Intégration

On fixe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$.
On considère le segment $[a, b]$, qui est non trivial (car $a \neq b$).

I. Intégrale des fonctions en escalier

Subdivision

1 **Définition.**

— Une *subdivision* du segment $[a, b]$ est une suite finie $\sigma = (x_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ telle que $a = x_0 < \cdots < x_n = b$.
Les x_k s'appellent les points de la subdivision.

— Le *support* de la subdivision σ, noté $\operatorname{supp}(\sigma)$, est l'ensemble des valeurs prises par la suite, à savoir $\operatorname{supp}(\sigma) = \{x_k \mid k \in [\![0, n]\!]\}$.

— On appelle *pas* de la subdivision σ l'écart maximal entre deux points consécutifs de la subdivision, à savoir $\max\limits_{0 \leqslant k < n} (x_{k+1} - x_k)$.

- **Subdivision régulière.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La suite finie $\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une subdivision de $[a, b]$.
Elle est dite *régulière* (la différence entre deux termes consécutifs est constante) et son pas est $\frac{b-a}{n}$.

- **Subdivision associée à une partie.**
Soit X une partie finie du segment $[a, b]$ contenant a et b.
Alors il existe une unique subdivision dont X est le support (il suffit d'ordonner les éléments de X).
Cette subdivision est la *subdivision associée* à la partie X.

2 **Définition.** Soit σ et σ' deux subdivisions de $[a, b]$.

— On dit que σ' est *plus fine* que σ lorsque $\operatorname{supp}(\sigma) \subset \operatorname{supp}(\sigma')$.

— On appelle *union de σ et σ'*, notée $\sigma \vee \sigma'$, la subdivision de support $\operatorname{supp}(\sigma) \cup \operatorname{supp}(\sigma')$.

3 preuve **Proposition.** Soit σ et σ' deux subdivisions de $[a, b]$.
Il existe une subdivision de $[a, b]$ plus fine que les subdivisions σ et σ'.

Fonctions en escalier

4 **Définition.** Soit $f:[a,b]\to\mathbb{K}$.
On dit que la fonction f est *en escalier* lorsqu'il existe une subdivision $\sigma=(x_0,\dots,x_n)$ de $[a,b]$ telle que, pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, la fonction $f_{|]x_k,x_{k+1}[}$ est constante.

Une telle subdivision est dite *adaptée* à f.

- **Notation.** On note $\mathscr{E}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
- **Dessin.** On voit qu'il n'y a aucune contrainte quant aux valeurs de f aux points x_k.
Lorsque $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, voici un dessin :

- **Exemple.** Une fonction constante sur $[a,b]$ est en escalier, et toute subdivision de $[a,b]$ lui est adaptée.
- **Indicatrices.**
  - Soit ξ un point de $[a,b]$. La fonction $\mathbb{1}_{\{\xi\}}$ est en escalier.
  - Soit $\alpha<\beta$ deux points de $[a,b]$. Alors la fonction $\mathbb{1}_{[\alpha,\beta[}$ est en escalier.

- **Exemple typique.**
La fonction partie entière restreinte à $[a,b]$ est en escalier.
Une subdivision associée à cette *fonction* est la subdivision associée à la *partie* ....
- **Contre-exemple typique.**
La fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ définie sur le segment $[0,1]$, notée $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$, n'est pas en escalier.
- **Stabilité par restriction.** La restriction à un segment d'une fonction en escalier est encore en escalier.
- **Module/valeur absolue.** Le module d'une fonction en escalier est en escalier.
- **Aspect borné.** Une fonction en escalier prend un nombre fini de valeurs et est donc bornée.
Que dire de la réciproque ?

5 preuve **Lemme.**

- Soit f une fonction en escalier.
Soit σ une subdivision adaptée à f.
Alors toute subdivision plus fine que σ est adaptée à f.
- Soit f et g deux fonctions en escalier.
Il existe une subdivision adaptée à f et g.

6 preuve **Proposition (opérations).**

- **Linéarité.** Une combinaison linéaire de fonctions en escalier est en escalier.
- **Produit.** Le produit de deux fonctions en escalier est en escalier.

- L'ensemble $\mathscr{E}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$.

7

Définition.
Soit $f \in \mathscr{E}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$ et $\sigma = (x_0,\dots,x_n)$ une subdivision adaptée à f.
Pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, on note μ_k la valeur prise par f sur $]x_k, x_{k+1}[$.
On pose

$$S_\sigma(f) \;=\; \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\mu_k$$

- Le réel μ_k vaut $f(\xi_k)$ où ξ_k est un point quelconque de $]x_k, x_{k+1}[$, par exemple $\xi_k = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$.
- **Dessin.**

8
preuve

Proposition/Définition.
Soit f une fonction en escalier et σ une subdivision adaptée à f.
Le réel $S_\sigma(f)$ ne dépend pas de la subdivision σ choisie.
Ce réel est noté $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ et est appelé *intégrale de la fonction en escalier* f.

- **Fonction constante.** Si f est la fonction constante égale à C, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f =$ ....
- **Remarque importante.**
  Les valeurs prises par f aux points du support de σ n'interviennent pas dans le calcul de $\displaystyle\int_{[a,b]} f$.
- **À retenir.** Si f est nulle sauf en un nombre fini de points, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$.
- **Exemple.** Soit f la restriction de la fonction partie entière à $\left[\frac{1}{3}, \pi\right]$.
  On a vu précédemment que f est une fonction en escalier.
  Comme on vient de définir l'intégrale d'une fonction en escalier, on peut se demander ce que vaut l'intégrale de f.

Propriétés de l'intégrale

9 preuve

Proposition (inégalité triangulaire). Soit $f \in \mathscr{E}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$. Alors $\left|\displaystyle\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \displaystyle\int_{[a,b]} |f|$.

- Le membre droit de l'inégalité ci-dessus est bien défini, WHY ?

10 preuve

Proposition (linéarité). Soit $f, g \in \mathscr{E}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
Alors

$$\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g$$

- **Reformulation.** L'application ......

11 preuve

Proposition (Relation de Chasles).
Soit $f \in \mathscr{E}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$ et $c \in \,]a,b[$.

Alors les fonctions $f_{|[a,c]}$ et $f_{|[c,b]}$ sont en escalier et ....

- Pour alléger les écritures, on pourra par la suite, noter $\displaystyle\int_{[a,c]} f$ à la place de $\displaystyle\int_{[a,c]} f_{|[a,c]}$.

Cas particulier des fonctions réelles

12 preuve

Proposition (Positivité et croissance).
Soit $f, g \in \mathscr{E}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ des fonctions en escaliers **à valeurs réelles**.

— **Positivité.** Si $f \succcurlyeq 0$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geqslant 0$.

— **Croissance.** Si $f \preccurlyeq g$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$.

- **Dessin et interprétation.** Pour une fonction en escalier f réelle *positive*, l'intégrale $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ représente la somme des aires des rectangles délimités par sa courbe représentative.
C'est donc l'aire de la portion du plan contenue entre l'axe Ox et la courbe représentative de f.

  Pour une fonction réelle non nécessairement positive, il en est de même, mais les portions situées en dessous de l'axe Ox sont comptées négativement. On parle de l'*aire algébrique*.

- **Objectif à venir.** Nous allons définir l'intégrale sur un segment $[a,b]$ d'une fonction f « raisonnable ».
Pour une fonction à valeurs réelles, cette intégrale mesure l'aire de la portion du plan contenue entre l'axe Ox et la courbe $\mathscr{C}_f$.
Pour une fonction réelle non nécessairement positive, il s'agira de l'aire algébrique, les portions situées *en dessous* de l'axe Ox étant comptées *négativement*.

II. Fonctions intégrables au sens de Riemann (hors programme)

Ici, les fonctions sont à valeurs réelles.

13 **Définition.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (quelconque).
On note

$$\mathscr{E}_f^- = \left\{\varphi \in \mathscr{E}\big([a,b],\mathbb{R}\big) \mid \varphi \preccurlyeq f\right\} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{E}_f^+ = \left\{\varphi \in \mathscr{E}\big([a,b],\mathbb{R}\big) \mid f \preccurlyeq \varphi\right\}$$

$\mathscr{E}_f^-$ est l'ensemble des fonctions en escalier minorant f — $\mathscr{E}_f^+$ est l'ensemble des fonctions en escalier majorant f

Sous réserve d'existence, on pose

$$\mathbf{I}_f^- = \sup\left\{\int_{[a,b]} \varphi \mid \varphi \in \mathscr{E}_f^-\right\} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{I}_f^+ = \inf\left\{\int_{[a,b]} \varphi \mid \varphi \in \mathscr{E}_f^+\right\}$$

14 **Définition.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (quelconque).
On dit que f est *intégrable* lorsque les réels $\mathbf{I}_f^-$ et $\mathbf{I}_f^+$ existent et sont égaux.
Dans ce cas, leur valeur commune s'appelle *l'intégrale* de f et se note $\displaystyle\int_{[a,b]} f$.

- **Remarque.** Si $\mathscr{E}_f^+$ (resp. $\mathscr{E}_f^-$) est non vide, alors f est majorée (resp. minorée).
- **Condition nécessaire d'intégrabilité.** Si f est intégrable, alors nécessairement f est bornée.
- **Attention.** La réciproque est fausse. La fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ est bornée mais n'est pas intégrable. On peut montrer que $\mathbf{I}_f^- = 0$ et $\mathbf{I}_f^+ = 1$.

15 **Proposition.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée.

— Alors $\mathbf{I}_f^-$ et $\mathbf{I}_f^+$ existent et on a $\mathbf{I}_f^- \leqslant \mathbf{I}_f^+$.

— On a l'équivalence

$$f \text{ intégrable} \iff \forall \varepsilon > 0,\quad \exists (\varphi^-,\varphi^+) \in \mathscr{E}_f^- \times \mathscr{E}_f^+,\quad \int_{[a,b]} (\varphi^+ - \varphi^-) \leqslant \varepsilon$$

16 **Lemme général.**
Soit A^- et A^+ deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $\forall\, a^- \in A^-,\ \forall\, a^+ \in A^+,\ a^- \leqslant a^+$.
Alors $\sup A^-$ et $\inf A^+$ existent et $\sup A^- \leqslant \inf A^+$.
De plus,

$$\sup A^- = \inf A^+ \iff \forall \varepsilon > 0,\quad \exists (a^-,a^+) \in A^- \times A^+,\quad a^+ - a^- \leqslant \varepsilon$$

III. Intégrale des fonctions continues par morceaux

Fonctions continues par morceaux

17 **Définition.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$.
On dit que f est *continue par morceaux* lorsqu'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ de $[a,b]$ telle que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction $f_{|]x_k, x_{k+1}[}$ est continue et prolongeable par continuité sur $[x_k, x_{k+1}]$.

Une telle subdivision est dite *adaptée* à f.

- **Notation.** On note $\mathscr{CM}([a,b],\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur le segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
- **Formulation (bis).** La fonction f est continue par morceaux ...etc ...la restriction $f_{|]x_k, x_{k+1}[}$
  — est continue ;
  — admet des limites finies en x_k et x_{k+1}.
- **Formulation (ter).** La fonction f est continue par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ telle que :
  — la fonction f est continue en tout point de $[a,b] \setminus \operatorname{supp}(\sigma)$;
  — pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, la limite $\lim\limits_{x \to x_k^+} f(x)$ existe et est finie et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la limite $\lim\limits_{x \to x_k^-} f(x)$ existe et est finie.
- **Dessin.** Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

- **Exemple/Contre-exemple.**

$$f : \begin{array}{ccc} [0,5] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant 3 \\ \frac{1}{x-3} & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

- **Exemple.** Toute fonction en escalier est continue par morceaux.
  Évidemment, toute fonction continue est continue par morceaux.
- **Stabilité par restriction.** La restriction d'une fonction continue par morceaux est encore continue par morceaux.
- **Module/valeur absolue.** Le module d'une fonction CPM est CPM.
- **Aspect borné.** Une fonction CPM est bornée.
  Que dire de la réciproque ?
- **Lemme.**
  — Soit f une fonction CPM.
  Soit σ une subdivision adaptée à f.
  Alors toute subdivision plus fine que σ est adaptée à f.
  — Soit f et g deux fonctions CPM.
  Il existe une subdivision adaptée à f et g.

18 preuve **Proposition (opérations).**

— **Linéarité.** Une combinaison linéaire de fonctions CPM est CPM.
— **Produit.** Le produit de deux fonctions CPM est CPM.

- L'ensemble $\mathscr{CM}([a,b],\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$.

Approximation des fonctions CPM

Ici, les fonctions sont à valeurs réelles.

19 **Proposition (Approximation uniforme).** Soit $f \in \mathscr{CM}([a,b],\mathbb{R})$.
Alors, pour tout $\varepsilon' > 0$, il existe $(\varphi^-,\varphi^+) \in \mathscr{E}_f^- \times \mathscr{E}_f^+$ tel que $\varphi^+ - \varphi^- \preccurlyeq \varepsilon'$.

Autrement dit, pour tout $\varepsilon' > 0$, il existe $(\varphi^-,\varphi^+) \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})^2$ tel que

$$\varphi^- \preccurlyeq f \preccurlyeq \varphi^+ \qquad \text{et} \qquad \varphi^+ - \varphi^- \preccurlyeq \varepsilon'$$

- Ce résultat dit que l'on peut approximer une fonction CPM par des fonctions en escalier.
- Nous allons avoir besoin d'une notion hors-programme pour prouver cette proposition (qui est normalement admise dans le programme officiel !)

20 **Définition (hors-programme).** Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

— On dit que f est *continue* sur I lorsque f est continue en tout point a de I, c'est-à-dire lorsque

$$\forall\, a \in I, \quad \forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall\, x \in I, \quad |x-a| \leqslant \delta \implies |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

— On dit que f est *uniformément continue* sur I lorsque

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall\, x, x' \in I, \quad |x-x'| \leqslant \delta \implies |f(x) - f(x')| \leqslant \varepsilon$$

- La différence entre la continuité et la continuité uniforme est l'ordre des quantificateurs.

  Grosso modo, les deux notions reposent sur le fait que si l'on veut un contrôle ε-précis en sortie, il faut un contrôle δ-précis en entrée.

  Pour la continuité, le δ dépend à la fois de ε mais aussi du point a où l'on affirme la continuité :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \forall\, a \in I, \quad \exists \delta_a > 0, \quad \forall\, x \in I, \quad |x-a| \leqslant \delta \implies |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

  Il est possible par exemple que le contrôle demandé en entrée soit de plus en plus exigeant au fur et à mesure que l'on se rapproche d'un point problématique ou de l'infini.

  Les fonctions uniformément continues sont précisément celles pour lesquelles, à ε fixé, un seul δ convient pour tous les points $a \in I$:

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall\, a \in I, \quad \forall\, x \in I, \quad |x-a| \leqslant \delta \implies |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

  Par exemple, la fonction $f : \begin{array}{ccc} [3,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas uniformément continue, car grosso modo, à ε fixé, le δ_a correspondant à un $a \in [3,+\infty[$ devient de plus en plus minuscule à mesure que a augmente, et aucun $\delta > 0$ ne conviendra pour tous les $a \in [3,+\infty[$.

21 **Question.** Montrer qu'une fonction K-lipschitzienne est uniformément continue.
En déduire qu'une fonction dérivable à dérivée bornée est uniformément continue.

22 **Théorème de Heine (hors-programme).**
Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue.

Définition de l'intégrale !

Ici, les fonctions sont à valeurs réelles.

23 **Proposition/Définition.** Soit $f \in \mathscr{CM}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.
Alors f est intégrable.
On peut alors définir *l'intégrale* de f, notée $\displaystyle\int_{[a,b]} f$, comme étant

$$\sup\left\{\int_{[a,b]} \varphi \mid \varphi \in \mathscr{E}_f^-\right\} = \inf\left\{\int_{[a,b]} \varphi \mid \varphi \in \mathscr{E}_f^+\right\}$$

- **Remarque.** On a défini précédemment l'intégrale d'une fonction en escalier. Et maintenant, on vient de définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux.
  Comme une fonction en escalier est continue par morceaux, on est en droit de se demander si les deux définitions coïncident ! Et c'est bien le cas (heureusement !).
- **Résumé.** On vient donc de définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux à valeurs réelles ! C'est le réel
  $$\sup\left\{\int_{[a,b]} \varphi \mid \varphi \in \mathscr{E}_f^-\right\} = \inf\left\{\int_{[a,b]} \varphi \mid \varphi \in \mathscr{E}_f^+\right\}$$
  Hum… Cette définition ne paraît pas très maniable…
  Nous proposons une autre définition qui a l'avantage d'être plus maniable, et a également l'avantage d'avoir du sens pour les fonctions à valeurs complexes.

Autre définition de l'intégrale !

Ici, les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

24 preuve **Proposition (Approximation uniforme (bis)).** Soit $f \in \mathscr{CM}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$.
Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\psi \in \mathscr{E}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$ tel que $|f - \psi| \preccurlyeq \varepsilon$.

- **Typage.** L'inégalité $|f-\psi| \preccurlyeq \varepsilon$ qui porte sur des fonctions est par définition codée par une infinité d'égalités qui portent sur des réels :
  $$\forall x \in [a,b], \quad \big|f(x) - \psi(x)\big| \leqslant \varepsilon$$
  C'est encore équivalent à l'inégalité entre les deux nombres réels :
  $$\sup_{x\in[a,b]} \big|f(x) - \psi(x)\big| \leqslant \varepsilon$$
- **Notation.** Comme vous le verrez l'an prochain, il va être utile d'introduire une notation.
  Pour une fonction $f \in \mathscr{CM}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$, on note :
  $$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$
  C'est **la norme infinie** de f. Cette définition a bien du sens, car on a vu qu'une fonction CPM est bornée (mais n'atteint pas nécessairement ses bornes).
  De plus, en notant $E = \mathscr{CM}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$, on a les trois propriétés suivantes :
  - $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall f \in E, \|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$.
  - $\forall f,g \in E, \|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.
  - $\forall f \in E, \|f\|_\infty = 0 \implies f = 0$
- **Reformulation avec la norme infinie.**

  Soit $f \in \mathscr{CM}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$.
  Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\psi \in \mathscr{E}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$ tel que $\|f-\psi\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

25
preuve

Théorème (définition pratique de l'intégrale). Soit $f \in \mathscr{CM}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$.

— Il existe une suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{E}\big([a,b],\mathbb{K}\big)^{\mathbb{N}}$ telle que $\|f-\psi_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

— Pour une telle suite de fonctions en escalier, la suite de réels $\left(\displaystyle\int_{[a,b]} \psi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et la limite ne dépend pas du choix de la suite de fonctions en escalier.

On peut alors définir *l'intégrale* de f via

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \psi_n$$

où $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est n'importe quelle suite de fonctions en escalier qui converge vers f au sens de la norme infinie.

26

Définition étendue. Soit $f \in \mathscr{CM}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$.
Soit $c,d \in [a,b]$ non nécessairement ordonnés.
On pose

$$\int_c^d f = \begin{cases} \displaystyle\int_{[c,d]} f & \text{si } c<d \\ -\displaystyle\int_{[d,c]} f & \text{si } d<c \\ 0 & \text{si } c=d. \end{cases}$$

- Le réel $\displaystyle\int_c^d f$ se note aussi $\displaystyle\int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t$, notation dans laquelle la lettre t a le statut de variable muette.

27

Définition. Soit $f \in \mathscr{CM}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$. La *valeur moyenne* de f est le nombre $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f$.

- La valeur moyenne est l'unique constante α qui vérifie $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \alpha$.

Propriétés de l'intégrale

Les propriétés fondamentales de l'intégrale des fonctions en escalier s'étendent à l'intégrale des fonctions CPM par passage à la limite. Passons en revue toutes ces propriétés.

28 **Proposition (inégalité triangulaire).** Soit $f \in \mathscr{CM}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$. Alors $\left|\displaystyle\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \displaystyle\int_{[a,b]} |f|$.

- Le membre droit de l'inégalité ci-dessus est bien défini, WHY ?
- **Attention.** Lorsque $c,d \in [a,b]$, la définition de $\displaystyle\int_c^d f$ conduit par disjonction de cas à l'inégalité :

$$\left|\int_c^d f\right| \quad\leqslant\quad \int_{\min(c,d)}^{\max(c,d)} |f|$$

29 preuve **Proposition (linéarité).** Soit $f,g \in \mathscr{CM}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$ et $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$.
Alors

$$\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) \;=\; \lambda \int_{[a,b]} f \;+\; \mu \int_{[a,b]} g$$

- **Reformulation.** L'application ......

- **Surjectivité.**

- ......

30 **Proposition (relation de Chasles.)**
Soit $f \in \mathscr{CM}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$.

— Soit $c \in \,]a,b[$. Alors :

$$\int_{[a,b]} f \;=\; \int_{[a,c]} f \;+\; \int_{[c,b]} f$$

— Soit $x,y,z \in [a,b]$. Alors :

$$\int_x^z f \;=\; \int_x^y f \;+\; \int_y^z f$$

Cas particulier des fonctions réelles

31 preuve

Proposition (Positivité et croissance).
Soit $f, g \in \mathscr{CM}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ des fonctions en escaliers **à valeurs réelles**.

— **Positivité.** Si $f \succcurlyeq 0$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geqslant 0$.

— **Croissance.** Si $f \preccurlyeq g$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$.

- **Attention.** Lorsque f est positive sur $[a,b]$ et si $c \geqslant d$ sont dans $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_c^d f \leqslant 0$.
  On fera donc attention à l'ordre des bornes lors de l'utilisation de ces deux propriétés.
- **En français.**
  L'intégrale-dans-le-bon-sens d'une fonction réelle positive est un réel positif.
  L'intégrale-dans-le-bon-sens conserve les inégalités.
- **Intégration VERSUS Dérivation.**
  De manière vague, la croissance dit que l'on peut « intégrer des inégalités ». Mais attention, il est crucial de s'assurer que les bornes de l'intégrale sont « dans le bon sens » avant d'intégrer une inégalité.
  Il y a là une différence fondamentale entre l'intégration et la dérivation. Il est possible d'intégrer une inégalité mais jamais de la dériver.

$$\text{On a} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R},\ \sin t \leqslant 1 \qquad \text{mais on n'a pas} \qquad \xcancel{\forall\, t \in \mathbb{R},\ \cos t \leqslant 0}$$

  Il n'est pas non plus possible de « désintégrer » une inégalité.

$$\text{On a (WHY?)} \int_{-1}^{1} t\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{-1}^{1} \frac{1}{39}\,\mathrm{d}t \qquad \text{mais on n'a pas} \qquad \xcancel{\forall\, t \in [-1,1],\ t \leqslant \frac{1}{39}}$$

- **Remarque importante.**
  Soit $c, d \in [a,b]$ non nécessairement ordonnés.
  On suppose que K majore le module de f sur $\overset{\curvearrowleft}{[c,d]}$, c'est-à-dire $|f| \preccurlyeq K$.
  D'après l'inégalité triangulaire et par croissance de l'intégrale, on a :

$$\left|\int_c^d f\right| \leqslant K\big|d-c\big|.$$

32 **Question.** Soit $b \in [0,1]$. Montrer que $\displaystyle\int_0^b \frac{(b-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

33
preuve

Théorème (critère de nullité d'une fonction $\boxed{\text{continue}}$). Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.
On a

$$\begin{cases} f \text{ continue} \\ f \text{ positive} \\ \displaystyle\int_{[a,b]} f = 0 \end{cases} \implies f \text{ est nulle sur } [a,b]$$

Une fonction *continue*, positive, d'intégrale nulle est nulle (sur le segment d'intégration).

- **Attention.** Si l'on enlève l'hypothèse de continuité, le théorème est archi faux! Penser à l'indicatrice d'un point.
- **Corollaire (stricte positivité).**
  Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction *continue* et *positive*.
  Si f est non nulle, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f > 0$.
- **Dans la pratique.** Pour $\boxed{a < b}$, on a :

$$\begin{cases} f \text{ continue} \\ \forall\, t \in [a,b],\ f(t) \geqslant 0 \\ \exists\, t_0 \in [a,b],\ f(t_0) \neq 0 \end{cases} \implies \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$$

et

$$\begin{cases} f \text{ et } g \text{ continues} \\ \forall\, t \in [a,b],\ f(t) \leqslant g(t) \\ \exists\, t_0 \in [a,b],\ f(t_0) \neq g(t_0) \end{cases} \implies \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t < \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Symétrie, translation, périodicité

34
preuve

Proposition (parité, imparité).
Soit $a > 0$ et $f : [-a, a] \to \mathbb{K}$ une fonction CPM.

— Si la fonction f est paire, alors :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

— Si la fonction f est impaire, alors :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

35
preuve

Lemme (invariance par translation).
Soit $T \in \mathbb{R}$.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}$.
Pour tout $a < b$, on a :

$$\int_{a+T}^{b+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} f(x+T)\,\mathrm{d}x$$

36

Proposition (périodicité).
Soit $T > 0$.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}$ et T-périodique.
Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{T} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Fonctions à valeurs complexes

37

Proposition. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction CPM. On a alors :

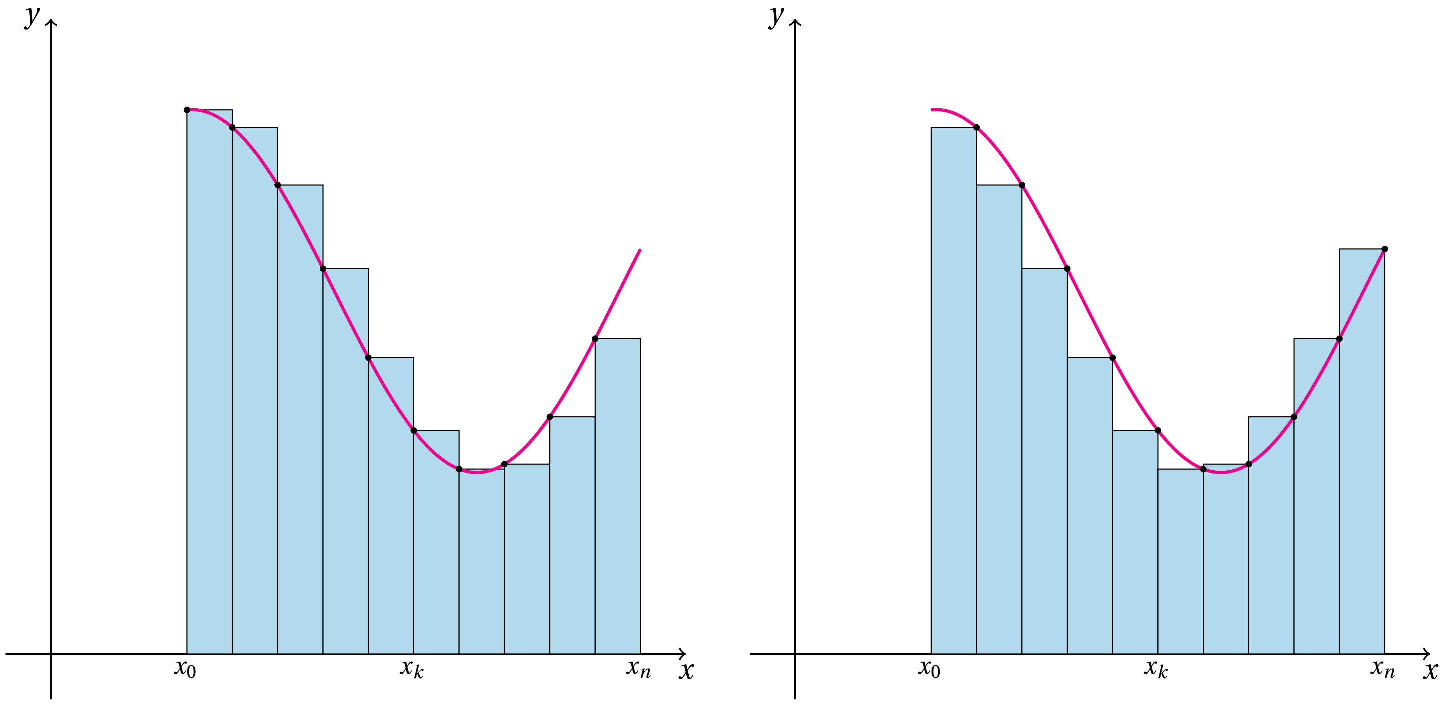
$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mathrm{Re}\, f + \mathrm{i}\int_{[a,b]} \mathrm{Im}\, f \qquad \text{et} \qquad \overline{\int_{[a,b]} f} = \int_{[a,b]} \overline{f}.$$

IV. Sommes de Riemann

Dans ce paragraphe, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

38 **Définition.** Soit $f \in \mathscr{CM}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On appelle *sommes de Riemann (à gauche/à droite) d'ordre n associée à f* les sommes

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) \qquad S'_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right).$$



39 **Proposition (théorème des sommes de Riemann)** Soit $f \in \mathscr{CM}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$.
Les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers $\displaystyle\int_{[a,b]} f$.

- La méthode des rectangles à gauche consiste à approcher l'intégrale par la somme de Riemann S_n pour un certain n.
  L'erreur de la méthode des rectangles est la valeur absolue de la différence entre l'intégrale et l'approximation.
  Elle est en $\mathrm{O}(\frac{1}{n})$ dans le cas où la fonction est lipschitzienne.
- Autrement dit, pour f CPM sur $[a,b]$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a + k\frac{b-a}{n}\Big) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(a + k\frac{b-a}{n}\Big) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

- **Cas particulier** $[0,1]$**.**

40 **Question.** Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}$.

V. Intégration et dérivation

Dans cette partie, I désigne un intervalle non trivial et $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

Existence d'une primitive pour une fonction continue

41 **Théorème fondamental de l'Analyse.** Soit $f : I \to \mathbb{K}$ *continue*. Soit $a \in I$.

— La fonction $\Phi : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ est dérivable sur I, et sa dérivée vaut f.

Donc Φ est UNE *primitive de f.*

— De plus, on a $\Phi(a)=0$.

Donc Φ est LA *primitive de f qui s'annule en a.*

- **Corollaire important.** Une fonction continue sur un intervalle admet des primitives.
- **Pas de réciproque.**
  La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$ admet une primitive mais n'est pas continue !

  En effet, $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$ est dérivable de dérivée f, donc est une primitive de f.

  Remarquons qu'une telle fonction f n'admet pas de limite en 0^+ (ni en 0^- d'ailleurs) donc n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$.
  Pour la culture : on a ici un exemple de fonction « primitivable », mais non intégrable (ce dernier point nécessite une preuve !).
- **Remarque.** Un exemple de fonction intégrable, mais non primitivable est ....

42 **Proposition.** Soit $f : I \to \mathbb{K}$ $\boxed{\text{continue}}$.
On a
$$\forall\, a,b \in I, \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; F(b)-F(a) \quad \text{où } F \text{ est UNE primitive de } f$$

- **Preuve.** La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - F(x) + F(a)$ est dérivable, de dérivée nulle et nulle en a.

  Donc c'est la fonction nulle et en particulier, pour $x=b$, on a donc $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b)-F(a)$.

43 **Corollaire.** Soit $f : I \to \mathbb{K}$ $\boxed{\text{de classe } \mathscr{C}^1}$.
On a
$$\forall\, a,b \in I, \quad f(b)-f(a) \;=\; \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Intégration par parties

44 **Proposition.** Soit $u, v : I \to \mathbb{K}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On a

$$\forall\, a, b \in I, \quad \int_a^b u'(t)\, v(t)\, \mathrm{d}t = \Big[u(t)\, v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)\, v'(t)\, \mathrm{d}t.$$

Changement de variable

45 **Proposition.** Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Soit $\varphi : J \to I$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
Alors :

$$\forall\, \alpha, \beta \in J, \qquad \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\, \mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(s)\, \mathrm{d}s$$

- La fonction φ de l'énoncé n'a pas besoin d'être bijective (même si elle le sera souvent dans nos exemples). On lui demande juste d'être de classe $\mathscr{C}^1$.
- **De G à D.** C'est quand on reconnaît une forme $(f \circ \varphi)\, \varphi'$. C'est en général « bas de gamme », car on peut se passer de la formule.
- **De D à G.** Il vaut avoir une idée géniale : celle d'introduire une bonne fonction φ.

  Puis :

  — on remplace s par $\varphi(t)$

  — on remplace $\mathrm{d}s$ par $\varphi'(t)\mathrm{d}t$.

  — on adapte les bornes

VI. Formules de Taylor globales

Soit $n \in \mathbb{N}$, soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$.

46 **Définition (polynôme de Taylor d'une fonction).**
Soit $f \in \mathscr{D}^n(I, \mathbb{K})$.
Soit $a \in I$ (un point en lequel f est définie).

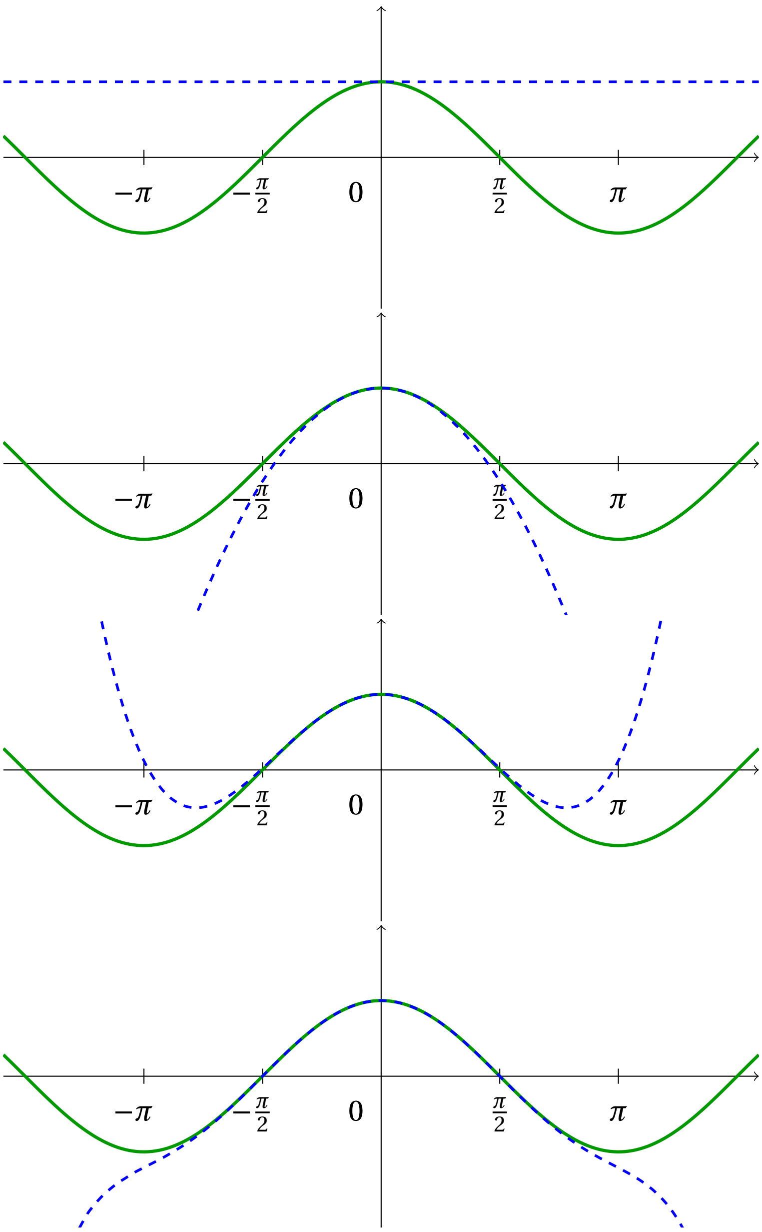
La fonction polynomiale, notée $\mathbb{T}_{n,a,f}$ (par Madame Tête), définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned}\mathbb{T}_{n,a,f} : x \longmapsto\ & f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\end{aligned}$$

est appelée « fonction polynomiale de Taylor de f d'ordre n en a ».

En particulier,

$$\mathbb{T}_{0,a,f} : x \mapsto f(a) \qquad \mathbb{T}_{1,a,f} : x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a) \qquad \mathbb{T}_{2,a,f} : x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$



Formule de Taylor avec reste intégral

47 **Question.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'égalité remarquable suivante :

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \qquad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t$$

48 **Proposition (Formule de Taylor à l'ordre n avec reste intégral).**
Soit $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I,\mathbb{K})$.

— On a

$$\forall a,b \in I, \quad f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b f^{(n+1)}(t) \frac{(b-t)^n}{n!} \mathrm{d}t$$

— Soit $a \in I$. On a :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} \mathrm{d}t$$

- **Autre écriture.** On a

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = \mathbb{T}_{n,a,f}(x) + \mathbb{RI}_{n,a,f}(x)$$

Ainsi, f est égale à une fonction polynomiale + une fonction qui se présente sous la forme d'une intégrale (la variable x est enfouie au sein de l'intégrale et est présente dans la borne du haut de l'intégrale).

- **Remarque.**
Pour écrire la formule à l'ordre n, la fonction est supposée de classe $n+1$.
La première partie $\mathbb{T}_{n,a,f}$ fait intervenir les dérivées $f^{(0)}, \ldots, f^{(n)}$ évaluées en a.
La deuxième partie $\mathbb{RI}_{n,a,f}$ fait intervenir la dérivée $f^{(n+1)}$.

- **Cas particulier.** D'après le chapitre Polynômes, on a

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \quad P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

Ainsi, si f est polynomiale de degré $\leqslant n$, alors f est égale à $\mathbb{T}_{n,a,f}$!
On vérifie que l'on a bien dans ce cas $\mathbb{RI}_{n,a,f} = 0$ (WHY ?).

- **À propos du reste.** Le reste intégral ne se calcule quasiment jamais ! En revanche, on peut le majorer en module (inégalité triangulaire).

- **Un calcul.** On a

$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \mathrm{d}t = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ce calcul est censé vous aider à retenir le reste intégral (car on peut se dire dans sa tête « si $f^{(n+1)}$ est constante, alors le reste doit fournir le terme suivant dans la partie régulière »).

- **Cas particulier $n = 0$.**
Pour $f \in \mathscr{C}^1$, on a (WHY ?)

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) \mathrm{d}t$$

à interpréter comme

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) \frac{(b-t)^0}{0!} \mathrm{d}t$$

- **Cas particulier lorsque** $0 \in I$**.**

$$\forall x \in I, \qquad f(x) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \; + \; \int_0^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} \mathrm{d}t$$

49 **Question.** Soit $x \in [0,1]$. En appliquant la formule de Taylor reste intégral à une fonction bien choisie, montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Inégalité de Taylor-Lagrange

50 **Proposition (Inégalité de Taylor-Lagrange).**
Soit $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$.

— On a

$$\forall\, a, b \in I, \qquad \left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \quad \leqslant \quad K \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

où K est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur $[a,b]$. Par exemple, $K = \max_{t \in [a,b]} |f^{(n+1)}(t)|$.

Nota Bene : $K = K_{n,a,b}$.

— Soit $a \in I$. On a

$$\forall\, x \in I, \qquad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leqslant K \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

où K est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur $[a,x]$. Par exemple, $K = \max_{t \in [a,x]} |f^{(n+1)}(t)|$.

Nota Bene : $K = K_{n,a,x}$.

- **Cas particulier** $0 \in I$**.**

$$\forall\, x \in I, \qquad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leqslant K \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

où K est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur $\overset{\frown}{[0,x]}$. Par exemple, $K = \max_{t \in [0,x]} |f^{(n+1)}(t)|$. NB : $K = K_{n,x}$.

- La formule (2) est du type :

$$\forall\, x \in I, \quad \left| f(x) - \mathbb{T}_{n,a,f}(x) \right| \leqslant K \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{ou encore} \qquad \forall\, x \in I, \quad \left| \mathbb{RI}_{n,a,f}(x) \right| \leqslant K \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ainsi, l'écart entre f et sa fonction polynomiale de Taylor d'ordre n en a (c'est-à-dire le reste intégral d'ordre n en a) est majoré en valeur absolue par une certaine quantité dépendant de $f^{(n+1)}$, de a, de x, de n (et où il n'apparaît que du $n+1$).

- **Cas particulier.** L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $n = 0$ sur $[a,b]$, version (1), s'écrit :

$$|f(b) - \mathbb{T}_{0,a,f}(b)| \leqslant K \frac{|b-a|^{0+1}}{(0+1)!}$$

A quoi cette inégalité vous fait-elle penser ?

- **Cas d'une fonction à valeurs réelles.**
Soit $\boxed{a < b}$ dans I.
On a

$$m \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \leqslant \quad f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \quad \leqslant \quad M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

où m est un minorant de $f^{(n+1)}$ sur $[a,b]$ et M est un majorant de $f^{(n+1)}$ sur $[a,b]$.

Par exemple, $m = \min\limits_{t\in[a,b]} f^{(n+1)}(t)$ et $M = \max\limits_{t\in[a,b]} f^{(n+1)}(t)$.

51 **Question.**

(i) Montrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \left| \sin x - x + \frac{x^3}{6} \right| \leqslant \frac{|x|^5}{5!}$$

(ii) Montrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \left| e^x - 1 - x \right| \leqslant \frac{x^2}{2} e^{|x|}$$

(iii) Montrer que

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+x)^3} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Intégration

preuve et éléments de correction

3

Prendre la subdivision $\sigma \vee \sigma'$.

5

• Soit σ' plus fine que $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$.
Commençons par le cas où σ et σ' diffèrent d'un point.
Considérons une subdivision σ' de $[a,b]$ telle que $\text{supp}\left(\sigma'\right)$ contienne un point c de plus que $\text{supp}(\sigma)$.
Il existe $i \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $c \in \,]x_i, x_{i+1}[$ et on a :

$$\sigma' = (x_0, \dots, x_i, c, x_{i+1}, \dots x_n) = \left(x'_0, \dots, x'_{n+1}\right).$$

En distinguant les cas $\begin{cases} k \in [\![0, i-1]\!] \\ k = i \\ k = i+1 \\ k \in [\![i+2, n]\!] \end{cases}$ on vérifie que la fonction $f_{|]x'_k, x'_{k+1}[}$ est constante.
Donc σ' est adaptée à f.
On démontre alors le résultat par récurrence sur $\text{card}\left(\text{supp}(\sigma')\right) - \text{card}\left(\text{supp}(\sigma)\right)$.

• Soit σ une subdivision adaptée à f, et σ' une subdivision adaptée à g.
Alors la subdivision $\sigma \vee \sigma'$ est adaptée à f et g.

6

Soit $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f et g (il en existe au moins une, cf. le lemme .....).
Alors les fonctions f et g sont constantes sur tout intervalle $]x_i, x_{i+1}[$.
Donc il en est de même de $\lambda f + \mu g$, fg.
Donc $\lambda f + \mu g$ et fg sont en escalier et σ en est une subdivision adaptée.

8

Notons $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$, et α_i la valeur prise par f sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$.

— Considérons d'abord le cas où σ' est obtenue, à partir de σ, par ajout d'un nouveau point c. Ainsi, σ' est de la forme :
$$\sigma' = (x_0, \dots, x_k, c, x_{k+1}, \dots, x_n).$$
Par définition, on a alors :
$$S_{\sigma'}(f) = \sum_{i=0}^{k-1} (x_{i+1} - x_i)\alpha_i + (c - x_k)\alpha_k + (x_{k+1} - c)\alpha_k + \sum_{i=k+1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\alpha_i.$$
En réunissant les deux termes centraux, il vient $S_{\sigma'}(f) = S_\sigma(f)$.

— Ensuite, lorsque σ' est une subdivision plus fine que σ, on démontre le résultat par récurrence sur le nombre de points du support de σ' qui ne sont pas dans le support de σ.

— Enfin, posons $\sigma'' = \sigma \vee \sigma'$.
C'est une subdivision plus fine que σ et plus fine que σ'. D'où
$$S_\sigma(f) = S_{\sigma''}(f) \text{ et } S_{\sigma'}(f) = S_{\sigma''}(f).$$
Ainsi, $S_\sigma(f) = S_{\sigma'}(f)$.

9

Idée. L'inégalité triangulaire pour une somme de réels ou de complexes donne $\left|S_\sigma(f)\right| \leqslant S_\sigma\left(|f|\right)$.

La fonction $|f|$ est en escalier et toute subdivision de $[a,b]$ adaptée à f est adaptée à $|f|$.
En considérant une subdivision $\sigma = (x_0,\dots,x_n)$ adaptée à f et, pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$, un point ξ_i de $]x_i,x_{i+1}[$, l'inégalité triangulaire pour une somme donne :

$$\begin{aligned}\left|\int_{[a,b]} f\right| &= \left|\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\,f(\xi_i)\right|\\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\left|f(\xi_i)\right|\\ &= \int_{[a,b]} |f|.\end{aligned}$$

10

Introduire une subdivision adaptée à f et à g.
Soit $\sigma = (x_0,\dots,x_n)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f et g (donc aussi à $\lambda f+\mu g$) et, pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$, un point ξ_i de $]x_i,x_{i+1}[$. Alors :

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]}(\lambda f+\mu g) &= \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\left(\lambda f(\xi_i)+\mu g(\xi_i)\right)\\ &= \lambda\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\,f(\xi_i)+\mu\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\,g(\xi_i) = \lambda\int_{[a,b]} f+\mu\int_{[a,b]} g.\end{aligned}$$

11

Soit $\sigma = (x_0,\dots,x_n)$ une subdivision adaptée à f et, pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$, un point ξ_i de $]x_i,x_{i+1}[$. Quitte à rajouter c au support de σ, on peut supposer que c fait partie de la subdivision. Posons $k \in [\![1,n-1]\!]$ tel que $c = x_k$. Alors $(x_0,\dots,x_k)$ et $(x_k,\dots,x_n)$ sont des subdivisions de $[a,c]$ et $[c,b]$ adaptées aux restrictions $f_{|[a,c]}$ et $f_{|[c,b]}$. On a ensuite :

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} f &= \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\,f(\xi_i)\\ &= \sum_{i=0}^{k-1}(x_{i+1}-x_i)\,f(\xi_i)+\sum_{i=k}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\,f(\xi_i) = \int_{[a,c]} f+\int_{[c,b]} f.\end{aligned}$$

12

- Soit σ une subdivision adaptée à f. Si $f \geqslant 0$, l'inégalité $S_\sigma\left(f\right) \geqslant 0$ est immédiate.
- Puisque $g-f \geqslant 0$, par linéarité et positivité de l'intégrale $\displaystyle\int_{[a,b]} g-\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]}\left(g-f\right)$ est positif ou nul.

18

Soit $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à f et g.
Alors, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, les restrictions $f_{|]x_k, x_{k+1}[}$ et $g_{|]x_k, x_{k+1}[}$ sont continues et sont prolongeables par continuité sur $[x_k, x_{k+1}]$.
Donc il en est de même de $(\lambda f + \mu g)_{|]x_k, x_{k+1}[}$ et $(fg)_{|]x_k, x_{k+1}[}$.

24

Cas des fonctions continues. Soit ε un réel strictement positif. D'après le théorème de Heine, f est uniformément continue et donc il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $(x, y) \in [a, b]^2$, on ait $\left|f(x) - f(y)\right| \leqslant \varepsilon$ dès que $|x - y| \leqslant \eta$. Fixons un tel η ainsi qu'un entier naturel non nul n tel que $0 < \frac{b-a}{n} \leqslant \eta$. Notons $a_k = a + k\,\frac{b-a}{n}$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ et ϕ la fonction en escalier sur $[a, b]$ définie par :

$$\phi(x) = \begin{cases} f(a_k) & \text{si } x \in [a_k, a_{k+1}[\text{ où } k \in [\![0, n-1]\!]\,; \\ f(b) & \text{si } x = b. \end{cases}$$

Il est clair que $f(b) - \phi(b) = 0$.
Pour tout $x \in [a, b[$, il existe k tel que $x \in [a_k, a_{k+1}[$, et puisque $|x - a_k| \leqslant \frac{b-a}{n} \leqslant \eta$:

$$\left|f(x) - \phi(x)\right| = \left|f(x) - f(a_k)\right| \leqslant \varepsilon.$$

La fonction ϕ répond donc au problème.

Cas des fonctions continues par morceaux Considérons $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f et, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, notons f_i la restriction de la fonction f à $]x_i, x_{i+1}[$ et $\widetilde{f_i}$ le prolongement par continuité sur $[x_i, x_{i+1}]$ de f_i. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la première partie de l'étude, il existe, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, une fonction $\phi_i \in \mathscr{E}([x_i, x_{i+1}], \mathbb{K})$ telle que $|\widetilde{f_i} - \phi_i| \leqslant \varepsilon$. Considérons la fonction ϕ définie sur $[a, b]$ par :

$$\phi(x) = \begin{cases} \phi_k(x) & \text{si } x \in]x_k, x_{k+1}[\text{ où } k \in [\![0, n-1]\!]\,; \\ f(x_k) & \text{si } x = x_k \text{ où } k \in [\![0, n]\!]. \end{cases}$$

La fonction ϕ répond au problème.

25

— Pour $n \in \mathbb{N}$, en prenant $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$, il existe d'après APPROX une fonction en escalier ϕ_n telle que $|f - \phi_n| \leqslant \frac{1}{n+1}$. La suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convient.

— Soit $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{E}\big([a, b], \mathbb{K}\big)^{\mathbb{N}}$ telle que : $\sup_{x\in[a,b]}\left|f(x) - \phi_n(x)\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Notons $\alpha_n = \sup_{x\in[a,b]}\left|f(x) - \phi_n(x)\right|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

  — Montrons que la suite $\left(\displaystyle\int_{[a,b]} \phi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
  Tout d'abord, $|f|$ est bornée par une constante M.
  Ainsi, pour tout $x \in [a, b]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left|\phi_n(x)\right| = \left|f(x) + \big(\phi_n(x) - f(x)\big)\right| \leqslant \left|f(x)\right| + \left|\phi_n(x) - f(x)\right| \leqslant M + \alpha_n,$$

  et donc, d'après les propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier :

$$\left|\int_{[a,b]} \phi_n\right| \leqslant \int_{[a,b]} |\phi_n| \leqslant (b-a)\big(M + \alpha_n\big).$$

  On conclut en remarquant que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, étant convergente, est bornée.

— D'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, il existe une application γ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que la suite $\left(\int_{[a,b]} \phi_{\gamma(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente.

Notons L sa limite.

Par ailleurs, pour tout $x \in [a, b]$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\phi_n(x) - \phi_{\gamma(n)}(x)\right| \leqslant \left|\phi_n(x) - f(x)\right| + \left|f(x) - \phi_{\gamma(n)}(x)\right| \leqslant \alpha_n + \alpha_{\gamma(n)},$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned}\left|\int_{[a,b]} \phi_n - \int_{[a,b]} \phi_{\gamma(n)}\right| &= \left|\int_{[a,b]} \left(\phi_n - \phi_{\gamma(n)}\right)\right| \\ &\leqslant \int_{[a,b]} |\phi_n - \phi_{\gamma(n)}| \leqslant (b-a)\left(\alpha_n + \alpha_{\gamma(n)}\right).\end{aligned}$$

Puisque $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et, par extraction, $\alpha_{\gamma(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \phi_n = L$.

— Soit $\left(\psi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une autre suite de fonctions en escalier telle que :

$$\sup_{x\in[a,b]} \left|f(x) - \psi_n(x)\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Notons $\beta_n = \sup_{x\in[a,b]} \left|f(x) - \psi_n(x)\right|$, pour $n \in \mathbb{N}$.

En remarquant que, pour tout $x \in [a, b]$, on a pour tout entier n :

$$\left|\phi_n(x) - \psi_n(x)\right| \;\leqslant\; \left|\phi_n(x) - f(x)\right| + \left|f(x) - \psi_n(x)\right| \;\leqslant\; \alpha_n + \beta_n$$

on obtient :

$$\left|\int_{[a,b]} \phi_n - \int_{[a,b]} \psi_n\right| \leqslant \int_{[a,b]} |\phi_n - \psi_n| \leqslant (b-a)\left(\alpha_n + \beta_n\right),$$

et donc $\displaystyle\int_{[a,b]} \phi_n - \int_{[a,b]} \psi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

Ainsi $\left(\int_{[a,b]} \phi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\int_{[a,b]} \psi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ont même limite.

29

Idée. Par passage à la limite à partir de fonctions en escalier.

En prenant $\epsilon = \frac{1}{n+1}$, on introduit deux suites de fonctions en escalier $\left(\phi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\psi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $|f - \phi_n| \leqslant \frac{1}{n+1}$ et $|g - \psi_n| \leqslant \frac{1}{n+1}$.

Toutes les fonctions $\lambda\phi_n + \mu\psi_n$ sont en escalier.

De plus, pour tout $x \in [a, b]$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|(\lambda\phi_n + \mu\psi_n)(x) - (\lambda f + \mu g)(x)\right| \leqslant |\lambda| \left|\phi_n(x) - f(x)\right| + |\mu|\left|\psi_n(x) - g(x)\right| \leqslant \frac{|\lambda| + |\mu|}{n+1},$$

et par conséquent :

$$0 \leqslant \sup_{x\in[a,b]} \left|(\lambda f + \mu g - \lambda\phi_n - \mu\psi_n)(x)\right| \leqslant \frac{|\lambda| + |\mu|}{n+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

La suite de fonctions en escalier $(\lambda\phi_n + \mu\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les hypothèses ..... pour $\lambda f + \mu g$ donc :

$$\begin{aligned}
\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) &= \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} (\lambda \phi_n + \mu \psi_n) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\lambda \int_{[a,b]} \phi_n + \mu \int_{[a,b]} \psi_n \right) && \text{par linéarité de l'intégrale sur } \mathscr{E}\big([a,b],\mathbb{K}\big) \\
&= \lambda \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \phi_n + \mu \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \psi_n && \text{par linéarité de la limite} \\
&= \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g.
\end{aligned}$$

31

Utiliser l'inégalité triangulaire !

33

Raisonner par l'absurde : supposer que f n'est pas la fonction nulle.
Alors il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) > 0$ (car f est positive).
Par continuité de f, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall\, t \in [a,b] \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta], \quad \frac{f(x_0)}{2} \leqslant f(t)$$

Posons $\varphi : t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{f(x_0)}{2} & \text{si } t \in [a,b] \cap [x_0-\delta, x_0+\delta] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Alors φ est en escalier, et on a $\varphi \preccurlyeq f$.
Par croissance de l'inégrale, on a

$$\underbrace{\int_{[a,b]} \varphi}_{\lambda \frac{f(x_0)}{2}} \leqslant \int_{[a,b]} f$$

où λ est la longueur de l'intervalle non trivial $[a,b] \cap [x_0-\delta, x_0+\delta]$.
Comme $\lambda \dfrac{f(x_0)}{2} > 0$, on a

$$0 < \int_{[a,b]} f$$

34

• **Étape 1.**
Pour toute $g \in CM\big([0,a],\mathbb{K}\big)$, notons $\widetilde{g}$ la fonction définie sur $[-a,0]$ par

$$\forall\, x \in [-a,0], \quad \widetilde{g}(x) = f(-x)$$

Si $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ est une subdivision adaptée à g, il est clair que la fonction $\widetilde{g}$ est continue par morceaux sur $[-a,0]$ et que $\widetilde{\sigma} = (-x_n, \ldots, -x_0)$ en est une subdivision adaptée.
Montrons pour commencer que $\displaystyle\int_{[0,a]} g = \int_{[-a,0]} \widetilde{g}$.

Cas d'une fonction en escalier Soit $\varphi \in Esc\big([0,a],\mathbb{K}\big)$.

Considérons $\sigma = (x_0,\dots,x_n)$ une subdivision adaptée à φ.

Soit i ; notons c_i la valeur de la fonction φ sur $]x_{i-1},x_i[$.

Alors la fonction $\widetilde{\varphi}$ est constante égale à c_i sur $]-x_i,-x_{i-1}[$.

Ainsi, $\widetilde{\varphi}$ est en escalier sur $[-a,0]$ de subdivision adaptée $\widetilde{\sigma} = (-x_n,\dots,-x_0)$.

On a alors :

$$\int_{[0,a]} \varphi = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, c_i = \sum_{i=1}^{n} \big(-x_{i-1} - (-x_i)\big)\, c_i = \int_{[-a,0]} \widetilde{\varphi}.$$

Cas général Soit $g \in CM\big([0,a],\mathbb{K}\big)$.

Considérons (φ_n) une suite de fonctions en escalier sur $[0,a]$ telle que $\|g-\varphi_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Alors $\|\widetilde{g}-\widetilde{\varphi}_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

D'après le cas précédent, on a $\displaystyle\int_{[0,a]} \varphi_n = \int_{[-a,0]} \widetilde{\varphi}_n$.

Par passage à la limite, $\displaystyle\int_{[0,a]} g = \int_{[-a,0]} \widetilde{g}$.

• Étape 2

Soit $f \in CM\big([-a,a],\mathbb{K}\big)$.

1. Si f est paire, on a donc :

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^0 f(-x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$$

   Avec Chasles, on en déduit :

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Si f est impaire, alors :

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^0 f(-x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$$

   ce qui donne :

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

35

Cas où la fonction f est continue L'application $x \mapsto f(x-T)$ est continue sur $[a+T,b+T]$. Dans ces conditions, puisque $s \mapsto s+T$ est de classe $\mathscr{C}^1$, on peut appliquer le formule de changement de variable, et donc :

$$\int_{a+T}^{b+T} f(x-T)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(s)\,\mathrm{d}s$$

Cas où la fonction f est continue par morceaux Soit $(u_0,\dots,u_n)$ une subdivision du segment $[a,b]$ adaptée à f. Il est clair que l'application $g : x \mapsto f(x-T)$ est continue par morceaux sur $[a+T,b+T]$ et que $(u_0+T,\dots,u_n+T)$ est une subdivision de $[a+T,b+T]$ adaptée à g. D'après la relation de Chasles et le cas précédent :

$$\begin{aligned}\int_{a+T}^{b+T} f(x-T)\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{u_k+T}^{u_{k+1}+T} f(x-T)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$