

Intégration

exercices



101 La formule préférée de J. Nougayrède

Soit $a < b \in \mathbb{Z}$ deux entiers. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux.
On suppose f croissante. Montrer que

$$f(a) + \int_a^b f \leq \sum_{k=a}^b f(k) \leq \int_a^b f + f(b)$$

Quelle formule obtient-on lorsque f est décroissante ?

102 Des variantes de la formule précédente

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux.
On suppose f croissante. Montrer que

$$\frac{1}{n}f(0) + \int_0^1 f \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_0^1 f + \frac{1}{n}f(1)$$

Puis, expliquez à l'oral comment obtenir :

$$\frac{1}{n}f(0) + \int_0^{1-\frac{1}{n}} f \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_0^{1-\frac{1}{n}} f + \frac{1}{n}f\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

103 Facile !

Soit $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

On suppose qu'il existe $x_1 \in [a, b]$ tel que $f(x_1) > 0$ et $\int_a^b f = 0$.

Montrer qu'il existe $x_2 \in [a, b]$ tel que $f(x_2) < 0$.

104 Une fonction constante

seul

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue, non nulle et telle que $\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 (f(t))^2 dt$.

Montrer que f est constante égale à 1.

105 Une fonction non continue qui admet une primitive

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f n'est pas continue en 0.
2. Malgré le fait que f n'est pas continue, on souhaite montrer que f admet des primitives.

On pose $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \int_0^x 2t \cos\left(\frac{1}{t}\right) dt & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- Montrer que F est bien définie (et expliquer l'abus de langage/notation).
- Montrer que F est une primitive de f .

110 Régularité

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux (c'est-à-dire continue par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}$).
On pose $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Justifier que φ est bien définie.
2. On suppose f continue. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et est continue sur $\mathbb{R}$.
3. On suppose f dérivable. Montrer que φ est dérivable et déterminer φ' .

111 La fonction nulle

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $a \in [0, 1]$.

On suppose que

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = \int_0^{ax} f$$

1. Dans cette question, on suppose que $a = 1$. Montrer que f est nulle.
2. On revient au cas général $a \in [0, 1]$.
 - (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f^{(n)}$.
 - (b) En appliquant une formule de Taylor bien choisie, montrer que f est nulle.

112 Fonction définie par une intégrale (1)

Soit $\Psi : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$ (Ψ se prononce Psi majuscule)

1. Déterminer l'ensemble de définition de Ψ .
2. Montrer que Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer Ψ' .
3. À l'aide d'un encadrement de la fonction intégrée, déterminer la limite de Ψ en 0.

113 Fonction définie par une intégrale (2)

Soit $\Theta : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$ (Θ se prononce Theta majuscule)

1. Déterminer l'ensemble de définition D de Θ .
2. Montrer que Θ est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer Θ' .
Dresser le tableau de variations de Θ .
3. Montrer que on distinguera $x < 1$ et $x > 1$

$$\forall x \in D, \quad \frac{x^2 - x}{2 \ln x} \leq \Theta(x) \leq \frac{x^2 - x}{\ln x}$$

4. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \Theta$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Theta$.
5. Pour $x \in D$, on pose $I(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt$. Calculer $I(x)$.
6. Montrer que $\forall x > 1, xI(x) \leq \Theta(x) \leq x^2 I(x)$.
Donner une inégalité analogue pour $x < 1$.
7. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1} \Theta$, puis retrouver $\lim_{x \rightarrow 0} \Theta$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Theta$.

Des limites

114 Pour commencer

Soit $\varphi : x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x \sin t} dt$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x)$ existe et la déterminer.

115 Des limites avec des intégrales

Justifier les affirmations suivantes (il y en a qui sont très difficiles et relèvent d'exercices spécifiques).

- (i) Pour $x \neq 0$, on a $\int_x^{2x} \frac{1}{t} dt = \ln 2$.
- (ii) On a $\int_x^{2x} \frac{\cos t}{t} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ln 2$.
- (iii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$.
- (iv) On a $\int_0^1 \ln(1+t^n) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- (v) On a $\int_0^1 t^n \sin t dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- (vi) Pour $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, on a $\int_0^1 t^n f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0)$.
- (vii) On a $\int_0^1 nt^n dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Par ailleurs, pour $x \in [0, 1]$, on a $nx^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ +\infty & \text{si } x = 1 \end{cases}$
- (viii) On a $\int_0^1 ne^{-nt} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Par ailleurs, pour $x \in [0, 1]$, on a $ne^{-nx} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} +\infty & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \in]0, 1] \end{cases}$
- (ix) Pour $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, on a $\int_0^1 nt^n f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(1)$.
- (x) Pour $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, on a $\int_0^1 ne^{-nt} f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0)$.
- (xi) Pour tout $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, on a $\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt = \ln 2$.

116 Passage à la limite dans les bornes : très important !

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Dire si les limites suivantes existent et les déterminer le cas échéant.

- (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \int_3^x f(t) dt$
- (iii) $\lim_{x \rightarrow 7} \int_x^{2x} f(t) dt$
- (v) $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} f(t) dt$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \int_3^x \frac{1}{t} dt$
- (iv) $\lim_{x \rightarrow 7} \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$
- (vi) $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$

117 Attention !

Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 2nt e^{-nt^2} dt \quad \text{et} \quad \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} 2nt e^{-nt^2} dt$$

Qu'en conclure ?

118 Lemme de Lebesgue

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) dt = 0$$

Formules de Taylor

119 Deux restes visuellement différents

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Rappeler pourquoi

$$\forall x \neq 1, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

2. Soit $x \in]-\infty, 1[$. Donner la formule de Taylor avec reste intégral de f à l'ordre n en 0 et montrer que le reste intégral vaut

$$(n+1) \int_0^x \frac{1}{(1-t)^2} \left(\frac{x-t}{1-t} \right)^n dt$$

3. Les deux formules précédentes se ressemblent ! En faisant le changement de variable $y = \frac{x-t}{1-t}$ dans le reste intégral, montrer que les deux formules sont identiques.

120 Un grand classique

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = 0$.

En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que

$$\sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{f'(0)}{2}$$

En déduire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

121 Dans l'esprit de Kolmogorov, exercice astucieux

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

On suppose que f est positive et que f'' est bornée sur $\mathbb{R}$.

On pose

$$M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|$$

Montrer que

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad |f'(a)| \leq \sqrt{2Mf(a)}$$

122 Inégalités de Kolmogorov

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$.

On pose

$$M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \quad M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h > 0$, on a

$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{M_2 h^2}{2} \quad \text{et} \quad |f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \leq \frac{M_2 h^2}{2}$$

2. À l'aide de l'inégalité triangulaire, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h > 0$, on a

$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$$

3. En déduire que f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \leq \sqrt{2M_0 M_2}$$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et telle que $f(0) = 0$.

On définit $\varphi : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \frac{f(x)}{x}$.

On fixe $n \in \mathbb{N}$ une fois pour toutes.

1. Montrer que φ peut être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, et avec la formule de Leibniz, donner une expression de $\varphi^{(n)}$ en fonction des $f^{(k)}$.
3. En déduire que

$$\forall x \neq 0, \quad x^{n+1} \varphi^{(n)}(x) = \int_0^x t^n f^{(n+1)}(t) dt$$

0 ne \(\backslash\) pour l'algèbre des restes modulo 2 et modulo 3

4. A l'aide d'une intégration par parties, en déduire une autre expression de $\varphi^{(n)}(x)$ pour $x \neq 0$.
5. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi^{(n)}(x) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$$

Avec le théorème de limite de la dérivée, et une récurrence sur n , on peut montrer que φ peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

L'exercice montre par exemple que la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Des développements en série entière

On considère la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ définie sur $[0, 1[$.

1. Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1[$ et calculer ses dérivées successives.
2. (2a) Prouver l'inégalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \binom{2n+2}{n+1} \leq 4^{n+1}$$

- (2b) Pour tout couple (t, x) de réels tel que $0 \leq t \leq x < 1$, vérifier les inégalités

$$0 \leq \frac{x-t}{1-t} \leq x$$

3. Soit $x \in [0, 1[$. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=0}^n \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^k \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

1. Soit $x \in [0, +\infty[$. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite vaut $\ln 2$.

Pour la culture. On notera plus tard $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$

2. Soit $x \in [0, 1]$. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Question subsidiaire pour l'an prochain : est-ce que l'on peut généraliser cela à $x \in [1, +\infty[$?

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que sa limite vaut $\cos x$.

Pour la culture. On notera plus tard $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \cos(x)$.

Analyse asymptotique et intégrale

126 Intégrale de $t^n f(t)$: limite

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

1. Montrer que $\int_0^1 t^n f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ou encore $\int_0^1 t^n f(t) dt = o(1)$.

2. En fait, montrer que $\int_0^1 t^n f(t) dt = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Expliquer le « en fait ».

3. Soit $\delta > 0$. Montrer que $\int_0^{1-\delta} t^n f(t) dt = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Bien sûr, il faut comprendre $\delta \in]0, 1]$.

127 Intégrale de $t^n f(t)$: DA à 1 terme

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On veut montrer que

$$\int_0^1 nt^n f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(1) \quad \text{ou encore} \quad \int_0^1 t^n f(t) dt = \frac{f(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

1. Prouver le résultat dans le cas où f est supposée de classe $\mathcal{C}^1$.

2. On suppose ici seulement f continue et on suppose que $f(1) = 0$.

(a) On fixe $\varepsilon > 0$.

Montrer qu'il existe $\delta \in]0, 1]$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \int_{1-\delta}^1 nt^n f(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Pour ce δ , montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad \left| \int_0^1 nt^n f(t) dt \right| \leq \varepsilon$$

(b) Conclure.

3. Prouver le résultat annoncé.

128 Une suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^n} dt$.

1. Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 1.

2. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que

$$I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

129 Difficile

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$\left(\int_a^b |f(t)|^n dt \right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \max_{[a,b]} |f|$$

Sommes de Riemann

130 Faire ses gammes

Pour chaque suite, montrer que la limite existe et la déterminer.

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2}$$

$$d_n = \sum_{k=1}^n \frac{(2k)^2}{n^3 + (2k)^3}$$

$$g_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \lfloor \sqrt{k} \rfloor$$

$$b_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$$

$$e_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$h_n = \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{\sqrt{\left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^3}}$$

$$c_n = \sum_{k=1}^n \frac{n^2}{n^2 + k^2}$$

$$f_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$$

$$i_n = \left(\frac{(2n)!}{n! n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

131 Un faux ami

Déterminer la limite de

$$A_n = \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k}$$

132 Une somme, presque de Riemann

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2}$.

Montrer que $S_n \rightarrow 0$, puis déterminer un équivalent de S_n .

133 Somme de puissances

Soit $\alpha \in [0, +\infty[$ un réel positif.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n(\alpha) = \sum_{k=1}^n k^\alpha$.

En faisant intervenir une somme de Riemann, déterminer un équivalent de $S_n(\alpha)$ quand $n \rightarrow +\infty$. Examiner d'abord les cas particuliers $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}$.

134 Une fausse somme de Riemann

Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}}$$

Il s'agit de montrer que (S_n) admet une limite et la déterminer.

Un élève remarque que $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ avec $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

Malheureusement, cette fonction est seulement définie sur l'ouvert $[0, 1[$ (qui n'est donc pas un segment), et on ne peut donc pas appliquer le théorème des sommes de Riemann. Comment s'en sortir ?

On pourra s'inspirer de l'exercice 107.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

1. On suppose que f est M -lipschitzienne.

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \int_0^1 f - S_n \right| \leq \frac{M}{2n}$$

En particulier,

$$S_n - \int_0^1 f = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

2. On suppose f continue, dérivable sur $]0, 1[$ et dont le module de la dérivée est borné, disons $|f'| \leq M$.

Les hypothèses de la question précédente sont-elles vérifiées ?

3. On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$.

Les hypothèses de la question précédente sont-elles vérifiées ?

4. ** On suppose f de classe $\mathcal{C}^2$.

Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$S_n - \int_0^1 f = \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Pour tout $a, b > 0$, on pose

$$I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a \cos^2 t + b \sin^2 t) dt$$

On fixe deux réels $a, b > 0$ strictement positifs.

Propriétés de $I(a, b)$

1. Montrer que

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad a \cos^2 t + b \sin^2 t > 0$$

En déduire que l'intégrale $I(a, b)$ est bien définie.

2. Montrer que $I(a, b) = I(b, a)$.

On déduit de cette question que

$$\forall \alpha, \beta > 0, \quad I(\alpha, \beta) = I(\beta, \alpha)$$

3. Montrer que

$$\frac{\pi}{2} \ln(\min(a, b)) \leq I(a, b) \leq \frac{\pi}{2} \ln(\max(a, b))$$

4. Montrer que

$$2I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left[ab \cos^2(2t) + \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \sin^2(2t) \right] dt$$

5. Déduire des questions précédentes que

$$\forall \alpha, \beta > 0, \quad 2I(\alpha, \beta) = I\left(\alpha\beta, \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right)$$

Deux suites imbriquées

On définit deux suites u et v par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n v_n \\ v_{n+1} = \left(\frac{u_n + v_n}{2} \right)^2 \end{cases}$$

Une récurrence immédiate montre que ces suites sont à termes strictement positifs.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer une relation entre $I(a, b)$ et $I(u_n, v_n)$.

7. En considérant $w_n = \frac{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}}{2}$ et $w'_n = \frac{\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}}{2}$, déterminer $\sqrt{u_n}$ et $\sqrt{v_n}$ en fonction de a, b et n .

Pour plus de lisibilité, on pourra poser $\sigma = \frac{\sqrt{b} + \sqrt{a}}{2}$ et $\delta = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{2}$.

8. Déterminer la limite des suites $\frac{\ln u_n}{2^n}$ et $\frac{\ln v_n}{2^n}$.

La chute !

9. Déterminer la valeur de $I(a, b)$.

8 19 8 9b 19bis's 11000000000 000000 00

Le but de cet exercice est de démontrer cette formule :

$$(BBP) \quad \pi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right)$$

Elle a été obtenue le 19 septembre 1995 par Simon Plouffe en collaboration avec David H. Bailey et Peter Borwein. Elle permet le calcul isolé des chiffres binaires du nombre π .

On considère l'intégrale I suivante :

$$I = \int_0^1 \frac{t^5 + t^4 + 2t^3 - 4}{t^8 - 16} dt$$

1. Justifier que l'intégrale I est bien définie.
2. (a) Factoriser $X^8 - 16$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis en déduire une factorisation comme un produit de quatre polynômes de degré 2 à coefficients réels.
Est-ce la factorisation en irréductibles de $\mathbb{R}[X]$?
- (b) Effectuer la division euclidienne de $X^5 + X^4 + 2X^3 - 4$ par $X^2 + 2$.
Factoriser le polynôme $X^5 + X^4 + 2X^3 - 4$ en un produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
3. Avec le minimum de calculs, justifier que

$$\forall t \in [0, 1], \quad \frac{t^5 + t^4 + 2t^3 - 4}{t^8 - 16} = \frac{1}{4} \left(\frac{t}{t^2 - 2} - \frac{t - 2}{t^2 - 2t + 2} \right).$$

4. Déterminer les valeurs des intégrales

$$I_1 = \int_0^1 \frac{2x}{x^2 - 2} dx \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^1 \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2} dx \quad \text{et} \quad I_3 = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx.$$

5. Montrer $I = \frac{\pi}{16}$.

Pour la fin de l'exercice, on fixe $p \in \mathbb{N}$.

6. Soit $a \in]0, 1[$.

- (a) Montrer que pour tout $t \in [0, a[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left| \frac{t^p}{1 - t^8} - \sum_{k=0}^n \frac{t^{8k+p}}{1 - t^8} \right| \leq \frac{a^{8(n+1)+p}}{1 - a^8}$$

- (b) En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{a^{8k+p+1}}{8k+p+1} = \int_0^a \frac{t^p}{1 - t^8} dt$$

On rappelle que la notation $\lim_{n \rightarrow +\infty}$ signifie que la limite existe et vaut...

7. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{16^k(8k+p+1)} = \int_0^1 \frac{16x^p}{16 - x^8} dx$$

8. Démontrer la formule BBP.

Intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$.

1. Calculer W_0 et W_1 .
2. Montrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, et positive.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donner une relation entre W_{n+1} et W_{n-1} .
En déduire que la suite $(nW_n W_{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante.
4. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n}{n+1} \frac{\pi}{2} \leq nW_n^2 \leq \frac{\pi}{2}$.
5. Donner un équivalent simple de W_n .

Formule de Stirling

On pose $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

6. (a) Déterminer un équivalent de la suite $\left(\ln \left(\frac{u_n}{u_{n-1}} \right) \right)_{n \geq 2}$.
(b) En admettant que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $\ell > 0$.
On pourra par exemple minorer la suite $(\ln u_n)_{n \geq 2}$ par une suite convergente.
(c) Donner un équivalent de $n!$ en fonction de ℓ .
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer W_{2n} en fonction de $\binom{2n}{n}$ et donner un équivalent simple de W_{2n} en fonction de ℓ .
8. Montrer la formule de Stirling

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$$

Intégrale de Gauss

On pose $\Phi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$

9. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0, \sqrt{n}], \quad \left(1 - \frac{t^2}{n} \right)^n \leq e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n} \right)^{-n}$$

10. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n} W_{2n+1} \leq \Phi(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n} W_{2n-2}$.

On pourra faire deux changements de variables successifs : d'abord $t = \sqrt{n}u$, puis un second (qui ne sera pas le même dans les deux intégrales) introduisant des fonctions trigonométriques...

11. Montrer $\Phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, ce que l'on notera plus tard $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Intégration

corrigés

Posons $g = f - f^2$. Autrement dit, $g : t \mapsto f(t) - f(t)^2$.

On a

★ g est continue par opérations (car f est continue)

★ g est positive, car f est à valeurs dans $[0, 1]$

★ $\int_0^1 g = 0$ par hypothèse

D'après le théorème aux trois hypothèses, on en déduit que g est la fonction nulle.

Donc $f = f^2$.

Attention ici, à ne pas dire soit $f = 0$, soit $f = 1$!!!

D'où $\forall t \in [0, 1], \left(f(t) = 0 \text{ ou } f(t) = 1 \right)$

Ainsi l'image de f est incluse dans $\{0, 1\}$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'image de l'intervalle $[0, 1]$ par la fonction continue f est un intervalle, qui est donc soit le singleton $\{0\}$, soit le singleton $\{1\}$.

Autrement dit, on a

$$\left(\forall t \in [0, 1], f(t) = 0 \right) \quad \text{ou} \quad \left(\forall t \in [0, 1], f(t) = 1 \right)$$

Comme f n'est pas nulle dans l'énoncé, on en déduit que f est constante égale à 1.

— Montrons que F est bien définie.

L'intégrale a bien un sens car la fonction intégrée $t \mapsto t \cos\left(\frac{1}{t}\right)$ est prolongeable par continuité en 0.

En toute rigueur, à la place de $\int_0^x t \cos\left(\frac{1}{t}\right) dt$, il faudrait écrire

$$\int_0^x \varphi(t) dt \quad \text{où } \varphi : t \mapsto \begin{cases} t \cos\left(\frac{1}{t}\right) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

— Montrons que F est dérivable et $F' = f$.

Par opérations, la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad F'(x) &= 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Montrons à présent que F est dérivable en 0 et que $F'(0) = f(0)$ (en revenant à la définition, car ici, le théorème de la limite de la dérivée ne permettra pas de conclure (WHY d'ailleurs ?!)).

Dressons le taux d'accroissement de F en 0. Examinons la limite en 0 des deux termes.

On a

$$\forall x \neq 0, \quad \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = x \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \int_0^x 2t \cos\left(\frac{1}{t}\right) dt$$

- On a $x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et la quantité $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ est bornée d'où

$$x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

- Pour le deuxième terme, on va utiliser l'inégalité triangulaire. Pour cela, on va d'abord calculer la limite en 0^+ .

On a

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \quad \left| \frac{1}{x} \int_0^x 2t \cos\left(\frac{1}{t}\right) dt \right| &\leq \left| \frac{1}{x} \right| \int_0^x \left| 2t \cos\left(\frac{1}{t}\right) \right| dt \quad \text{par inégalité triangulaire} \\ &\leq \underbrace{\frac{1}{x} \int_0^x 2t dt}_{=x} \quad \text{car } |\cos| \text{ est majorée par } 1 \end{aligned}$$

Comme $x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$, le membre gauche tend vers 0.

On montre de même que le membre gauche tend vers 0 quand $x \rightarrow 0^-$.

Par somme de limites, on en déduit

$$\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

On a donc montré que F est dérivable et $F' = f$.

1. Posons

$$\varphi : x \longmapsto \int_a^b fg - f(x) \int_a^b g = \int_a^b (f(t) - f(x)) g(t) dt$$

On veut montrer qu'il existe c tel que $\varphi(c) = 0$.

Comme f est continue sur le segment $[a, b]$, elle est bornée et atteint ses bornes : il existe x_m et x_M tels que

$$f(x_m) = \min_{[a,b]} f \quad \text{et} \quad f(x_M) = \max_{[a,b]} f$$

D'où

$$\forall t \in [a, b], \quad f(t) - f(x_m) \geq 0$$

D'où, en multipliant par $g(t) \geq 0$,

$$\forall t \in [a, b], \quad (f(t) - f(x_m))g(t) \geq 0$$

Par positivité de l'intégrale,

$$\int_a^b (f(t) - f(x_m)) g(t) dt \geq 0$$

c'est-à-dire $\varphi(x_m) \geq 0$.

On montre de même que $\varphi(x_M) \leq 0$.

Ainsi, 0 est une valeur intermédiaire entre deux valeurs atteintes par φ .

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, 0 est atteint par φ .

Autrement dit, il existe $c \in [x_m, x_M]$ tel que $\varphi(c) = 0$.

Autre solution, mais moins élégante.

On distingue deux cas.

• Cas $\int_a^b g(t) dt = 0$. Alors d'après le « critère de nullité », g est la fonction nulle.

• Cas $\int_a^b g(t) dt \neq 0$. Par stricte positivité de l'intégrale (savoir d'où cela sort), on a $\int_a^b g(t) dt > 0$.

Montrons que

$$\frac{\int_a^b f(t)g(t) dt}{\int_a^b g(t) dt} \quad \text{est une valeur intermédiaire pour } f.$$

Sur le segment $[a, b]$, la fonction continue f est bornée et atteint ses bornes, disons $m = f(x_m)$ et $M = f(x_M)$.

On a

$$\forall t \in [a, b], \quad m \leq f(t) \leq M$$

puis, en multipliant par $g(t) \geq 0$,

$$\forall t \in [a, b], \quad mg(t) \leq f(t)g(t) \leq Mg(t)$$

Par croissance de l'intégrale,

$$m \int_a^b g(t) dt \leq \int_a^b f(t)g(t) dt \leq M \int_a^b g(t) dt$$

D'où en divisant par $\int_a^b g(t) dt$ qui est > 0

$$f(x_m) = m \leq \frac{\int_a^b f(t)g(t) dt}{\int_a^b g(t) dt} \leq M = f(x_M)$$

Ainsi $\frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b g(t)dt}$ est une valeur intermédiaire entre deux valeurs atteintes par f , donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, c'est une valeur atteinte par f . Autrement dit, il existe $c \in [x_m, x_M] \subset [a, b]$ tel que

$$\frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b g(t)dt} = f(c)$$

2. • Déterminons l'ensemble de définition de $\Theta : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$.

La fonction intégrée est continue sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

On cherche les $x \in \mathbb{R}$ tel que $[x, x^2] \subset]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

Il n'est pas difficile de constater que ce sont les $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

Ainsi, $\mathcal{D}_\Theta =]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

- Déterminons $\lim_{x \rightarrow 1^+} \Theta(x)$.

Fixons $x \in]1, +\infty[$.

Posons $f : t \mapsto t$ et $g : t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$ qui sont continues sur $]1, +\infty[$ donc sur $[x, x^2]$.

De plus, g est positive sur $]1, +\infty[$ donc sur $[x, x^2]$.

La question précédente s'applique et fournit l'existence de $c_x \in [x, x^2]$ tel que

$$(\diamond) \quad \int_x^{x^2} t \times \frac{1}{t \ln t} dt = f(c_x) \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt$$

Ce qui se réécrit avec les définitions

$$(\heartsuit) \quad \Theta(x) = c_x \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt$$

Or

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt = \int_x^{x^2} \frac{1/t}{\ln t} dt = \left[\ln |\ln t| \right]_x^{x^2} = \ln 2$$

Bilan :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \Theta(x) = c_x \ln 2$$

Comme $c_x \in [x, x^2]$, le théorème des Gendarmes fournit $\lim_{x \rightarrow 1^+} c_x = 1$, d'où

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \Theta(x) = \ln 2$$

- Soit $x \in]0, 1[$. On montre de la même manière (il faut juste intervertir x et x^2 au début de la preuve dans l'égalité $(\diamond)$; puis on récupère l'égalité $(\heartsuit)$ en multipliant par -1 de chaque côté) que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \Theta(x) = \ln 2$$

- On a donc

$$\lim_{x \rightarrow 1} \Theta(x) = \ln 2$$

1. On considère l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment, donc c'est licite.
2. Comme f continue, le théorème fondamental de l'analyse affirme que $F : x \mapsto \int_0^x f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $F' = f$. En particulier, $F'(0) = f(0)$ et la fonction φ a donc le visage suivant :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \frac{F(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ F'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

— Par opération, φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\varphi' : x \longmapsto \frac{F'(x)x - F(x)}{x^2} = \frac{f(x)x - F(x)}{x^2} = \frac{-1}{x^2}F(x) + \frac{1}{x}f(x)$$

Autre justification. Si l'on n'a pas nommé de primitive pour f , on utilise le théorème fondamental de l'analyse (encore lui) pour justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}^*$ et :

$$\varphi' : x \longmapsto \frac{-1}{x^2} \int_0^x f + \frac{1}{x} f(x)$$

— **Continuité en 0.**

La fonction F étant dérivable en 0, on a

$$\frac{F(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} F'(0)$$

ce qui se traduit pour φ par $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \varphi(0)$.

Ainsi, φ est continue en 0.

Ainsi, φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et continue sur $\mathbb{R}$.

3. **Étude en 0.** Reprenons les notations précédentes. On a

$$\forall x \neq 0, \quad \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \frac{\frac{F(x)}{x} - F'(0)}{x} = \frac{F(x) - F'(0)x}{x^2}$$

Comme f est dérivable, la fonction F est deux fois dérivable, et la formule de Taylor-Young peut s'appliquer :

$$F(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{1}{2!}F''(0)x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

Comme $F(0) = 0$, on en déduit :

$$\frac{F(x) - F'(0)x}{x^2} = \frac{1}{2!}F''(0) + o_{x \rightarrow 0}(1)$$

Donc

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2!}F''(0)$$

Ainsi, φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = \frac{1}{2}f'(0)$.

Résumons. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} \varphi' : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \frac{-1}{x^2} \int_0^x f + \frac{1}{x} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2}f'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

1. On a

$$(\star) \quad \forall x \in [0, 1], \quad f(x) = \int_0^x f$$

Comme f est continue, le théorème fondamental de l'Analyse dit que $x \mapsto \int_0^x f$ est dérivable de dérivée f .

La relation $(\star)$ montre donc que f est dérivable et que $f' = f$.

Par ailleurs, la relation $(\star)$ fournit $f(0) = 0$.

Résumons. La fonction f est solution de l'équation différentielle $y' - y = 0$ et s'annule, donc le cours dit que c'est la fonction nulle.

On peut évidemment retrouver très facilement ici que f est nulle. En effet, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f : x \mapsto \lambda e^x$. Et l'égalité $f(0) = 0$ fournit $\lambda = 0$, donc f est nulle.

2. (a) Au brouillon, on conjecture une formule pour la dérivée $n^{\text{ème}}$.

Puis, on montre par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ll f \text{ est } n\text{-fois dérivable et } f^{(n)} : x \mapsto a^{\sum_{k=1}^n k} f(a^n x) \gg$$

ou bien

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ll f \text{ est de classe } \mathcal{C}^n \text{ et } f^{(n)} : x \mapsto a^{\sum_{k=1}^n k} f(a^n x) \gg$$

J'opte pour la première version et je note $\mathcal{H}_n$ l'assertion.

On pose $\sigma_n = \sum_{k=1}^n k$ de sorte que $\sigma_{n+1} = \sigma_n + (n+1)$.

Il est plus pratique ici d'initialiser à $n = 1$ (car on aura besoin d'utiliser $\mathcal{H}_1$ ensuite). Ce n'est pas un problème car $\mathcal{H}_0$ est trivialement vraie.

Initialisation. La fonction f est bien entendu 0-fois dérivable, et comme $f^{(0)} = f$, la formule est valable.

D'où $\mathcal{H}_0$.

Initialisation (bis). La fonction f est dérivable en vertu du théorème fondamental de l'analyse (car f est continue).

Plus précisément,

$$\begin{cases} x \mapsto ax \text{ est dérivable sur } [0, 1] \text{ à valeurs dans } [0, 1] \\ y \mapsto \int_0^y f \text{ est dérivable sur } [0, 1] \text{ (on utilise le fait que } f \text{ est continue) de dérivée } f \end{cases}$$

Par composition, f est dérivable sur $[0, 1]$ et on a

$$f' : x \mapsto af(ax)$$

D'où $\mathcal{H}_1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}_n$. Montrons $\mathcal{H}_{n+1}$.

D'après $\mathcal{H}_n$, la fonction f est n -fois dérivable et $f^{(n)} : x \mapsto a^{\sigma_n} f(a^n x)$.

On a

$$\begin{cases} x \mapsto a^n x \text{ est dérivable sur } [0, 1] \text{ et à valeurs dans } [0, 1] \\ t \mapsto f(t) \text{ est dérivable sur } [0, 1] \text{ et } f' : t \mapsto af(at) \text{ (même justification que pour } \mathcal{H}_1). \end{cases}$$

Par composition, la fonction $x \mapsto f(a^n x)$ est dérivable sur $[0, 1]$.

Ainsi, la fonction $f^{(n)}$ est dérivable sur $[0, 1]$ et on a

$$(f^{(n)})' : x \mapsto a^{\sigma_n} a^n f'(a^n x)$$

Comme $f' : t \mapsto af(at)$, on a

$$f^{(n+1)} = (f^{(n)})' : x \mapsto a^{\sigma_n} a^n af(a^n x) = a^{\sigma_n + (n+1)} f(a^{n+1} x)$$

On vient de montrer que f est $(n+1)$ -fois dérivable et $f^{(n+1)} : x \mapsto a^{\sigma_n + (n+1)} f(a^{n+1} x)$, d'où $\mathcal{H}_{n+1}$.

(b) Fixons $x \in [0, 1]$ et montrons que $f(x) = 0$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée entre 0 et x fournit

$$(\clubsuit) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq K_{n,x} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{où } K_{n,x} = \max_{[0,x]} |f^{(n+1)}|$$

— Comme $f(0) = 0$, la formule de la dérivée $k^{\text{ème}}$ obtenue à la question précédente fournit :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^{(k)}(0) = 0$$

— Comme $f^{(n+1)} : x \mapsto a^{\sigma_{n+1}} f(a^{n+1}x)$ et que $a \in [0, 1]$, on en déduit que

$$\forall t \in [0, x], \quad |f^{(n+1)}(t)| \leq |f(a^{n+1}x)| \leq \max_{[0,1]} |f|$$

ce maximum ayant du sens car f est continue sur le segment $[0, 1]$, donc $|f|$ aussi, et admet donc un maximum en vertu du théorème des bornes atteintes.

La relation $(\clubsuit)$ fournit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(x)| \leq M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq M \frac{1}{(n+1)!} \quad \text{où } M = \max_{[0,1]} |f|$$

Comme le membre droit tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, le théorème des Gendarmes implique que la suite constante égale à $f(x)$ tend vers 0, donc $f(x) = 0$.

1. Déterminons l'ensemble de définition de Ψ .

La fonction intégrée $t \mapsto \frac{e^t}{t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.

On cherche les $x \in \mathbb{R}$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \overbrace{[x, 2x]} \subset]-\infty, 0[\\ \text{ou} \\ \overbrace{[x, 2x]} \subset]0, +\infty[\end{array} \right.$$

Ce qui équivaut à $x < 0$ ou $x > 0$.

BILAN : l'ensemble de définition de Ψ est $D =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

2. Montrons que Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D **en montrant qu'elle est $\mathcal{C}^1$ sur chaque intervalle de D .**

▷ Sur $]0, +\infty[$

D'après la relation de Chasles, on a

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \Psi(x) = - \int_1^x \frac{e^t}{t} dt + \int_1^{2x} \frac{e^t}{t} dt$$

D'après le théorème fondamental de l'Analyse :

— la fonction $x \mapsto - \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$ est $\mathcal{C}^1$

— la fonction $x \mapsto \int_1^{2x} \frac{e^t}{t} dt$ est $\mathcal{C}^1$ car les deux fonctions $\begin{cases} x \mapsto 2x \\ y \mapsto - \int_1^y \frac{e^t}{t} dt \end{cases}$ le sont

Par somme, on en déduit que Ψ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et on a

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \Psi'(x) = -\frac{e^x}{x} + 2\frac{e^{2x}}{2x} = \frac{e^x(-1 + e^x)}{x}$$

▷ Sur $] -\infty, 0[$

Rien ne change si ce n'est le 1 artificiel dans les deux intégrales qu'il faut changer en -1 ou en -2023 .

BILAN : Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et on a

$$\forall x \in D, \quad \Psi'(x) = \frac{e^x(-1 + e^x)}{x}$$

3. Déterminons la limite de Ψ en 0.

▷ On commence par déterminer la limite en 0^+ .

Montrons que

$$\forall x > 0, \quad e^x \ln 2 \leq \Psi(x) \leq e^{2x} \ln 2$$

On pourra en déduire, d'après le théorème des Gendarmes que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Psi(x) = \ln 2$.

Fixons $x > 0$.

On a

$$\forall t \in [x, 2x], \quad \frac{e^x}{t} \leq \frac{e^t}{t} \leq \frac{e^{2x}}{t}$$

Par croissance de l'intégrale dans le bon sens, on a

$$\int_x^{2x} \frac{e^x}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^{2x}}{t} dt$$

D'où

$$\underbrace{e^x \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt}_{\ln 2} \leq \underbrace{\int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt}_{\Psi(x)} \leq \underbrace{e^{2x} \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt}_{\ln 2}$$

▷ On établit de la même manière que

$$\forall x < 0, \quad e^{2x} \ln 2 \leq \Psi(x) \leq e^x \ln 2$$

D'après le théorème des Gendarmes, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \Psi(x) = \ln 2$.

▷ Ces deux points montrent que la limite de Ψ en 0 existe et vaut $\ln 2$.

— **En 0.** On a $\varphi(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2}$.

— **Limite en 0^+ .**

Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto e^{-x \sin t}$ est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ (on utilise la positivité de x).

D'où

$$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \underbrace{e^{-x \sin \frac{\pi}{2}}}_{=e^{-x}} \leq e^{-x \sin t} \leq \underbrace{e^{-x \sin 0}}_{=1}$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient

$$\frac{\pi}{2} e^{-x} \leq \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x \sin t} dt}_{\varphi(x)} \leq \frac{\pi}{2}$$

Le théorème des Gendarmes assure l'existence de la limite et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \frac{\pi}{2}$$

— **Limite en 0^- .** Ce cas se traite de la même manière.

On obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x) = \frac{\pi}{2}$$

Les limites en 0^+ et en 0^- coïncident et valent $\varphi(0)$, d'où l'existence de la limite en 0 et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \frac{\pi}{2}$$

Notons $S_n = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$

Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à f à l'ordre 1 en 0. On a

$$\forall x \in [0, 1], \quad |f(x) - f'(0)x| \leq K \frac{|x|^2}{2!}$$

où K est un majorant de $|f''|$ sur $[0, x]$. Prenons $K = \max_{[0,1]} |f''|$, qui ne dépend pas de x .

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a alors

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \left| f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f'(0) \frac{k}{n^2} \right| \leq \frac{K}{2!} \left(\frac{k}{n^2}\right)^2$$

D'après l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \left| S_n - \sum_{k=0}^n f'(0) \frac{k}{n^2} \right| &\leq \sum_{k=0}^n \left| f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f'(0) \frac{k}{n^2} \right| && \text{par inégalité triangulaire} \\ &\leq \sum_{k=0}^n \frac{K}{2!} \left(\frac{k}{n^2}\right)^2 && \text{par somme de ce qui précède} \\ &\leq \frac{K}{2!} \frac{1}{n^4} \underbrace{\sum_{k=0}^n k^2}_{\sim \frac{1}{3}n^3} && \text{car } \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

Le membre de droite vaut est un $O(\frac{1}{n})$ donc tend vers 0.

D'après le théorème des gendarmes,

$$S_n - f'(0) \sum_{k=0}^n \frac{k}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Or $\sum_{k=0}^n \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \sim \frac{1}{2}$, d'où

$$f'(0) \sum_{k=0}^n \frac{k}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{f'(0)}{2}$$

Comme

$$S_n = \left(S_n - f'(0) \sum_{k=0}^n \frac{k}{n^2} \right) + f'(0) \sum_{k=0}^n \frac{k}{n^2}$$

on en déduit par somme de limites que

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{f'(0)}{2}$$

Fixons $a \in \mathbb{R}$ et appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 en a .

$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad \left| f(a+h) - f(a) - hf'(a) \right| \leq K \frac{|h|^2}{2} \quad \text{où } K = \max_{\underset{\curvearrowright}{[a, a+h]}} |f''|$$

On a bien sûr $K \leq M$.

En utilisant que f est positive, on a alors

$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq f(a+h) \leq f(a) + hf'(a) + M \frac{h^2}{2}$$

d'où

$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq f(a) + f'(a)h + \frac{M}{2}h^2$$

On a donc un polynôme en h de degré 2 qui est toujours positif, donc son discriminant est négatif ou nul :

$$f'(a)^2 - 4 \frac{M}{2} f(a) \leq 0$$

D'où $f'(a)^2 \leq 2Mf(a)$. Puis par croissance de la fonction racine carré, on a $|f'(a)| \leq \sqrt{2Mf(a)}$.

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0, 1[, \quad \varphi^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{4^n n!} (1-x)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0, 1[$, montrer que

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(t) dt$$

1. Notons $K = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$, ce qui est licite, car f est continue sur le segment $[0, 1]$.

On a

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \int_0^1 t^n f(t) dt \right| &\leq \int_0^1 |t^n f(t)| dt \quad \text{inég. triangulaire} \\ &\leq \int_0^1 t^n |f(t)| dt \quad \text{à vous} \\ &\leq K \int_0^1 t^n dt \quad \text{définition de } K, \text{ et croissance de l'intégrale} \\ &\leq K \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Le membre droit tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$.

D'après le théorème des Gendarmes, on en déduit que

$$\int_0^1 t^n f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

2. Les calculs de la question précédente montrent que

$$\left| \int_0^1 t^n f(t) dt \right| \leq K \frac{1}{n+1} \quad \text{où } K = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

ce qui est exactement la définition de $\int_0^1 t^n f(t) dt = O\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

Et comme $\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$, on a aussi

$$\int_0^1 t^n f(t) dt = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Remarque. Le « en fait » dans la question s'explique par le fait que l'on peut retrouver le résultat de la première question.

En effet, comme $\frac{1}{n} = o(1)$, un grand O de $\frac{1}{n}$ est un $o(1)$, d'où $\int_0^1 t^n f(t) dt = o(1)$.

3. Montrons que $\int_0^{1-\delta} t^n f(t) dt = o\left(\frac{1}{n}\right)$ c'est-à-dire $\int_0^{1-\delta} nt^n f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On a

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{1-\delta} nt^n f(t) dt \right| &\leq \int_0^{1-\delta} nt^n |f(t)| dt \quad \text{par inég. triangulaire} \\ &\leq K \int_0^{1-\delta} nt^n dt \quad \text{où } K = \max_{x \in [0,1]} |f(x)| \end{aligned}$$

Or

$$\int_0^{1-\delta} nt^n dt = \left[\frac{n}{n+1} t^{n+1} \right]_0^{1-\delta} = \frac{n}{n+1} (1-\delta)^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{car } 1-\delta \in [0, 1[$$

D'après le théorème des Gendarmes, on obtient $\int_0^{1-\delta} nt^n f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Autre façon de présenter la preuve. On a

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{1-\delta} t^n f(t) dt \right| &\leq \int_0^{1-\delta} t^n |f(t)| dt \quad \text{par inég. triangulaire} \\ &\leq \max_{[0,1]} |f(t)| \underbrace{\int_0^{1-\delta} t^n dt}_{\text{car } f \text{ est continue}} \\ &= \frac{1}{n+1} (1-\delta)^{n+1} \quad \text{calcul} \\ &= o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{car } (1-\delta)^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\left| \int_0^{1-\delta} t^n f(t) \, dt \right| \leq \text{qq-chose qui est un } o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Donc (WHY) :

$$\int_0^{1-\delta} t^n f(t) \, dt = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

1. On suppose f classe $\mathcal{C}^1$.

Étape 1. Un calcul exact à n fixé.

On pose $u : t \mapsto \frac{1}{n+1}t^{n+1}$ et $v = f$ qui sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Une intégration par parties donne

$$\int_0^1 t^n f(t) dt = \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} f(t) \right]_0^1 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} f'(t) dt$$

d'où

$$(\clubsuit) \quad \int_0^1 t^n f(t) dt = \frac{f(1)}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} f'(t) dt$$

Étape 2. Un calcul asymptotique.

Montrons que $\int_0^1 t^{n+1} f'(t) dt = o_{n \rightarrow +\infty}(1)$, c'est-à-dire montrons que la suite tend vers 0.

Justification. Comme f' est continue (car f est de classe $\mathcal{C}^1$), cela relève de l'exercice 126, qu'il faut être capable de refaire rapidement.

Cela se résume à :

$$\left| \int_0^1 t^{n+1} f'(t) dt \right| \leq \max_{[0,1]} |f'| \underbrace{\int_0^1 t^{n+1} dt}_{\frac{1}{n+2}}$$

Et on termine avec le théorème des Gendarmes.

En multipliant par $\frac{1}{n+1}$, on a alors $\frac{1}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} f'(t) dt = o\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

Comme $\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$, on a aussi

$$\frac{1}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} f'(t) dt = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Grâce à $(\clubsuit)$, on en déduit

$$\int_0^1 t^n f(t) dt = \frac{f(1)}{n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On termine en faisant apparaître $\frac{f(1)}{n}$:

$$\int_0^1 t^n f(t) dt = \frac{f(1)}{n} + \left(\frac{f(1)}{n+1} - \frac{f(1)}{n} \right) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et en constatant que $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$, qui vaut $\frac{-1}{n(n+1)}$, est négligeable devant $\frac{1}{n}$.

Ainsi,

$$\int_0^1 t^n f(t) dt = \frac{f(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

D'où le résultat.

2. (a) On fixe $\varepsilon > 0$.

• **Première étape : existence de δ .**

Comme f est continue en 1, il existe $\delta' > 0$, tel que

$$\forall t \in [1 - \delta', 1 + \delta'] \cap [0, 1], \quad |f(t) - \underbrace{f(1)}_{=0}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

En posant $\delta = \min(\delta', 1)$, on a

$$\forall t \in [1 - \delta, 1], \quad |f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \int_{1-\delta}^1 nt^n f(t) dt \right| &\leq \int_{1-\delta}^1 nt^n |f(t)| dt \quad \text{inég. triangulaire (avec des bornes ordonnées)} \\ &\leq \int_{1-\delta}^1 nt^n \frac{\varepsilon}{2} dt \quad \text{inég. précédente et croissance de l'intégrale} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{1-\delta}^1 nt^n dt \end{aligned}$$

Or

$$\int_{1-\delta}^1 nt^n dt = \left[\frac{n}{n+1} t^{n+1} \right]_{1-\delta}^1 = \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\leq 1} \underbrace{\left(1 - (1-\delta)^{n+1} \right)}_{\leq 1} \leq 1$$

Bilan. On a montré qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \int_{1-\delta}^1 nt^n f(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

• **Deuxième étape : existence de n_0 .**

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la relation de Chasles, on a

$$\int_0^1 nt^n f(t) dt = \int_0^{1-\delta} nt^n f(t) dt + \int_{1-\delta}^1 nt^n f(t) dt$$

D'après l'inégalité triangulaire chez $\mathbb{R}$, on a

$$\left| \int_0^1 nt^n f(t) dt \right| \leq \left| \int_0^{1-\delta} nt^n f(t) dt \right| + \left| \int_{1-\delta}^1 nt^n f(t) dt \right|$$

Grâce à la première étape, on a donc :

$$(\diamond) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \int_0^1 nt^n f(t) dt \right| \leq \left| \int_0^{1-\delta} nt^n f(t) dt \right| + \frac{\varepsilon}{2}$$

Or d'après l'exercice 126 (qu'il faut savoir refaire), on sait que $\left| \int_0^{1-\delta} nt^n f(t) dt \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Par définition epsilonlesque de la limite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad \left| \int_0^{1-\delta} nt^n f(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

En reprenant $(\diamond)$, on obtient ce qu'il fallait prouver :

$$\forall n \geq n_0, \quad \left| \int_0^1 nt^n f(t) dt \right| \leq \varepsilon$$

(b) À la question précédente, on a montré

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad \left| \int_0^1 nt^n f(t) dt \right| \leq \varepsilon$$

Autrement dit, comme $f(1) = 0$, on a montré

$$\int_0^1 nt^n f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(1)$$

3. On se ramène à une fonction g continue telle que $g(1) = 0$ en posant $g : x \mapsto f(x) - f(1)$.

La question précédente montre alors que

$$\int_0^1 nt^n g(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On a

$$\begin{aligned} \int_0^1 nt^n f(t) \, dt &= \int_0^1 nt^n g(t) \, dt + \int_0^1 nt^n f(1) \, dt \quad \text{car } f(t) = g(t) + f(1) \\ &= \underbrace{\int_0^1 nt^n g(t) \, dt}_{\rightarrow 0} + f(1) \underbrace{\int_0^1 nt^n \, dt}_{\rightarrow 1} \quad \text{car } \int_0^1 nt^n \, dt = \left[\frac{n}{n+1} t^{n+1} \right]_0^1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \\ &\quad \text{confer l'exercice 115 (vii)} \end{aligned}$$

Par somme de limites, on a

$$\int_0^1 nt^n f(t) \, dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(1)$$

1. Montrons que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 1.

Remarque. En ayant regardé plus loin que le bout de son nez, on comprend qu'il suffit de répondre à la deuxième question pour conclure. Mais faisons comme si c'était un exercice d'oral avec des questions données au fur et à mesure. Répondons donc sagement à la première question.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a

$$\begin{aligned}
 |I_n - 1| &= \left| \int_0^1 \frac{1}{1+t^n} dt - 1 \right| \\
 &= \left| \int_0^1 \frac{1}{1+t^n} dt - \int_0^1 1 dt \right| \\
 &= \left| \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^n} - 1 \right) dt \right| \\
 &= \left| \int_0^1 \frac{-t^n}{1+t^n} dt \right| \\
 &\leq \int_0^1 \left| \frac{-t^n}{1+t^n} \right| dt \quad \text{inég. triangulaire} \\
 &\stackrel{\text{why}}{\leq} \frac{1}{1+0^n} \int_0^1 t^n dt
 \end{aligned}$$

Résumons. On a montré

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |I_n - 1| \leq \frac{1}{n+1}$$

D'après le théorème des Gendarmes, on en déduit que $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Remarque. Au cours du calcul, on obtient l'égalité $I_n - 1 = \int_0^1 t^n \varphi_n(t) dt$ avec $\varphi_n : t \mapsto \frac{-1}{1+t^n}$. On serait tenté d'appliquer l'exercice 126, mais ce n'est pas possible car φ_n dépend de n .

2. Il s'agit de montrer que

$$I_n - 1 = -\frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

c'est-à-dire

$$I_n - 1 \sim -\frac{\ln 2}{n}$$

Étape 1. Un calcul exact à n fixé.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ (le fait que n soit non nul sera utile après).

Reprenons les calculs de la question précédente :

$$I_n - 1 = \int_0^1 \frac{-t^n}{1+t^n} dt$$

En louchant sur l'énoncé, on comprend qu'il faut faire apparaître du logarithme.

On propose donc l'écriture suivante :

$$I_n - 1 = \frac{-1}{n} \int_0^1 \frac{nt^{n-1}}{1+t^n} t dt$$

Posons $u_n : t \mapsto \ln(1+t^n)$ et $v_n : t \mapsto t$ qui sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Une intégration par parties fournit alors

$$I_n - 1 = \frac{-1}{n} \left[\ln(1+t^n) t \right]_0^1 + \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+t^n) dt$$

D'où

$$(\clubsuit) \quad I_n - 1 = -\frac{\ln 2}{n} + \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+t^n) dt$$

Étape 2. Un calcul asymptotique.

Montrons que $\int_0^1 \ln(1+t^n) dt = o(1)$.

Une façon simple de le montrer est d'utiliser l'inégalité de convexité

$$\forall x \in [0, 1], \quad \ln(1+x) \leq x$$

avec $x = t^n$ qui est bien dans $[0, 1]$ lorsque t décrit $[0, 1]$.

Bref, on a

$$\forall t \in [0, 1], \quad 0 \leq \ln(1+t^n) \leq t^n$$

Par croissance de l'intégrale, on a alors $0 \leq \int_0^1 \ln(1+t^n)dt \leq \underbrace{\int_0^1 t^n dt}_{\frac{1}{n+1}}$.

Le théorème des Gendarmes fournit $\int_0^1 \ln(1+t^n)dt = o(1)$.

En multipliant par $\frac{1}{n}$, on a alors $\int_0^1 \ln(1+t^n)dt = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Grâce à ($\clubsuit$), on en déduit

$$I_n - 1 = -\frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Posons $u_n = \left(\int_a^b |f(t)|^n dt \right)^{\frac{1}{n}}$ et $M = \max_{[a,b]} |f|$.

Montrons que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} M$ en revenant à la définition epsilonlesque.

- Par définition de M et par croissance de $x \mapsto x^n$ sur $[0, +\infty[$, on a

$$\forall t \in [a, b], \quad |f(t)|^n \leq M^n$$

On a alors (WHY ?)

$$u_n \leq (b-a)^{\frac{1}{n}} M$$

- Soit $\varepsilon > 0$ fixé une fois pour toute.

Il existe x_0 vérifiant $|f(x_0)| = M$ (WHY ?). Par continuité de $|f|$ en x_0

$$\exists \eta > 0, \quad \forall t \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \subset [a, b], \quad |f(t)| \geq M - \frac{\varepsilon}{2}$$

Pour alléger les notations, posons $\alpha = x_0 - \eta$ et $\beta = x_0 + \eta$. On a alors (WHY ?)

$$(M - \frac{\varepsilon}{2})(\beta - \alpha)^{\frac{1}{n}} = \left(\int_{\alpha}^{\beta} (M - \frac{\varepsilon}{2})^n dt \right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\int_{\alpha}^{\beta} |f(t)|^n dt \right)^{\frac{1}{n}} \leq u_n$$

- On a alors

$$(\heartsuit) \quad (M - \frac{\varepsilon}{2})(\beta - \alpha)^{\frac{1}{n}} \leq u_n \leq (b-a)^{\frac{1}{n}} M$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (M - \frac{\varepsilon}{2})(\beta - \alpha)^{\frac{1}{n}} = M - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (b-a)^{\frac{1}{n}} M = M$$

Ainsi, il existe n_1 et n_2 tels que :

$$\forall n \geq n_1, \quad M - \varepsilon \leq (M - \frac{\varepsilon}{2})(\beta - \alpha)^{\frac{1}{n}} \quad \text{et} \quad \forall n \geq n_2, \quad (b-a)^{\frac{1}{n}} M \leq M + \varepsilon$$

- En posant $n_0 = \max(n_1, n_2)$, on a grâce à $(\heartsuit)$:

$$\forall n \geq n_0, \quad M - \varepsilon \leq u_n \leq M + \varepsilon$$

BILAN. On a prouvé

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad M - \varepsilon \leq u_n \leq M + \varepsilon$$

c'est-à-dire $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} M$.

- $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2}$

Ce n'est pas une somme de Riemann (mais b_n en est une).

Par une majoration naïve (confer l'exo 132), on obtient facilement que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

- $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$

C'est une somme de Riemann. Confer l'exo 132.

On trouve $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$.

- $c_n = \sum_{k=1}^n \frac{n^2}{n^2 + k^2}$

Ce n'est pas une somme de Riemann. Mais on peut la relier directement à la somme b_n .

On trouve $c_n = nb_n$. Donc $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Autre justification. Sans somme de Riemann, de manière élémentaire (niveau Terminale).

On a

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \frac{n^2}{n^2 + n^2} \leq \frac{n^2}{n^2 + k^2}$$

Par somme, on a

$$n \frac{1}{2} \leq b_n$$

Par minoration, on obtient directement $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

- $d_n = \sum_{k=1}^n \frac{(2k)^2}{n^3 + (2k)^3}$

C'est une somme de Riemann. On a $d_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{4\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1 + 8\left(\frac{k}{n}\right)^3}$.

D'après le théorème des sommes de Riemann (la fonction qui intervient est continue sur

$[0, 1]$), on a $d_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{4t^2}{1 + 8t^3} dt$.

On trouve facilement une primitive de la fonction intégrée (penser à $t \mapsto \frac{1}{6} \ln(1 + 8t^3)$).

On obtient que $d_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \ln 3$.

- $e_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^2 \sin(\pi x) dx$

Par une double IPP, on obtient $e_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2 - 4}{\pi^3}$.

- $f_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$

On a

$$f_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \underbrace{\sqrt{\frac{k}{n}}}_{f\left(\frac{k}{n}\right)}$$

On reconnaît donc une somme de Riemann associée à la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ qui est continue sur $[0, 1]$.

Ainsi, $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sqrt{t} dt$.

Calculons cette intégrale (ne pas hésiter à écrire $\sqrt{t}$ sous la forme $t^{\frac{1}{2}}$) :

$$\int_0^1 \sqrt{t} dt = \left[\frac{1}{\frac{1}{2} + 1} t^{\frac{1}{2} + 1} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

D'où

$$f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{3}$$

- $g_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \lfloor \sqrt{k} \rfloor$

On a

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sqrt{k} - 1 \leq \lfloor \sqrt{k} \rfloor \leq \sqrt{k}$$

Par somme, et multiplication par $\frac{1}{n\sqrt{n}}$, on en déduit (en notant toujours f_n la suite du point précédent) :

$$f_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq g_n \leq f_n$$

D'après le point précédent, on a $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{3}$.

Le théorème des Gendarmes montre que $g_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{3}$.

- $h_n = \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{\sqrt{\left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^3}}$

La somme $h_n = \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{\sqrt{\left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^3}}$ est du type $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ avec $f : x \mapsto \frac{x^3}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$ qui

est continue sur $[0, 1]$.

D'après le théorème des sommes de Riemann, la limite cherchée vaut $\int_0^1 f$.

Pour calculer l'intégrale proposée, il est bon de remarquer que :

$$\frac{x}{\sqrt{(1+x)^3}} = \frac{(1+x) - 1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}$$

D'où

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{(1+x)^3}} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} \right) dx = \left[\frac{1}{\frac{-1}{2} + 1} (1+x)^{\frac{-1}{2} + 1} - \frac{1}{\frac{-3}{2} + 1} (1+x)^{\frac{-3}{2} + 1} \right]_0^1$$

C'est-à-dire

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{(1+x)^3}} dx = \left[2\sqrt{1+x} + 2\frac{1}{\sqrt{1+x}} \right]_0^1 = \left(2\sqrt{2} + 2\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - (2 + 2) = 3\sqrt{2} - 4$$

D'où

$$h_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 3\sqrt{2} - 4$$

- $i_n = \left(\frac{(2n)!}{n! n^n} \right)^{\frac{1}{n}}$

On a

$$i_n = \exp \left[\frac{1}{n} \ln \left(\frac{(2n)!}{n! n^n} \right) \right] \stackrel{\text{WHY}}{=} \exp \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{n+k}{n} \right) \right] = \exp \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right]$$

La fonction $f : t \mapsto \ln(1+t)$ est continue sur $[0, 1]$. D'après le théorème des sommes de Riemann, on en déduit que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \ln(1+t) dt$$

Une primitive de $t \mapsto \ln(1+t)$ est $t \mapsto (1+t) \ln(1+t) - t$ (dériver pour s'en convaincre ; une autre stratégie consiste à effectuer une IPP pour calculer l'intégrale).

Ainsi

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2 \ln 2 - 1 = \ln 4 - 1 = \ln \left(\frac{4}{e} \right)$$

Par composition de limites avec la fonction exponentielle, on obtient que

$$i_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{e}$$

On constate que

$$\frac{n+k}{n^2+k} = \frac{1}{n} \times \frac{1+\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n^2}} \quad \text{ne s'écrit PAS sous la forme } \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Encadrons le dénominateur de chaque terme :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \frac{n+k}{n^2+n} \leq \frac{n+k}{n^2+k} \leq \frac{n+k}{n^2+1}$$

Par somme et en utilisant que $S_n = \sum_{k=1}^n (n+k)$ est la somme des termes d'une suite arithmétique, on obtient :

$$\frac{1}{n^2+n} \times S_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k} \leq \frac{1}{n^2+1} \times S_n \quad \text{où } S_n = \frac{(3n+1)n}{2}$$

Les deux termes extrêmes tendent vers $\frac{3}{2}$, donc le théorème des Gendarmes assure que la limite cherchée existe et vaut $\frac{3}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad 0 \leq \frac{1}{n^2 + k^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Par somme, on a

$$0 \leq S_n \leq \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2}}_{=\frac{1}{n}}$$

On a donc montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq S_n \leq \frac{1}{n}$$

D'après le théorème des Gendarmes, on en déduit que $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

La somme ressemble à une somme de Riemann, mais n'en est pas une !

Considérons la suite de terme général nS_n . Cette fois, c'est une somme de Riemann car :

$$nS_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k^2}{n^2}}$$

C'est une somme de Riemann associée à la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ qui est continue sur $[0, 1]$. Le théorème des sommes de Riemann fournit alors :

$$nS_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^1 f = \frac{\pi}{4}$$

On en déduit alors l'équivalent

$$S_n \sim \frac{\pi}{4} \frac{1}{n}$$

Justification On rappelle qu'une suite convergente de limite *non nulle* est équivalente à sa limite.

On a donc $nS_n \sim \frac{\pi}{4}$. Puis une division par n (ou une multiplication par $\frac{1}{n}$) fournit $S_n \sim \frac{\pi}{4} \frac{1}{n}$.

Par le théorème des sommes de Riemann appliqué à la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^\alpha & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

qui est continue sur $[0, 1]$, on a

$$\frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_{k=1}^n k^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha + 1}$$

On en déduit que (on utilise ici que la limite précédente est non nulle) :

$$\sum_{k=1}^n k^\alpha \sim \frac{1}{\alpha + 1} n^{\alpha+1}$$

Posons $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ qui est **croissante** sur $[0, 1[$.

En reprenant les mêmes idées de la preuve de 102, on a

$$\frac{1}{n}f(0) + \int_0^{1-\frac{1}{n}} f \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_0^{1-\frac{1}{n}} f + \frac{1}{n}f\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

Deux petits calculs montrent que

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} f = \left[\operatorname{Arcsin} t \right]_0^{1-\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n}f\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Le théorème des Gendarmes montre que $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$.

1. Par somme de nombres réels positifs, on a

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad a \cos^2 t + b \sin^2 t \geq 0$$

Reste à montrer que pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, la quantité $a \cos^2 t + b \sin^2 t$ n'est pas nulle.

Une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si ces nombres sont nuls, d'où les équivalences :

$$a \cos^2 t + b \sin^2 t = 0 \iff \begin{cases} a \cos^2 t = 0 \\ b \sin^2 t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos t = 0 \\ \sin t = 0 \end{cases}$$

La dernière assertion étant fausse, la première l'est aussi.

On a donc montré que

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad a \cos^2 t + b \sin^2 t \geq 0 \quad \text{et} \quad a \cos^2 t + b \sin^2 t \neq 0$$

Ainsi, le logarithme est bien défini.

De plus, la fonction intégrée est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Donc le réel $I(a, b)$ est bien défini.

2. On a

$$I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a \cos^2 t + b \sin^2 t) dt$$

Effectuons le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - x$ (la fonction $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$) :

$$I(a, b) = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln\left(a \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + b \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) (-1) dx$$

D'après les formules de trigonométrie, on obtient

$$I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a \sin^2 x + b \cos^2 x) dx$$

ce qui montre que $I(a, b) = I(b, a)$.

3. Procédons par disjonction de cas.

Cas 1 : $a \leq b$

On a alors

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \underbrace{a \cos^2 t + a \sin^2 t}_a \leq a \cos^2 t + b \sin^2 t \leq \underbrace{b \cos^2 t + b \sin^2 t}_b$$

Appliquons la fonction logarithme qui est croissante :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \ln a \leq \ln(a \cos^2 t + b \sin^2 t) \leq \ln b$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient

$$\frac{\pi}{2} \ln a \leq I(a, b) \leq \frac{\pi}{2} \ln b$$

Dans ce cas, on a $\min(a, b) = a$ et $\max(a, b) = b$, d'où

$$\frac{\pi}{2} \ln(\min(a, b)) \leq I(a, b) \leq \frac{\pi}{2} \ln(\max(a, b))$$

Cas 2 : $b \leq a$

D'après le cas 1, on en déduit que

$$\frac{\pi}{2} \ln(\min(b, a)) \leq I(b, a) \leq \frac{\pi}{2} \ln(\max(b, a))$$

On termine en utilisant le fait que $I(b, a) = I(a, b)$ d'après la question 2, et le fait que $\min(b, a) = \min(a, b)$ et idem pour max.

4. On utilise la question 2, la linéarité de l'intégrale et le fait que la somme de logarithme est le logarithme du produit et on obtient :

$$2I(\alpha, \beta) = I(\alpha, \beta) + I(\beta, \alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left[(\alpha \cos^2 t + \beta \sin^2 t)(\beta \cos^2 t + \alpha \sin^2 t) \right] dt$$

Pour conclure, il suffit de montrer que, pour tout t , on a

$$(\alpha \cos^2 t + \beta \sin^2 t)(\beta \cos^2 t + \alpha \sin^2 t) = \alpha\beta \cos^2(2t) + \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 \sin^2(2t)$$

Cette dernière égalité relève d'un petit exercice de trigonométrie.

Allons-y.

En développant le membre gauche, on tombe sur

$$\alpha\beta(\cos^4 t + \sin^4 t) + (\alpha^2 + \beta^2) \cos^2 t \sin^2 t$$

En ajoutant et soustrayant $2\alpha\beta \cos^2 t \sin^2 t$, on obtient :

$$\alpha\beta(\cos^4 t - 2\cos^2 t \sin^2 t + \sin^4 t) + (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) \cos^2 t \sin^2 t$$

c'est-à-dire :

$$ab(\cos^2 t - \sin^2 t)^2 + (\alpha + \beta)^2 \left(\frac{1}{2} \sin(2t)\right)^2$$

D'où $\alpha\beta \cos^2(2t) + \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 \sin^2(2t)$, ce qui est le membre droit !

5. D'après la question 4, on a :

$$2I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left[ab \cos^2(2t) + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \sin^2(2t) \right] dt$$

Effectuons le changement de variable $x = 2t$:

$$2I(a, b) = \int_0^{\pi} \ln \left[ab \cos^2 x + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \sin^2 x \right] \frac{1}{2} dx$$

Multiplions par 2 et utilisons la relation de Chasles, on obtient :

$$4I(a, b) = \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left[ab \cos^2 x + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \sin^2 x \right] dx}_{=I\left(ab, \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln \left[ab \cos^2 x + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \sin^2 x \right] dx$$

Prenons l'intégrale de droite et effectuons le changement de variable $x = y - \frac{\pi}{2}$ (la fonction $y \mapsto y - \frac{\pi}{2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$).

On obtient

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln \left[ab \cos^2 x + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \sin^2 x \right] dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left[ab \cos^2 \left(y + \frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \sin^2 \left(y + \frac{\pi}{2}\right) \right] dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left[ab(-\sin y)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cos^2 y \right] dy && \text{trigo} \\ &= I\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2, ab\right) \\ &= I\left(ab, \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right) && \begin{array}{l} \text{d'après 2 avec} \\ \alpha = ab \\ \text{et} \\ \beta = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \end{array} \end{aligned}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 5 avec $\alpha = u_n$ et $\beta = v_n$, on a

$$2I(u_n, v_n) = I(u_{n+1}, v_{n+1})$$

Par récurrence, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I(u_n, v_n) = 2^n I(a, b)$$

7. On constate que $w_{n+1} = w_n^2$ (idem pour w'_n). Par récurrence, on en déduit

$$(\star) \quad \forall n \in \mathbb{N}, w_n = w_0^{2^n} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, w'_n = w_0'^{2^n}$$

Rédigeons la récurrence pour la suite (w_n) .

Initialisation. Comme $2^0 = 1$, on a $w_0 = w_0^{2^0}$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $w_n = w_0^{2^n}$.

Montrons que $w_{n+1} = w_0^{2^{n+1}}$.

On a $w_{n+1} = w_n^2$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a donc

$$w_{n+1} = (w_0^{2^n})^2 = w_0^{2^n \times 2} = w_0^{2^{n+1}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Reprenons $(\star)$.

En posant $\sigma = \frac{\sqrt{b} + \sqrt{a}}{2}$ qui est w_0 et $\delta = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{2}$ qui est w'_0 , on a donc :

$$\frac{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}}{2} = \sigma^{2^n} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}}{2} = \delta^{2^n}$$

Par somme et différence, on en déduit

$$\sqrt{v_n} = \sigma^{2^n} + \delta^{2^n} \quad \text{et} \quad \sqrt{u_n} = \sigma^{2^n} - \delta^{2^n}$$

d'où

$$\sqrt{v_n} = \left(\frac{\sqrt{b} + \sqrt{a}}{2} \right)^{2^n} + \left(\frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{2} \right)^{2^n} \quad \text{et} \quad \sqrt{u_n} = \left(\frac{\sqrt{b} + \sqrt{a}}{2} \right)^{2^n} - \left(\frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{2} \right)^{2^n}$$

8. En posant $\sigma = \frac{\sqrt{b} + \sqrt{a}}{2}$ et $\delta = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{2}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{v_n} = \sigma^{2^n} + \delta^{2^n} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{u_n} = \sigma^{2^n} - \delta^{2^n}$$

En forçant la factorisation par σ , on a

$$\sqrt{v_n} = \sigma^{2^n} \left(1 + \left(\frac{\delta}{\sigma} \right)^{2^n} \right) \quad \text{et} \quad \sqrt{u_n} = \sigma^{2^n} \left(1 - \left(\frac{\delta}{\sigma} \right)^{2^n} \right)$$

En appliquant le log :

$$\frac{1}{2} \ln v_n = 2^n \ln \sigma + \ln \left(1 + \left(\frac{\delta}{\sigma} \right)^{2^n} \right)$$

En multipliant par $\frac{1}{2^{n-1}}$:

$$\frac{\ln v_n}{2^n} = 2 \ln \sigma + 2 \frac{1}{2^n} \ln \left(1 + \left(\frac{\delta}{\sigma} \right)^{2^n} \right)$$

Comme $\frac{\delta}{\sigma} \in]-1, 1[$ (cf. ci-dessous), on a $\left(\frac{\delta}{\sigma} \right)^{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Justification. Montrons que $\frac{\delta}{\sigma} \in]-1, 1[$.

Cela équivaut à

$$-1 \leq \frac{\delta}{\sigma} \leq 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad -\sigma \leq \delta \leq \sigma \quad \text{c'est-à-dire} \quad -\frac{\sqrt{b} + \sqrt{a}}{2} \leq \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{2} \leq \frac{\sqrt{b} + \sqrt{a}}{2}$$

C'est-à-dire encore

$$\begin{aligned} -(\sqrt{b} + \sqrt{a}) &\leq \sqrt{b} - \sqrt{a} & \text{et} & & \sqrt{b} - \sqrt{a} &\leq \sqrt{b} + \sqrt{a} \\ -\sqrt{b} &\leq \sqrt{b} & \text{et} & & -\sqrt{a} &\leq \sqrt{a} \end{aligned}$$

Ce qui est vrai !

De plus, $\frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Par somme de limites, on a donc $\frac{\ln v_n}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2 \ln \sigma$.

De la même façon, on a $\frac{\ln u_n}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2 \ln \sigma$.

D'après 3, on a

$$\frac{\pi}{2} \ln(\min(u_n, v_n)) \leq \underbrace{I(u_n, v_n)}_{=2^n I(a, b)} \leq \frac{\pi}{2} \ln(\max(u_n, v_n))$$

Comme la fonction $\ln$ est croissante, on a $\ln(\min(u_n, v_n)) = \min(\ln u_n, \ln v_n)$. Idem pour le max.

En divisant par 2^n , on a

$$(\spadesuit) \quad \frac{\pi}{2} \min\left(\frac{\ln u_n}{2^n}, \frac{\ln v_n}{2^n}\right) \leq I(a, b) \leq \frac{\pi}{2} \max\left(\frac{\ln u_n}{2^n}, \frac{\ln v_n}{2^n}\right)$$

Comme les suites $\left(\frac{\ln v_n}{2^n}\right)$ et $\left(\frac{\ln u_n}{2^n}\right)$ convergent vers $2 \ln \sigma$, on en déduit que le min et le max de ces deux suites convergent également vers $2 \ln \sigma$.

Remarque. Tiens, il faut savoir démontrer que

$$\begin{cases} \alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \\ \alpha'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell' \end{cases} \implies \max(\alpha_n, \alpha'_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \max(\ell, \ell')$$

Cela peut se faire en utilisant la formule $\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$.

Idem pour le min.

Ainsi, dans $(\spadesuit)$, les membres gauche et droit tendent vers $\pi \ln \sigma$.

D'après le théorème des Gendarmes, on obtient que la suite constante $(I(a, b))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\pi \ln \sigma$.

Par unicité de la limite, on obtient $I(a, b) = \pi \ln \sigma$.

Bilan :

$$I(a, b) = \pi \ln\left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}\right)$$

1. La fonction intégrée est continue sur $[0, 1]$, donc l'intégrale est bien définie.
2. (a) Une racine 8-ème de 16 est $\sqrt[8]{16}$.

Donc (WHY ?)

$$X^8 - 16 = \prod_{\zeta \in \mathbb{U}_8} (X - \sqrt[8]{16} \zeta)$$

Or l'ensemble des racines 8-ème de l'unité est

$$\mathbb{U}_8 = \left\{ 1, \omega, i, \omega', -1, \bar{\omega}', -i, \bar{\omega} \right\} \quad \text{où } \omega = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et } \omega' = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

D'où

$$X^8 - 16 = \underbrace{(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})}_{X^2 - 2} \underbrace{(X - \sqrt{2}i)(X + \sqrt{2}i)}_{X^2 + 2} \underbrace{(X - \sqrt{2}\omega)(X - \sqrt{2}\bar{\omega})}_{X^2 - 2X + 2} \underbrace{(X - \sqrt{2}\omega')(X - \sqrt{2}\bar{\omega}')}_{X^2 + 2X + 2}$$

Remarque. On a utilisé l'égalité très pratique suivante, où $z \in \mathbb{C}$

$$(X - z)(X - \bar{z}) = X^2 - (z + \bar{z})X + z\bar{z} = X^2 - 2\operatorname{Re}(z)X + |z|^2$$

On en déduit

$$X^8 - 16 = (X^2 - 2)(X^2 + 2)(X^2 - 2X + 2)(X^2 + 2X + 2)$$

Cette égalité n'est pas la factorisation en irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, puisque le polynôme $X^2 - 2$ est réductible (produit de deux polynômes de degré 1 dans $\mathbb{R}[X]$).

- (b) En posant la division euclidienne, on trouve

$$X^5 + X^4 + 2X^3 - 4 = (X^2 + 2)(X^3 + X^2 - 2)$$

Le polynôme de degré 3 admet nécessairement une racine *réelle*. Trouvons-en une ! À l'œil nu, on voit que 1 est racine, donc on a une égalité du type $X^3 + X^2 - 2 = (X - 1)(X^2 + \gamma X + 2)$, et on trouve $\gamma = 2$.

La factorisation en un produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ est

$$X^5 + X^4 + 2X^3 - 4 = (X^2 + 2)(X - 1)(X^2 + 2X + 2)$$

3. Fixons $t \in [0, 1]$. D'après ce qui précède, on a

$$\frac{t^5 + t^4 + 2t^3 - 4}{t^8 - 16} = \frac{(t^2 + 2)(t - 1)(t^2 + 2t + 2)}{(t^2 - 2)(t^2 + 2)(t^2 - 2t + 2)(t^2 + 2t + 2)}$$

qui après simplification vaut $\frac{t - 1}{(t^2 - 2)(t^2 - 2t + 2)}$.

Pour conclure, il reste à voir pourquoi

$$\frac{t - 1}{(t^2 - 2)(t^2 - 2t + 2)} = \frac{1}{4} \left(\frac{t}{t^2 - 2} - \frac{t - 2}{t^2 - 2t + 2} \right).$$

En considérant la parenthèse du membre droit et en réduisant au même dénominateur, on trouve un numérateur égal à

$$t(t^2 - 2t + 2) - (t - 2)(t^2 - 2) \quad \text{qui vaut } 4t - 4$$

D'où l'égalité.

4. On trouve facilement une primitive de chaque fonction intégrée. On a donc :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \frac{2x}{x^2 - 2} dx = \left[\ln |x^2 - 2| \right]_0^1 = -\ln 2 \\ I_2 &= \int_0^1 \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2} dx = \left[\ln |x^2 - 2x + 2| \right]_0^1 = -\ln 2 \\ I_3 &= \int_0^1 \frac{1}{\underbrace{x^2 - 2x + 2}_{(x-1)^2 + 1}} dx = \left[\operatorname{Arctan}(x - 1) \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

5. On a

$$\begin{aligned}\forall t \in [0, 1], \quad \frac{t^5 + t^4 + 2t^3 - 4}{t^8 - 16} &= \frac{1}{4} \left(\frac{t}{t^2 - 2} - \frac{t - 2}{t^2 - 2t + 2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \frac{2t}{t^2 - 2} - \frac{1}{2} \frac{2t - 2}{t^2 - 2t + 2} + \frac{1}{t^2 - 2t + 2} \right)\end{aligned}$$

D'où

$$I = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} I_1 - \frac{1}{2} I_2 + I_3 \right)$$

Comme $I_1 = I_2$, on a $I = \frac{1}{4} I_3$, d'où

$$I = \frac{\pi}{16}$$