \begin{cases} x' : t \mapsto \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t) \\ y' : t \mapsto -\alpha \sin(\omega t) + \beta \cos(\omega t) \end{cases} \\
 &\iff \exists \alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}, \begin{cases} x : t \mapsto \frac{\alpha}{\omega} \sin(\omega t) - \frac{\beta}{\omega} \cos(\omega t) + a \\ y : t \mapsto \frac{\alpha}{\omega} \cos(\omega t) + \frac{\beta}{\omega} \sin(\omega t) + b \end{cases}
 \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{cases} x'' = \omega y' \\ y'' = -\omega x' \\ z'' = 0 \end{cases} \iff \exists \alpha, \beta, a, b, c, d \in \mathbb{R}, \begin{cases} x : t \mapsto \frac{\alpha}{\omega} \sin(\omega t) - \frac{\beta}{\omega} \cos(\omega t) + a \\ y : t \mapsto \frac{\alpha}{\omega} \cos(\omega t) + \frac{\beta}{\omega} \sin(\omega t) + b \\ z : t \mapsto ct + d \end{cases}$$

1. Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse.

Soit f une fonction continue vérifiant (E). On a alors

$$f : x \mapsto x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt + \varphi(x)$$

En tant que somme de trois fonctions dérivables (théorème fondamental de l'Analyse et régularité de φ), la fonction f est dérivable et on a

$$f' : x \mapsto \int_0^x f(t) dt + x f(x) - x f(x) + \varphi'(x) = \int_0^x f(t) dt + \varphi'(x)$$

Cette fonction est dérivable (toujours théorème fondamental de l'Analyse et régularité de φ) :

$$f'' : x \mapsto f(x) + \varphi''(x).$$

Ainsi, f est solution de l'équation différentielle $y'' - y = \varphi''$.

De plus, $f(0) = \varphi(0)$ et $f'(0) = \varphi'(0)$.

Ainsi, f est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y = \varphi'' \\ y(0) = \varphi(0) \\ y'(0) = \varphi'(0) \end{cases}$$

Synthèse. Soit f l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y = \varphi'' \\ y(0) = \varphi(0) \\ y'(0) = \varphi'(0) \end{cases}$$

Comme f est solution de ce problème de Cauchy, f est deux fois dérivable, et la phase d'Analyse montre que $h : x \mapsto \int_0^x (x-t)f(t)dt + \varphi(x)$ satisfait ce même problème de Cauchy (en effet, f étant deux fois dérivable, on peut reprendre les calculs de l'Analyse).

Par unicité des solutions à un problème de Cauchy, on a $f = h$.

Bilan. Il existe une unique solution à ce problème, à savoir l'unique fonction au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y = \varphi'' \\ y(0) = \varphi(0) \\ y'(0) = \varphi'(0) \end{cases}$$

2. D'après la question précédente, il s'agit de résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y = -\cos x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Étudions l'équation différentielle $y'' - y = -\cos x$.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène est :

$$\mathcal{S}_H = \text{Vect}(x \mapsto e^x, x \mapsto e^{-x})$$

Une solution particulière est la fonction $x \mapsto \frac{1}{2} \cos x$. D'où

$$\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x} + \frac{1}{2} \cos x \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K} \right\}$$

Pour déterminer l'unique solution du problème de Cauchy, on cherche λ, μ vérifiant les conditions initiales. On trouve que

$$x \mapsto \frac{1}{4} (e^x + e^{-x}) + \frac{1}{2} \cos x = \frac{1}{2} (\cosh x + \cos x).$$

est l'unique solution du problème de Cauchy.

L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 5 = 0$ dont les solutions sont $1 - 2i$ et $1 + 2i$ donc les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions $x \mapsto (\lambda_1 \cos(2x) + \lambda_2 \sin(2x)) e^{-x}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$.

On cherche une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + 5y = -4e^{-x} \cos x + 7e^{-x} \sin x$$

sous la forme $x \mapsto \alpha e^{-x} \sin x + \beta e^{-x} \cos x$ et on trouve la fonction $f_1 : x \mapsto e^{-x} \sin x$. On cherche une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + 5y = -4e^{(1+2i)x}$$

sous la forme $x \mapsto P(x)e^{(1+2i)x}$ et on trouve $x \mapsto -ixe^{(1+2i)x}$. Ainsi, $f_2 : x \mapsto xe^x \cos 2x$ est solution de $y'' - 2y' + 5y = -4e^x \sin(2x)$ puis les solutions sont les fonctions :

$$x \mapsto f_1(x) + f_2(x) + \lambda_1 e^x \cos(2x) + \lambda_2 e^x \sin(2x) \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

On note $I =]-1, 1[$.

Soit $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ deux fois dérivable sur I , quelconque pour l'instant.

Posons $z : J =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{K}$
 $t \mapsto y(\sin t)$.

Cette fonction $z : J \rightarrow \mathbb{K}$ est deux fois dérivable sur J , par composition.

Renversons la vapeur ! La fonction y s'exprime en fonction de z via $y : x \mapsto z(\operatorname{Arcsin} x)$.

Et on a

$$\begin{cases} y' : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} z'(\operatorname{Arcsin} x) \\ y'' : x \mapsto \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} z'(\operatorname{Arcsin} x) + \frac{1}{1-x^2} z''(\operatorname{Arcsin} x) \end{cases}$$

On a donc les équivalences :

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E) &\iff \forall x \in I, (1-x^2)y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0 \\ &\iff \forall x \in I, z''(\operatorname{Arcsin} x) + \frac{x}{(1-x^2)^{1/2}} z'(\operatorname{Arcsin} x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} z'(\operatorname{Arcsin} x) + z(\operatorname{Arcsin} x) = 0 \\ &\iff \forall x \in I, z''(\operatorname{Arcsin} x) + z(\operatorname{Arcsin} x) = 0 \\ &\iff \forall t \in J, z''(t) + z(t) = 0 \quad \text{car } \operatorname{Arcsin} \text{ est une surjection de } I \text{ sur } J \\ &\iff z \in \operatorname{Vect}(t \mapsto \cos t, t \mapsto \sin t) \\ &\iff y \in \operatorname{Vect}\left(x \mapsto \underbrace{\cos(\operatorname{Arcsin} x)}_{\sqrt{1-x^2}}, x \mapsto \underbrace{\sin(\operatorname{Arcsin} x)}_x\right) \end{aligned}$$

BILAN. L'ensemble des solutions de (E) est

$$\mathcal{S} = \operatorname{Vect}\left(x \mapsto \sqrt{1-x^2}, x \mapsto x\right)$$

On pose $I = \mathbb{R}_+^*$.

Soit $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable.

Posons $z : x \mapsto xy(x)$ qui est définie sur I et deux fois dérivable.

Renversons la vapeur ! On a $y : x \mapsto \frac{1}{x}z(x)$.

On a

$$y' : x \mapsto \frac{z'(x)}{x} - \frac{z(x)}{x^2} \quad \text{et} \quad y'' : x \mapsto \frac{1}{x}z''(x) - 2\frac{1}{x^2}z'(x) + 2\frac{1}{x^3}z(x)$$

On a les équivalences :

$$y \text{ solution de } (E) \iff \forall x \in I, xy''(x) + 2(x+1)y'(x) + (x+2)y(x) = 0$$

$$\iff \forall x \in I, z''(x) + 2z'(x) + z(x) = 0$$

$$\iff z \in \text{Vect}(x \mapsto e^{-x}, x \mapsto xe^{-x})$$

$$\iff y \in \text{Vect}\left(x \mapsto \frac{1}{x}e^{-x}, x \mapsto e^{-x}\right)$$

BILAN. L'ensemble des solutions de (E) est

$$\mathcal{S} = \text{Vect}\left(x \mapsto \frac{1}{x}e^{-x}, x \mapsto e^{-x}\right)$$

On se place sur un intervalle I ne contenant pas -1 , c'est-à-dire $I =]-\infty, -1[$ ou $I =]-1, +\infty[$.
 On va essayer de traiter le problème de la manière la plus homogène/uniforme possible pour que l'on puisse passer d'un intervalle à un autre sans trop de modification.
 Soit $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction deux fois dérivable.
 On a l'équivalence

$$y \text{ solution de } (E) \text{ sur } I \iff y' \text{ solution de } (E') \text{ sur } I$$

$$\text{où } (E') \text{ est l'équation } z' + \frac{1}{1+x}z = \frac{2}{(1+x)^2}.$$

Résolution de (E') .

Une primitive de $a : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est $A : x \mapsto \ln|1+x|$.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène (E'_H) est

$$\mathcal{S}'_H = \text{Vect}\left(x \mapsto \frac{1}{|1+x|}\right)$$

qui est encore égal à (WHY)

$$\mathcal{S}'_H = \text{Vect}\left(x \mapsto \frac{1}{1+x}\right)$$

Remarque générale.

Sur $]-\infty, 0[$ ou sur $]0, +\infty[$, on a $\text{Vect}\left(x \mapsto \frac{1}{|x|}\right) = \text{Vect}\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)$.

Mais il n'est pas vrai que sur $\mathbb{R}$, on a ~~$\text{Vect}(x \mapsto |x|) = \text{Vect}(x \mapsto x)$~~ .

Par la méthode de variation de la constante, on trouve qu'une solution particulière de (E') est

$$f_P : x \mapsto 2 \frac{\ln|1+x|}{1+x}$$

Attention. Je ne donne pas tous les détails, mais il y a une petite subtilité (merci à Martin Mancheron, promo 2024).

En cherchant une solution particulière de la forme $f_P : x \mapsto \lambda(x)e^{-A(x)}$ avec λ dérivable, on tombe sur le fait que λ est une primitive de $x \mapsto \frac{2}{|1+x|}$.

Attention, λ n'est pas du type $2 \ln|1+x|$. Cela dépend de l'intervalle.

On peut prendre $\lambda : x \mapsto 2 \ln|1+x|$ sur $] -1, +\infty[$ et $\lambda : x \mapsto -2 \ln|1+x|$ sur $]-\infty, -1[$.

On revient ensuite à f_P qui vaut $x \mapsto \lambda(x)e^{-A(x)}$ et on trouve

$$f_P : x \mapsto \begin{cases} 2 \ln|1+x| \frac{1}{|1+x|} & \text{si } x \in]-1, +\infty[\\ -2 \ln|1+x| \frac{1}{|1+x|} & \text{si } x \in]-\infty, -1[\end{cases}$$

D'où une solution uniforme (qui ne dépend pas de l'intervalle) :

$$f_P : x \mapsto 2 \ln|1+x| \frac{1}{1+x}$$

L'ensemble des solutions de l'équation (E') est $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'_H + f_P$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{S}' = \left\{ x \mapsto \alpha \frac{1}{1+x} + \frac{2 \ln|1+x|}{1+x}, \alpha \in \mathbb{K} \right\}$$

BILAN. L'ensemble des solutions de (E) est :

$$\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto \alpha \ln|1+x| + (\ln|1+x|)^2 + \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{K} \right\}$$

1. Soit y une fonction deux fois dérivable sur I .

On définit la fonction z sur $\mathbb{R}$ par $z : t \mapsto y(e^t)$. On a alors :

$$\forall x \in I, y(x) = z(\ln x).$$

La fonction z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a :

$$\forall x \in I, y'(x) = \frac{1}{x} z'(\ln x) \text{ et } y''(x) = \frac{1}{x^2} z''(\ln x) - \frac{1}{x^2} z'(\ln x).$$

Ainsi, la fonction y est solution de l'équation différentielle (E) sur I si et seulement si la fonction z est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation du second ordre à coefficients constants :

$$az'' + (b-a)z' + cz = 0. \quad (E')$$

2. On en déduit, suivant les racines de l'équation caractéristique de (E') , la forme des solutions de (E') sur $\mathbb{R}$ et donc de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

— Si l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 , les solutions de (E) sur I sont les fonctions :

$$x \mapsto \lambda_1 x^{r_1} + \lambda_2 x^{r_2} \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

— Si l'équation caractéristique admet une racine double r_0 , les solutions de (E) sur I sont les fonctions :

$$x \mapsto \lambda_1 x^{r_0} + \lambda_2 x^{r_0} \ln x \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

— Si l'équation admet deux racines complexes non réelles conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$, alors les solutions de (E) sur I sont les fonctions :

$$x \mapsto \lambda_1 x^\alpha \cos(\beta \ln x) + \lambda_2 x^\alpha \sin(\beta \ln x) \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

Pour trouver les solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ de (E) , on remarque que la fonction y est solution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ si et seulement si la fonction $z : x \mapsto y(-x)$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation (E) .

3. On applique ce qui précède. Les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions :

$$x \mapsto \lambda_1 x + \lambda_2 x \ln x \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

Les solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions :

$$x \mapsto \lambda_1 x + \lambda_2 x \ln(-x) \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

1. La fonction f étant dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(\lambda - x)$ l'est aussi, par composition. Ainsi, la relation $(\star)$ implique que f' est dérivable, donc f est deux fois dérivable.
2. Raisonnons par analyse synthèse :

— Soit f une fonction vérifiant $(\star)$.

D'après la première question, f est deux fois dérivable, et on a :

$$f'' : x \mapsto -f'(\lambda - x)$$

Comme f est solution de $(\star)$, on a donc $f'' = -f$.

Ainsi, f est solution de l'équation $y'' + y = 0$.

Il existe donc des réels A et ϕ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} f(x) = A \cos(x + \phi).$$

Si $A \neq 0$, alors la condition $(*)$ donne :

$$\forall x \in \mathbb{R} -\sin(x + \phi) = \cos(\lambda - x + \phi)$$

soit :

$$\forall x \in \mathbb{R} \cos(x + \phi + \pi/2) = \cos(\lambda - x + \phi).$$

Par suite, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \begin{cases} x + \phi + \pi/2 \equiv \lambda - x + \phi [2\pi] \\ \text{ou} \\ x + \phi + \pi/2 \equiv -(\lambda - x + \phi) [2\pi] \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R} \begin{cases} 2x \equiv \lambda - \pi/2 [2\pi] \\ \text{ou} \\ 2\phi \equiv -\lambda - \pi/2 [2\pi]. \end{cases}$$

En prenant x tel que $2x \not\equiv \lambda - \pi/2 [2\pi]$, on a donc :

$$\phi \equiv -\frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4} [\pi].$$

Par suite, il existe un entier k tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} f(x) = A \cos\left(x - \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4} + k\pi\right).$$

Si k est pair alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} f(x) = A \cos\left(x - \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

sinon :

$$\forall x \in \mathbb{R} f(x) = -A \cos\left(x - \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Dans tous les cas, il existe un réel C telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} f(x) = C \cos\left(x - \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

— Réciproquement, les fonctions $x \mapsto C \cos\left(x - \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ avec $C \in \mathbb{R}$ vérifient $(*)$ car :

$$\forall x \in \mathbb{R} \cos\left(\lambda - x - \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x - \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(x - \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Les solutions sont donc les fonctions :

$$x \mapsto C \cos\left(x - \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \text{ avec } C \in \mathbb{C}.$$

Soit $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction deux fois dérivable sur $I =]0, +\infty[$.

Posons $z : J = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$.
 $t \mapsto y(e^t)$

La fonction z est deux fois dérivable sur J , par composition.

Renversons la vapeur ! La fonction y s'exprime en fonction de z via $y : x \mapsto z(\ln x)$.

Et on a

$$\begin{cases} y' : x \mapsto \frac{1}{x} z'(\ln x) \\ y'' : x \mapsto \frac{-1}{x^2} z'(\ln x) + \frac{1}{x^2} z''(\ln x) \end{cases}$$

On a donc les équivalences :

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E) &\iff \forall x \in I, y''(x) + \frac{1}{x^2} y(x) = 0 \\ &\iff \forall x \in I, \left(\frac{1}{x^2} z''(\ln x) - \frac{1}{x^2} z'(\ln x) \right) + \frac{1}{x^2} z(\ln x) = 0 \\ &\iff \forall x \in I, z''(\ln x) - z'(\ln x) + z(\ln x) = 0 \\ &\iff \forall t \in J, z''(t) - z'(t) + z(t) = 0 \quad \text{car } \ln \text{ est une surjection de } I \text{ sur } J \\ &\iff z \in \text{Vect} \left(t \mapsto e^{\frac{1}{2}t} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right), t \mapsto e^{\frac{1}{2}t} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \right) \\ &\iff y \in \text{Vect} \left(x \mapsto \sqrt{x} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right), x \mapsto \sqrt{x} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) \right) \end{aligned}$$

BILAN. L'ensemble des solutions de (E) est

$$\mathcal{S} = \text{Vect} \left(x \mapsto \sqrt{x} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right), x \mapsto \sqrt{x} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) \right)$$

1. La fonction f étant dérivable sur I , la fonction $x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ l'est aussi, par composition.
Ainsi, la relation $(\star)$ implique que f' est dérivable, donc f est deux fois dérivable.
2. Raisonnons par analyse synthèse :

Analyse. Soit f une fonction vérifiant $(\star)$.

D'après la première question, f est deux fois dérivable, et on a :

$$f''(x) : x \mapsto -\frac{1}{x^2}f(x).$$

Comme f est solution de $(\star)$, on obtient que f est solution de l'équation différentielle $y'' + \frac{1}{x^2}y = 0$.

D'après l'exercice 114, on obtient :

$$f \in \text{Vect} \left(x \mapsto \sqrt{x} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right), x \mapsto \sqrt{x} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) \right)$$

Donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$f : x \mapsto \lambda \sqrt{x} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) + \mu \sqrt{x} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right)$$

Exploisons que f est solution de $(\star)$ pour obtenir d'éventuelles conditions sur λ et μ .
On a

$$\begin{aligned} f' : x \mapsto & \lambda \left[\frac{1}{2\sqrt{x}} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) + \sqrt{x} \times \frac{-\sqrt{3}}{2} \frac{1}{x} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) \right] \\ & + \mu \left[\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) + \sqrt{x} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{x} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) \right] \\ = & \left(\frac{1}{2}\lambda + \frac{\sqrt{3}}{2}\mu \right) \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda + \frac{1}{2}\mu \right) \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) \end{aligned}$$

et d'autre part, en utilisant le fait que $\ln \left(\frac{1}{x} \right) = -\ln x$ et la parité des fonctions trigonométriques, on a :

$$\forall x \in I, \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = \lambda \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) + (-\mu) \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right)$$

Comme f vérifie $(\star)$, on a

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

En notant

$$\alpha = \frac{1}{2}\lambda + \frac{\sqrt{3}}{2}\mu \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda + \frac{1}{2}\mu$$

et

$$C : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) \quad \text{et} \quad S : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right)$$

l'égalité $(\star)$ s'écrit

$$\forall x \in I, \quad \alpha C(x) + \beta S(x) = \lambda C(x) + (-\mu)S(x)$$

Comme la famille de fonctions (C, S) est libre (preuve à venir, ou plutôt à faire par vos soins), on en déduit

$$\alpha = \lambda \quad \text{et} \quad \beta = -\mu$$

D'où en utilisant les définitions de α et β :

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\lambda + \frac{\sqrt{3}}{2}\mu = 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda + \frac{1}{2}\mu = 0 \end{cases}$$

ce qui est équivalent à $-\lambda + \sqrt{3} \mu = 0$.

Ainsi, si f est solution, f est de la forme

$$f : x \mapsto \mu \left[\sqrt{3} \sqrt{x} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) + \sqrt{x} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) \right] \quad \text{avec } \mu \in \mathbb{R}$$

ou encore de la forme

$$f : x \mapsto \mu \sqrt{x} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x - \frac{\pi}{6} \right) \quad \text{avec } \mu \in \mathbb{R}$$

Synthèse. Soit f une fonction de la forme précédente.

Alors f est dérivable et un calcul montre que f vérifie $(\star)$.

1. La fonction z est deux fois dérivable sur I et vérifie, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} f''(x) + a f'(x) + b f(x) &= (z''(x) + (2r + a) z'(x) + (ar^2 + ar + b)z(x)) e^{rx} \\ &= e^{rx} (z''(x) + (2r + a) z'(x)). \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f est solution de (E) ssi la fonction z' est solution de l'équation différentielle :

$$y' + (2r + a)y = c(x)e^{-rx}. \quad (E')$$

2. D'après l'étude des équations différentielles linéaires d'ordre 1, l'équation (E') possède une solution g qui est dérivable sur I , donc continue sur I ; ce qui assure l'existence d'une primitive G sur I .

La fonction $x \mapsto G(x)e^{rx}$ est alors une solution de l'équation (E)