Des DM

333 Une intégrale, deux suites

Pour tout $a, b > 0$, on pose

$$I(a,b) \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a\cos^2 t + b\sin^2 t)\,\mathrm{d}t$$

On fixe deux réels $a, b > 0$ strictement positifs.

Propriétés de $I(a,b)$

1. Montrer que
$$\forall\, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad a\cos^2 t + b\sin^2 t > 0$$
En déduire que l'intégrale $I(a,b)$ est bien définie.
2. Montrer que $I(a,b) = I(b,a)$.

On déduit de cette question que

$$\forall\, \alpha, \beta > 0, \quad I(\alpha,\beta) = I(\beta,\alpha)$$

3. Montrer que
$$\frac{\pi}{2}\ln\big(\min(a,b)\big) \;\leqslant\; I(a,b) \;\leqslant\; \frac{\pi}{2}\ln\big(\max(a,b)\big)$$
4. Montrer que
$$2I(a,b) \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left[ab\cos^2(2t) + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \sin^2(2t)\right]\mathrm{d}t$$
5. Déduire des questions précédentes que
$$\forall\, \alpha, \beta > 0, \quad 2I(\alpha,\beta) \;=\; I\left(\alpha\beta, \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right)$$

Deux suites imbriquées

On définit deux suites u et v par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = u_n v_n \\ v_{n+1} = \left(\dfrac{u_n + v_n}{2}\right)^2 \end{cases}$$

Une récurrence immédiate montre que ces suites sont à termes strictement positifs.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer une relation entre $I(a,b)$ et $I(u_n, v_n)$.
7. En considérant $w_n = \dfrac{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}}{2}$ et $w'_n = \dfrac{\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}}{2}$, déterminer $\sqrt{u_n}$ et $\sqrt{v_n}$ en fonction de a, b et n.
Pour plus de lisibilité, on pourra poser $\sigma = \dfrac{\sqrt{b} + \sqrt{a}}{2}$ et $\delta = \dfrac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{2}$.
8. Déterminer la limite des suites $\dfrac{\ln u_n}{2^n}$ et $\dfrac{\ln v_n}{2^n}$.

La chute !

9. Déterminer la valeur de $I(a,b)$.

On pourra notamment s'aider de 3 et 8.

334 **La formule de Plouffe** DM

Le 19 Septembre 1995, Simon Plouffe découvre la formule suivante :

$$\text{(BBP)} \qquad \pi = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right)$$

Cette découverte est le fruit d'un mois de recherche informatique avec D. Bailey et P. Borwein.
L'intérêt de cette formule, de démonstration aisée, vient de son utilisation.
Elle permet en effet le calcul isolé des chiffres binaires du nombre π.
Le but de cet exercice est de démontrer cette formule.
On considère l'intégrale I suivante :

$$I = \int_0^1 \frac{t^5+t^4+2t^3-4}{t^8-16}\mathrm{d}t$$

1. Justifier que l'intégrale I est bien définie.
2. (a) Factoriser $X^8 - 16$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis en déduire une factorisation comme un produit de quatre polynômes de degré 2 à coefficients réels.
   Est-ce la factorisation en irréductibles de $\mathbb{R}[X]$?
   (b) Effectuer la division euclidienne de $X^5 + X^4 + 2X^3 - 4$ par $X^2 + 2$.
   Factoriser le polynôme $X^5 + X^4 + 2X^3 - 4$ en un produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
3. Avec le minimum de calculs, justifier que

$$\forall t \in [0,1], \quad \frac{t^5+t^4+2t^3-4}{t^8-16} = \frac{1}{4}\left(\frac{t}{t^2-2} - \frac{t-2}{t^2-2t+2}\right).$$

4. Déterminer les valeurs des intégrales

$$I_1 = \int_0^1 \frac{2x}{x^2-2}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^1 \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad I_3 = \int_0^1 \frac{1}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x.$$

5. Montrer $I = \dfrac{\pi}{16}$.

Pour la fin de l'exercice, on fixe $p \in \mathbb{N}$.

6. Soit $a \in]0,1[$.
   (a) Montrer que pour tout $t \in [0, a[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left|\frac{t^p}{1-t^8} - \sum_{k=0}^{n} t^{8k+p}\right| \leqslant \frac{a^{8(n+1)+p}}{1-a^8}$$

   (b) En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^{8k+p+1}}{8k+p+1} = \int_0^a \frac{t^p}{1-t^8}\mathrm{d}t$$

   On rappelle que la notation $\lim\limits_{n\to+\infty}$ signifie que la limite existe et vaut...

7. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{16^k(8k+p+1)} = \int_0^1 \frac{16\,x^p}{16-x^8}\mathrm{d}x$$

8. Démontrer la formule BBP.

1. Par somme de nombres réels positifs, on a
$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad a\cos^2 t + b\sin^2 t \geqslant 0$$
Reste à montrer que pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, la quantité $a\cos^2 t + b\sin^2 t$ n'est pas nulle.
Une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si ces nombres sont nuls, d'où les équivalences :
$$a\cos^2 t + b\sin^2 t = 0 \iff \begin{cases} a\cos^2 t = 0 \\ b\sin^2 t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos t = 0 \\ \sin t = 0 \end{cases}$$
La dernière assertion étant fausse, la première l'est aussi.
On a donc montré que
$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad a\cos^2 t + b\sin^2 t \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad a\cos^2 t + b\sin^2 t \neq 0$$
Ainsi, le logarithme est bien défini.
De plus, la fonction intégrée est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
Donc le réel $I(a, b)$ est bien défini.
2. On a
$$I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a\cos^2 t + b\sin^2 t)\mathrm{d}t$$
Effectuons le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - x$ (la fonction $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$) :
$$I(a, b) = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln\left(a\cos^2(\frac{\pi}{2} - x) + b\sin^2(\frac{\pi}{2} - x)\right)(-1)\mathrm{d}x$$
D'après les formules de trigonométrie, on obtient
$$I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a\sin^2 x + b\cos^2 x)\mathrm{d}x$$
ce qui montre que $I(a, b) = I(b, a)$.
3. Procédons par disjonction de cas.
Cas 1 : $a \leqslant b$
On a alors
$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \underbrace{a\cos^2 t + a\sin^2 t}_{a} \leqslant a\cos^2 t + b\sin^2 t \leqslant \underbrace{b\cos^2 t + b\sin^2 t}_{b}$$
Appliquons la fonction logarithme qui est croissante :
$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \ln a \leqslant \ln(a\cos^2 t + b\sin^2 t) \leqslant \ln b$$
Par croissance de l'intégrale, on obtient
$$\frac{\pi}{2}\ln a \leqslant I(a, b) \leqslant \frac{\pi}{2}\ln b$$
Dans ce cas, on a $\min(a, b) = a$ et $\max(a, b) = b$, d'où
$$\frac{\pi}{2}\ln\big(\min(a, b)\big) \leqslant I(a, b) \leqslant \frac{\pi}{2}\ln\big(\max(a, b)\big)$$
Cas 2 : $b \leqslant a$
D'après le cas 1, on en déduit que
$$\frac{\pi}{2}\ln\big(\min(b, a)\big) \leqslant I(b, a) \leqslant \frac{\pi}{2}\ln\big(\max(b, a)\big)$$
On termine en utilisant le fait que $I(b, a) = I(a, b)$ d'après la question 2, et le fait que $\min(b, a) = \min(a, b)$ et idem pour max.

4. On utilise la question 2, la linéarité de l'intégrale et le fait que la somme de logarithme est le logarithme du produit et on obtient :

$$2I(\alpha,\beta) \;=\; I(\alpha,\beta)+I(\beta,\alpha) \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\Big[(\alpha\cos^2 t+\beta\sin^2 t)(\beta\cos^2 t+\alpha\sin^2 t)\Big]\mathrm{d}t$$

Pour conclure, il suffit de montrer que, pour tout t, on a

$$(\alpha\cos^2 t+\beta\sin^2 t)(\beta\cos^2 t+\alpha\sin^2 t) \;=\; \alpha\beta\cos^2(2t)+\Big(\frac{\alpha+\beta}{2}\Big)^2\sin^2(2t)$$

Cette dernière égalité relève d'un petit exercice de trigonométrie.
Allons-y.
En développant le membre gauche, on tombe sur

$$\alpha\beta(\cos^4 t+\sin^4 t) \;+\; (\alpha^2+\beta^2)\cos^2 t\sin^2 t$$

En ajoutant et soustrayant $2\alpha\beta\cos^2 t\sin^2 t$, on obtient :

$$\alpha\beta(\cos^4 t-2\cos^2 t\sin^2 t+\sin^4 t) \;+\; (\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)\cos^2 t\sin^2 t$$

c'est-à-dire :

$$ab(\cos^2 t-\sin^2 t)^2+(\alpha+\beta)^2\Big(\frac{1}{2}\sin(2t)\Big)^2$$

D'où $\alpha\beta\cos^2(2t)+\Big(\frac{\alpha+\beta}{2}\Big)^2\sin^2(2t)$, ce qui est le membre droit !

5. D'après la question 4, on a :

$$2I(a,b) \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\Big[ab\cos^2(2t)+\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2\sin^2(2t)\Big]\mathrm{d}t$$

Effectuons le changement de variable $x=2t$:

$$2I(a,b) \;=\; \int_0^{\pi} \ln\Big[ab\cos^2 x+\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2\sin^2 x\Big]\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x$$

Multiplions par 2 et utilisons la relation de Chasles, on obtient :

$$4I(a,b) \;=\; \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\Big[ab\cos^2 x+\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2\sin^2 x\Big]\mathrm{d}x}_{=I\left(ab,(\frac{a+b}{2})^2\right)} \;+\; \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln\Big[ab\cos^2 x+\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2\sin^2 x\Big]\mathrm{d}x$$

Prenons l'intégrale de droite et effectuons le changement de variable $x=y-\frac{\pi}{2}$ (la fonction $y\mapsto y-\frac{\pi}{2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$).
On obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln\Big[ab\cos^2 x+\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2\sin^2 x\Big]\mathrm{d}x \;&=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\Big[ab\cos^2\Big(y+\frac{\pi}{2}\Big)+\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2\sin^2\Big(y+\frac{\pi}{2}\Big)\Big]\mathrm{d}y \\
&=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\Big[ab(-\sin y)^2+\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2\cos^2 y\Big]\mathrm{d}y && \text{trigo} \\
&=\; I\Big((\frac{a+b}{2})^2, ab\Big) \\
&=\; I\Big(ab, (\frac{a+b}{2})^2\Big) && \text{d'après 2 avec } \alpha=ab \text{ et } \beta=(\frac{a+b}{2})^2
\end{aligned}$$

6. Soit $n\in\mathbb{N}$. D'après la question 5 avec $\alpha=u_n$ et $\beta=v_n$, on a

$$2I(u_n,v_n)=I(u_{n+1},v_{n+1})$$

Par récurrence, on obtient

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad I(u_n,v_n)=2^n I(a,b)$$

7. On constate que $w_{n+1} = w_n^2$ (idem pour w'_n). Par récurrence, on en déduit

$$(\bigstar) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ w_n = w_0^{2^n} \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ w'_n = {w'_0}^{2^n}$$

Rédigeons la récurrence pour la suite (w_n).

Initialisation. Comme $2^0 = 1$, on a $w_0 = w_0^{2^0}$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $w_n = w_0^{2^n}$.

Montrons que $w_{n+1} = w_0^{2^{n+1}}$.

On a $w_{n+1} = w_n^2$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a donc

$$w_{n+1} \;=\; (w_0^{2^n})^2 \;=\; w_0^{2^n \times 2} \;=\; w_0^{2^{n+1}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Reprenons $(\bigstar)$.

En posant $\sigma = \dfrac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{2}$ qui est w_0 et $\delta = \dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{2}$ qui est w'_0, on a donc :

$$\frac{\sqrt{v_n}+\sqrt{u_n}}{2} \;=\; \sigma^{2^n} \qquad \text{et} \qquad \frac{\sqrt{v_n}-\sqrt{u_n}}{2} \;=\; \delta^{2^n}$$

Par somme et différence, on en déduit

$$\sqrt{v_n} \;=\; \sigma^{2^n} + \delta^{2^n} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{u_n} \;=\; \sigma^{2^n} - \delta^{2^n}$$

d'où

$$\sqrt{v_n} \;=\; \left(\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{2}\right)^{2^n} + \left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{2}\right)^{2^n} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{u_n} \;=\; \left(\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{2}\right)^{2^n} + \left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{2}\right)^{2^n}$$

8. En posant $\sigma = \dfrac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{2}$ et $\delta = \dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{2}$, on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \sqrt{v_n} \;=\; \sigma^{2^n} + \delta^{2^n} \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ \sqrt{u_n} \;=\; \sigma^{2^n} - \delta^{2^n}$$

En forçant la factorisation par σ, on a

$$\sqrt{v_n} \;=\; \sigma^{2^n}\left(1 + \left(\frac{\delta}{\sigma}\right)^{2^n}\right) \qquad \text{et} \qquad \sqrt{u_n} \;=\; \sigma^{2^n}\left(1 - \left(\frac{\delta}{\sigma}\right)^{2^n}\right)$$

En appliquant le log :

$$\frac{1}{2}\ln v_n \;=\; 2^n \ln\sigma \;+\; \ln\left(1 + \left(\frac{\delta}{\sigma}\right)^{2^n}\right)$$

En multipliant par $\dfrac{1}{2^{n-1}}$:

$$\frac{\ln v_n}{2^n} \;=\; 2\ln\sigma \;+\; 2\frac{1}{2^n}\ln\left(1 + \left(\frac{\delta}{\sigma}\right)^{2^n}\right)$$

Comme $\dfrac{\delta}{\sigma} \in\,]-1, 1[$ (cf. ci-dessous), on a $\left(\dfrac{\delta}{\sigma}\right)^{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Justification. Montrons que $\dfrac{\delta}{\sigma} \in\,]-1, 1[$.

Cela équivaut à

$$-1 \leqslant \frac{\delta}{\sigma} \leqslant 1 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad -\sigma \leqslant \delta \leqslant \sigma \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad -\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{2} \;\leqslant\; \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{2} \;\leqslant\; \frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{2}$$

C'est-à-dire encore

$$-(\sqrt{b}+\sqrt{a}) \;\leqslant\; \sqrt{b}-\sqrt{a} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{b}-\sqrt{a} \;\leqslant\; \sqrt{b}+\sqrt{a}$$
$$-\sqrt{b} \;\leqslant\; \sqrt{b} \qquad \text{et} \qquad -\sqrt{a} \;\leqslant\; \sqrt{a}$$

Ce qui est vrai !

De plus, $\dfrac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Par somme de limites, on a donc $\dfrac{\ln v_n}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\ln\sigma$.

De la même façon, on a $\dfrac{\ln u_n}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\ln\sigma$.
D'après 3, on a

$$\frac{\pi}{2}\ln\big(\min(u_n,v_n)\big) \;\leqslant\; \underbrace{I(u_n,v_n)}_{=2^n I(a,b)} \;\leqslant\; \frac{\pi}{2}\ln\big(\max(u_n,v_n)\big)$$

Comme la fonction ln est croissante, on a $\ln\big(\min(u_n,v_n)\big) = \min\big(\ln u_n, \ln v_n\big)$. Idem pour le max.
En divisant par 2^n, on a

$$(\spadesuit) \qquad \frac{\pi}{2}\min\left(\frac{\ln u_n}{2^n}, \frac{\ln v_n}{2^n}\right) \;\leqslant\; I(a,b) \;\leqslant\; \frac{\pi}{2}\max\left(\frac{\ln u_n}{2^n}, \frac{\ln v_n}{2^n}\right)$$

Comme les suites $\left(\dfrac{\ln v_n}{2^n}\right)$ et $\left(\dfrac{\ln u_n}{2^n}\right)$ convergent vers $2\ln\sigma$, on en déduit que le min et le max de ces deux suites convergent également vers $2\ln\sigma$.

Remarque. Tiens, il faut savoir démontrer que

$$\begin{cases} \alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \\ \alpha'_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell' \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \max(\alpha_n,\alpha'_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \max(\ell,\ell')$$

Cela peut se faire en utilisant la formule $\max(x,y) = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$.

Idem pour le min.

Ainsi, dans $(\spadesuit)$, les membres gauche et droit tendent vers $\pi\ln\sigma$.
D'après le théorème des Gendarmes, on obtient que la suite constante $\big(I(a,b)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\pi\ln\sigma$.
Par unicité de la limite, on obtient $I(a,b) = \pi\ln\sigma$.
Bilan :

$$I(a,b) \;=\; \pi\ln\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)$$

1. La fonction intégrée est continue sur $[0,1]$, donc l'intégrale est bien définie.
2. (a) Une racine 8-ème de 16 est $\sqrt{2}$.
   Donc (WHY ?)
   $$X^8 - 16 \;=\; \prod_{\zeta\in\mathbb{U}_8} (X - \sqrt{2}\,\zeta)$$
   Or l'ensemble des racines 8-ème de l'unité est
   $$\mathbb{U}_8 \;=\; \left\{1, \omega, \mathrm{i}, \omega', -1, \overline{\omega'}, -\mathrm{i}, \overline{\omega}\right\} \qquad \text{où } \omega = \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{et } \omega' = \frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$$
   D'où
   $$X^8 - 16 \;=\; \underbrace{(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})}_{X^2-2}\underbrace{(X-\sqrt{2}\mathrm{i})(X+\sqrt{2}\mathrm{i})}_{X^2+2}\underbrace{(X-\sqrt{2}\omega)(X-\sqrt{2}\overline{\omega})}_{X^2-2X+2}\underbrace{(X-\sqrt{2}\omega')(X-\sqrt{2}\overline{\omega'})}_{X^2+2X+2}$$
   Remarque. On a utilisé l'égalité très pratique suivante, où $z \in \mathbb{C}$
   $$(X-z)(X-\overline{z}) \;=\; X^2 - (z+\overline{z})X + z\overline{z} \;=\; X^2 - 2\,\mathrm{Re}(z)X + |z|^2$$
   On en déduit
   $$X^8 - 16 \;=\; (X^2-2)(X^2+2)(X^2-2X+2)(X^2+2X+2)$$
   Cette égalité n'est pas la factorisation en irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, puisque le polynôme X^2-2 est réductible (produit de deux polynômes de degré 1 dans $\mathbb{R}[X]$).

   (b) En posant la division euclidienne, on trouve
   $$X^5 + X^4 + 2X^3 - 4 \;=\; (X^2+2)(X^3+X^2-2)$$
   Le polynôme de degré 3 admet nécessairement une racine réelle. Trouvons-en une ! A l'œil nu, on voit que 1 est racine, donc $X^3 + X^2 - 2 = (X-1)(X^2+\gamma X+2)$, et on trouve $\gamma = 2$.
   La factorisation en un produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ est
   $$X^5 + X^4 + 2X^3 - 4 \;=\; (X^2+2)(X-1)(X^2+2X+2)$$
3. Fixons $t \in [0,1]$. D'après ce qui précède, on a
   $$\frac{t^5+t^4+2t^3-4}{t^8-16} \;=\; \frac{(t^2+2)(t-1)(t^2+2t+2)}{(t^2-2)(t^2+2)(t^2-2t+2)(t^2+2t+2)}$$
   qui après simplification vaut $\dfrac{t-1}{(t^2-2)(t^2-2t+2)}$.
   Pour conclure, il reste à voir pourquoi
   $$\frac{t-1}{(t^2-2)(t^2-2t+2)} \;=\; \frac{1}{4}\left(\frac{t}{t^2-2} - \frac{t-2}{t^2-2t+2}\right).$$
   En considérant la parenthèse du membre droit et en réduisant au même dénominateur, on trouve un numérateur égal à
   $$t(t^2-2t+2) - (t-2)(t^2-2) \quad \text{qui vaut} \quad 4t-4$$
   D'où l'égalité.
4. On trouve facilement une primitive de chaque fonction intégrée. On a donc :
   $$I_1 = \int_0^1 \frac{2x}{x^2-2}\mathrm{d}x \;=\; \Big[\ln|x^2-2|\Big]_0^1 \;=\; -\ln 2$$
   $$I_2 = \int_0^1 \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x \;=\; \Big[\ln|x^2-2x+2|\Big]_0^1 \;=\; -\ln 2$$
   $$I_3 \;=\; \int_0^1 \frac{1}{\underbrace{x^2-2x+2}_{\frac{1}{(x-1)^2+1}}}\,\mathrm{d}x \;=\; \Big[\mathrm{Arctan}(x-1)\Big]_0^1 \;=\; \frac{\pi}{4}$$

5. On a

$$\forall t \in [0,1], \qquad \frac{t^5+t^4+2t^3-4}{t^8-16} \;=\; \frac{1}{4}\Big(\frac{t}{t^2-2} - \frac{t-2}{t^2-2t+2}\Big)$$
$$= \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{2}\frac{2t}{t^2-2} - \frac{1}{2}\frac{2t-2}{t^2-2t+2} + \frac{1}{t^2-2t+2}\Big)$$

D'où
$$I \;=\; \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{2}I_1 - \frac{1}{2}I_2 + I_3\Big)$$

Comme $I_1 = I_2$, on a $I = \dfrac{1}{4}I_3$, d'où
$$I \;=\; \frac{\pi}{16}$$