Espace euclidien

27c-Euclidien.pdf, 14 mai 2023, 23:13

Dans tout le chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

I. Produit scalaire

Formes bilinéaires

1 **Définition.**
Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une application définie sur le produit cartésien $E \times E$ et à valeurs réelles.

- On dit que φ est *forme bilinéaire* lorsque :
  - pour tout $y_0 \in E$, l'application $x \mapsto \varphi(x, y_0)$ est une forme linéaire
  - pour tout $x_0 \in E$, l'application $y \mapsto \varphi(x_0, y)$ est une forme linéaire
- On dit que φ est *symétrique* lorsque :

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad \varphi(x, y) = \varphi(y, x).$$

- On dit que φ est *positive* lorsque :

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x, x) \geqslant 0$$

- On dit que φ est *définie positive* lorsqu'elle est positive et vérifie :

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x, x) = 0 \implies x = 0$$

- **Remarque imporante!** Pour montrer qu'une application est une *forme bilinéaire symétrique*, il suffit de montrer la symétrie, puis la linéarité par rapport à l'une des deux variables.
- **Vocabulaire.** Lorsque $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire, on dit souvent que c'est une forme bilinéaire *sur* E (plutôt que sur $E \times E$).
- **Exemples.** L'application φ_k est-elle bilinéaire, symétrique, positive, définie positive ?

$$\varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x_1 y_1 - x_1 y_2 + x_3 y_3 \end{array}$$

$$\varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_3 + x_2 y_2 \end{array}$$

$$\varphi_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \end{array}$$

$$\varphi_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3 \end{array}$$

2 **Définition.**

— Un *produit scalaire* sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E.

— Un *espace préhilbertien réel* est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

— Un *espace euclidien* est un espace préhilbertien réel de dimension finie.

Un espace euclidien est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

- **Vocabulaire.** Soit φ un produit scalaire sur E. Soit $(x,y) \in E \times E$. Le réel $\varphi(x,y)$ est appelé le produit scalaire de x et y. Il est noté généralement $(x \mid y)$ ou $x \cdot y$ ou $\langle x \mid y \rangle$.

  En géométrie (c'est-à-dire dans $\mathbb{R}^2$ ou dans $\mathbb{R}^3$), on utilise souvent la notation $\vec{u} \cdot \vec{v}$ pour désigner le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

- **Remarque** (sûrement étrange en première lecture ?!).
  Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel dont le produit scalaire est noté $\langle \mid \rangle$, alors l'application induite :

$$\begin{array}{ccc} F \times F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \langle x \mid y \rangle \end{array}$$

  est un produit scalaire sur F. On peut donc considérer F comme un espace préhilbertien réel pour ce produit scalaire qui sera encore noté $\langle \mid \rangle$.

3 **Proposition.**

— L'application suivante est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$:

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \big((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\big) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \end{array}$$

C'est le *produit scalaire canonique* sur $\mathbb{R}^n$.

— L'application suivante est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (A,B) & \longmapsto & \operatorname{tr}(A^\top B) \end{array}$$

C'est le *produit scalaire canonique* sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- **Le produit scalaire du lycée, sur $\mathbb{R}^2$.**
  Il s'agit de :
$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) & \longmapsto & \dots\dots\dots\dots \end{array}$$
  Mais, souvent, un vecteur de $\mathbb{R}^2$ se note $v = (x, y)$ plutôt que $v = (x_1, x_2)$, si bien que l'application a le visage suivant :
$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \big((x, y), (x', y')\big) & \longmapsto & \dots\dots\dots\dots \end{array}$$
- **$\mathbb{R}^n$ versus $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (le combat ligne/colonne).**
  L'application suivante est le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$:
$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \big((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\big) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \end{array}$$
  L'application suivante est le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:
$$\begin{array}{rccl} \psi : & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (X, Y) & \longmapsto & \operatorname{tr}(X^\top Y) \end{array}$$
  Après l'identification classique ligne/colonne, c'est-à-dire avec l'isomorphisme $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \end{array}$, ces deux produits scalaires φ et ψ se correspondent.

  Justification.

  Soit $X, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Notons $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ et $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ ces deux colonnes.

  Alors
$$\operatorname{tr}(X^\top Y) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

4
preuve

Exemples.

— L'application suivante est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$:
$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (P, Q) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t \end{array}$$

— L'application suivante est un produit scalaire sur $\mathscr{C}^0\big([a, b], \mathbb{R}\big)$:
$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathscr{C}^0\big([a, b], \mathbb{R}\big) \times \mathscr{C}^0\big([a, b], \mathbb{R}\big) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (f, g) & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f g \end{array}$$

Symétrie. Soit $(P, Q) \in E^2$. On a
$$\varphi(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 Q(t)P(t)\mathrm{d}t = \varphi(Q, P)$$

Bilinéarité. Soit $(P,Q,R) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Par linéarité de l'intégrale :

$$\varphi(\lambda P + \mu Q, R) \;=\; \lambda \int_0^1 P(t)R(t)\mathrm{d}t \;+\; \mu \int_0^1 Q(t)R(t)\mathrm{d}t \;=\; \lambda\varphi(P,R) + \mu\varphi(Q,R)$$

ce qui prouve que φ est linéaire par rapport à la première variable.
Comme φ est symétrique, on en déduit que φ est bilinéaire.

Positivité. Soit $P \in E$. Par positivité de l'intégrale, on a $\varphi(P,P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)^2 \mathrm{d}t \geqslant 0$.

Caractère défini. Soit $P \in E$ tel que $\varphi(P,P) = 0$, c'est-à-dire tel que $\displaystyle\int_0^1 P(t)^2 \mathrm{d}t \geqslant 0$.

La fonction $t \mapsto P(t)^2$ est continue (car polynomiale), positive et d'intégrale nulle.
Par le critère de nullité, cette fonction est nulle, donc $\forall\, t \in [0,1],\; P(t)^2 = 0$.
Ainsi, tous les réels du segment $[0,1]$ sont racines de P.
Donc P a une infinité de racines, donc P est le polynôme nul.

5 sol → 0 **Question.** Montrer que $\varphi : (f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 t f(t) g(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $E = \mathscr{C}^0\big([0,1],\mathbb{R}\big)$.

— Par linéarité de l'intégrale et commutativité du produit dans $\mathbb{R}$, l'application φ est une forme bilinéaire symétrique.

— Soit $f \in E$. Montrons que $\langle f \mid f \rangle \geqslant 0$.
On a $\varphi(f,f) = \displaystyle\int_0^1 t f(t)^2 \mathrm{d}t$. La fonction intégrée est positive, donc l'intégrale est un réel positif.

— Soit $f \in E$ tel que $\varphi(f,f) = 0$.
La fonction $t \mapsto t f(t)^2$ est continue, positive et d'intégrale nulle donc cette fonction est nulle.
On en déduit :

$$\forall\, x \in \,]0,1],\; f(x) = 0$$

Par continuité de f en 0, on en déduit que f est nulle sur $[0,1]$.

Norme associée à un produit scalaire

Soit E un espace préhilbertien réel dont le produit scalaire est noté $\langle\ |\ \rangle$.

6

Définition.

— La *norme associée au produit scalaire* $\langle\ |\ \rangle$ est l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \|x\| = \sqrt{\langle x \mid x\rangle} \end{array}$

— La *distance associée au produit scalaire* $\langle\ |\ \rangle$ est l'application $\begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x,y) & \longmapsto & \|x-y\| \end{array}$

- **Vocabulaire.** Une norme (resp. distance) associée à un produit scalaire est appelée *norme euclidienne* (resp. *distance euclidienne*). Vous verrez en Spé qu'il existe des normes qui ne sont pas associées à un produit scalaire.

Exemples.

- La norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ est ....

- La distance associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ est ....

- La norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est ....

7
preuve

Proposition (identités remarquables).
Soit E un espace préhilbertien réel dont on note $\langle\ |\ \rangle$ le produit scalaire, et $\|\ \|$ la norme associée.
Soit $x, y \in E$.

— On a $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x \mid y\rangle + \|y\|^2$ et $\langle x \mid y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$.

— On a l'identité du parallélogramme $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$

- Dans le premier point, la première identité se généralise :

$$\forall x,y\in E,\quad \forall \lambda,\mu\in\mathbb{R},\quad \|\lambda x+\mu y\|^2 = \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda\mu\langle x \mid y\rangle + \mu^2\|y\|^2$$

et la deuxième identité porte le nom de *formule de polarisation*.
Elle permet de retrouver le produit scalaire si l'on connaît la norme euclidienne.

On a :

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x+y \mid x+y\rangle \\ &= \langle x \mid x\rangle + \langle x \mid y\rangle + \langle y \mid x\rangle + \langle y \mid y\rangle && \text{(bilinéarité)} \\ &= \langle x \mid x\rangle + 2\langle x \mid y\rangle + \langle y \mid y\rangle, && \text{(caractère symétrique)} \end{aligned}$$

On a $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x \mid y\rangle + \|y\|^2$ et, en remplaçant y par $-y$, on obtient :

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x \mid y\rangle + \|y\|^2$$

En sommant ces deux égalités, on obtient

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$$

Cette égalité traduit le fait que, dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des deux diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des quatre côtés.

8 sol → 0 **Question.** Soit $x, y \in E$. Démontrer l'identité $\|x\|^2-\|y\|^2=\langle x+y \mid x-y\rangle$.

Partir du produit scalaire (le membre droit) et utiliser la bilinéarité. On obtient le membre gauche.

9 sol → 0 **Question.** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $\forall\, x \in E,\ \|f(x)\|=\|x\|$. Montrer que

$$\forall\,(x,y) \in E^2, \quad \langle f(x) \mid f(y)\rangle=\langle x \mid y\rangle$$

Soit $(x,y) \in E^2$. On a :

$$\begin{aligned}
\langle f(x) \mid f(y)\rangle &= \tfrac{1}{2}\left(\|f(x)+f(y)\|^2-\|f(x)\|^2-\|f(y)\|^2\right) && \text{formule de polarisation}\\
&= \tfrac{1}{2}\left(\|f(x+y)\|^2-\|f(x)\|^2-\|f(y)\|^2\right) && \text{linéarité de } f\\
&= \tfrac{1}{2}\left(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2\right) && \text{hypothèse}\\
&= \langle x \mid y\rangle. && \text{formule de polarisation}
\end{aligned}$$

Ainsi, un endomorphisme qui conserve la norme conserve le produit scalaire.

10 **Proposition (inégalité de Cauchy-Schwarz).**
La norme associée au produit scalaire $\langle \mid \rangle$ vérifie :

$$\forall\, x, y \in E, \quad \left|\langle x \mid y\rangle\right| \leqslant \|x\|\,\|y\|.$$

Cette inégalité est une égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Exemples.

- L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ s'écrit

  ....

- L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$ s'écrit

  ....

- L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire sur $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ défini par $\langle f \mid g\rangle = \displaystyle\int_a^b fg$ s'écrit

  ....

11 **Proposition (norme).**
La norme associée au produit scalaire $\langle \mid \rangle$ vérifie :

- ⋆ $\forall\, x \in E, \quad \|x\| = 0 \implies x = 0$ (séparation)
- ⋆ $\forall\, (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E, \quad \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ (homogénéité)
- ⋆ $\forall\, (x, y) \in E \times E, \quad \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)
  avec égalité si et seulement si x et y sont *positivement colinéaires* :

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad y = \alpha x \qquad \text{ou} \qquad \exists\, \beta \in \mathbb{R}^+, \quad x = \beta y.$$

- **Illustration dans** $\mathbb{R}^2$**.** L'inégalité triangulaire s'énonce

$$\forall\, (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \quad \|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

Conséquence. Dans un triangle, la longueur d'un côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres :

$$AC \leqslant AB + BC$$

12 **Proposition (seconde inégalité triangulaire).**
Soit $(x, y) \in E^2$. On a :

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\|.$$

13 **Proposition.**
La distance d associée au produit scalaire sur E vérifie pour tout $(x, y, z) \in E^3$:

- ⋆ $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (séparation)
- ⋆ $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie)
- ⋆ $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire)
- ⋆ $d(x, z) \geqslant \left|d(x, y) - d(y, z)\right|$ (seconde inégalité triangulaire)

II. Orthogonalité

Dans cette partie, E désigne un espace préhilbertien réel.
On note $\langle \mid \rangle$ le produit scalaire et $\|\ \|$ la norme associée.

14 **Définition.**

— On dit qu'un vecteur est *unitaire* lorsqu'il est de norme 1.

— On dit que deux vecteurs x et y de E sont *orthogonaux* lorsque $\langle x \mid y\rangle = 0$. On note alors $x \perp y$.

- Par symétrie du produit scalaire, si $\langle x \mid y\rangle = 0$, alors $\langle y \mid x\rangle = 0$.
  Ainsi, la relation d'orthogonalité est symétrique.

Des remarques.

- Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur de E.

- Le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à lui-même.

- Le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à tout vecteur de E.

  Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur de E (WHY). Réciproquement un vecteur orthogonal à tout vecteur de E est en particulier orthogonal à lui-même donc est nul d'après le point précédent.

Des exemples.

- Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, les vecteurs de la base canonique sont unitaires et orthogonaux deux à deux.

- Dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique, les vecteurs de la base canonique sont unitaires et orthogonaux deux à deux.

- Dans $\mathscr{C}^0([0,2\pi],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f \mid g\rangle = \displaystyle\int_0^{2\pi} fg$, montrer que les fonctions cos et sin sont orthogonales.

15 **Proposition (règle du losange).**
Soit E un espace préhilbertien réel dont on note $\langle \mid \rangle$ le produit scalaire, et $\| \|$ la norme associée.
Soit $x, y \in E$.

— On a $\|x\| = \|y\| \iff \langle x+y \mid x-y\rangle = 0$.
— On a $\langle x \mid y\rangle = 0 \iff \|x+y\| = \|x-y\|$.

16 **Théorème de Pythagore.** Soit $x, y \in E$.
On a l'équivalence :
$$x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

- **Illustration dans $\mathbb{R}^2$.** Pour $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, le théorème de Pythagore s'énonce
$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$
On retrouve le résultat du collège !
$$\text{le triangle } ABC \text{ est rectangle en } B \iff AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

17 **Définition.** Soit A une partie de E.
L'*orthogonal* de A est l'ensemble
$$A^\perp = \Big\{x \in E \mid \forall a \in A,\ \langle x \mid a\rangle = 0\Big\}.$$

- Ainsi, $A^\perp$ est l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs $a \in A$.
- **Reformulation.** Pour tout $a \in A$, on note $\varphi_a : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \langle x \mid a\rangle \end{array}$.
Alors on a :
$$A^\perp = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

18 **Proposition.** L'orthogonal d'une partie de E est un sous-espace vectoriel de E.

Exemples.

- L'orthogonal de $\{0_E\}$ est E.
- L'orthogonal de E est $\{0_E\}$.
- On a toujours $A \subset (A^\perp)^\perp$.
- Soit $a \in E \setminus \{0_E\}$ un vecteur non nul.
Alors $\{a\}^\perp$ est un hyperplan de E.

19
preuve

Proposition. Soit A et B deux parties de E. Alors :

$$A \subset B \implies B^{\perp} \subset A^{\perp}.$$

Supposons que $A \subset B$.
Montrons $B^{\perp} \subset A^{\perp}$.
Soit $b \in B^{\perp}$.
Montrons que $b \in A^{\perp}$, c'est-à-dire montrons que $\forall\, a \in A,\ \langle b \mid a \rangle = 0$.

Soit $a \in A$.
Comme $A \subset B$, on a $a \in B$.
Comme $b \in B^{\perp}$, ce vecteur b est orthogonal à tous les vecteurs de B en particulier est orthogonal à a.
D'où $\langle b \mid a \rangle = 0$.

20

Proposition. On a

$$\forall\, v_1, \dots, v_s \in E, \quad \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_s)^{\perp} = \left\{v_1, \dots, v_s\right\}^{\perp}$$

- Soit F un sev de E et $\mathscr{B}_F$ une base de F.
  Soit $x \in E$. Alors :

$$x \in F^{\perp} \iff \forall\, e \in \mathscr{B}_F,\ \langle x \mid e \rangle = 0.$$

Familles orthogonales et orthonormées

21 **Définition.**

— Une *famille orthogonale* de E est une famille de vecteurs de E deux à deux orthogonaux.

— Une *famille orthonormée* de E est une famille de vecteurs de E unitaires et deux à deux orthogonaux.

22 **Proposition.** Une famille orthogonale de vecteurs *non nuls* de E est libre.
En particulier, une famille orthonormée de E est libre.

- **Attention !** Une famille orthogonale est susceptible de contenir le vecteur nul donc l'hypothèse de non nullité est indispensable.

23 **Proposition.** Soit $(v_1,\dots,v_s)$ une famille de vecteurs de E.
Si $(v_1,\dots,v_s)$ est orthogonale, alors

$$\left\|\sum_{i=1}^{s} v_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{s}\|v_i\|^2.$$

24 preuve **Proposition (algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt).**
Soit $\mathscr{F}=(e_1,\dots,e_n)$ une famille *libre* de E.
Alors il existe une famille *orthonormée* $(f_1,\dots,f_n)$ de E telle que :

$$\forall\, p \in [\![1,n]\!],\quad \mathrm{Vect}\left(e_1,\dots,e_p\right) = \mathrm{Vect}\left(f_1,\dots,f_p\right).$$

Construisons la famille $(f_1,\dots,f_n)$ par récurrence.
Autrement dit, pour tout $p\in[\![1,n]\!]$, on note

$$\mathscr{H}_p :\quad \text{il existe } (f_1,\dots,f_p) \text{ orthonormée telle que } \forall\, k\in[\![1,p]\!],\ \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k) = \mathrm{Vect}\left(f_1,\dots,f_k\right).$$

Initialisation. On pose $f_1=\frac{e_1}{\|e_1\|}$.
Alors, (f_1) est une famille orthonormée vérifiant $\mathrm{Vect}(e_1)=\mathrm{Vect}(f_1)$.
D'où $\mathscr{H}_1$.

Hérédité. Soit $p\in[\![1,n-1]\!]$.
Supposons $\mathscr{H}_p$. Montrons $\mathscr{H}_{p+1}$.
D'après $\mathscr{H}_p$, il existe $(f_1,\dots,f_p)$ orthonormée telle que …

Idée. Il suffit de construire f_{p+1} tel que

— $f_{p+1}\in\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{p+1})$

— la famille $(f_1,\dots,f_{p+1})$ est orthonormée.

Car $(f_1,\dots,f_{p+1})$ sera une famille libre de $p+1$ vecteurs de $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{p+1})$, donc sera une base de cet espace, et on aura l'égalité convoitée.

On va commencer par construire un certain vecteur g_{p+1}

— non nul

— $g_{p+1}\in\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{p+1})$

— la famille $(f_1,\dots,f_p,g_{p+1})$ est orthogonale.

On pose

$$g_{p+1} = e_{p+1}-\sum_{k=1}^{p}\langle e_{p+1}\mid f_k\rangle\, f_k$$

Alors

— Le vecteur g_{p+1} est non nul (WHY ?).

Si g_{p+1} était nul, on aurait

$$e_{p+1} \in \mathrm{Vect}\left(f_1,\ldots,f_p\right) \overset{\mathscr{H}_p}{=} \mathrm{Vect}\left(e_1,\ldots,e_p\right)$$

ce qui contredit le fait que $(e_1,\ldots,e_p,e_{p+1})$ est libre.

— On a $g_{p+1} \in \mathrm{Vect}\left(f_1,\ldots,f_p,e_{p+1}\right)$, qui vaut $\mathrm{Vect}\left(e_1,\ldots,e_{p+1}\right)$ d'après $\mathscr{H}_p$.

— Le vecteur g_{p+1} est orthogonal à $f_1,\ldots,f_p$ car :

$$\forall\, j \in [\![1,p]\!], \quad \langle g_{p+1} \mid f_j\rangle \;=\; \langle e_{p+1} \mid f_j\rangle - \sum_{k=1}^{p} \langle e_{p+1} \mid f_k\rangle\langle f_k \mid f_j\rangle = 0.$$

On pose $f_{p+1} = \frac{g_{p+1}}{\|g_{p+1}\|}$.

Et on vérifie que

— $f_{p+1} \in \mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_{p+1})$

— la famille $(f_1,\ldots,f_{p+1})$ est orthonormée.

La famille $(f_1,\ldots,f_{p+1})$ est une famille orthonormée (donc libre) de $p+1$ vecteurs de $\mathrm{Vect}\left(e_1,\ldots,e_{p+1}\right)$. Elle en est donc une base donc

$$\mathrm{Vect}\left(f_1,\ldots,f_{p+1}\right) \;=\; \mathrm{Vect}\left(e_1,\ldots,e_{p+1}\right)$$

- **À retenir.** Le procédé de construction de la démonstration précédente est le suivant :

$$g_p = e_p - \sum_{k=1}^{p-1} \langle e_p \mid f_k\rangle\, f_k \quad \text{et} \quad f_p = \frac{g_p}{\|g_p\|}.$$

On l'appelle *l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.*

- **Remarque.** Si les premiers vecteurs de la famille $(e_1,\ldots,e_n)$ forment une famille orthonormée, alors il est facile de voir que l'algorithme de Gram-Schmidt les conserve.

25 preuve **Question.** Considérons la famille libre $\big((1,1),(1,0)\big)$ de l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^2$.
Lui appliquer l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

On pose $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$.

On pose

$$\begin{aligned} g_2 &= (1,0) - \langle (1,0) \mid f_1\rangle f_1 \\ &= (1,0) - \tfrac{1}{2}(1,1) \\ &= \tfrac{1}{2}(1,-1) \end{aligned}$$

Puis on pose $f_2 = \dfrac{g_2}{\|g_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$.

26 **Question.** Orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire (on verra en TD que c'est bien un produit scalaire) :

$$\langle P \mid Q\rangle \;=\; P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$$

27 **Définition.** Une *base orthonormée* de E est une base de E qui est une famille orthonormée.

- Dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, la base canonique est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
- Il en est de même dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique.

28 sol → 0 **Question.**
Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ des réels distincts.

1. Montrer que $\varphi : \begin{array}{rcl} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k) \end{array}$ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que la famille des polynômes de Lagrange associée aux réels $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une base orthonormée de E pour le produit scalaire φ.

1. — Symétrie, bilinéarité, positivité : à vous.
   — **Caractère défini.**
   Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\varphi(P, P) = 0$.
   Alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k)^2 = 0$.
   Donc $\forall k \in [\![0, n]\!], P(a_k) = 0$.
   Le polynôme P possède donc $n+1$ racines distinctes et est de degré au plus n.
   Donc $P = 0$.
2. Notons $(L_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ la famille des polynômes de Lagrange associée aux réels $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$.
   La famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (c'est une famille libre (WHY ?) de bon cardinal).
   Montrons qu'elle est orthonormée pour le produit scalaire φ.
   Soit $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$. On a :
   $$\varphi(L_i, L_j) = \sum_{k=0}^{n} L_i(a_k)L_j(a_k) = \sum_{k=0}^{n} \delta_{i,k}\delta_{j,k} = \delta_{i,j}.$$
   Ainsi, $(L_0, \dots, L_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire φ.

29 preuve **Proposition.** Un espace euclidien possède une base orthonormée.

Soit E un espace euclidien.
Considérons une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E (licite : tout espace vectoriel de dimension finie admet une base finie !).
D'après l'algorithme de Gram-Schmidt appliqué à cette famille (licite, car cette famille est libre), il existe une famille orthonormée $(f_1, \dots, f_n)$ de E (vérifiant une certaine condition).
La famille $(f_1, \dots, f_n)$ est donc libre et possède $n = \dim E$ éléments.
C'est donc une base de E.

Comme cette famille est orthonormée, c'est une base orthonormée de E.

30 **Proposition (expression dans une BON).**
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base *orthonormée* de E.

— Soit $x \in E$. On a

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle \, e_i.$$

— Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \, e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i \, e_i$ deux vecteurs de E.
Alors

$$\langle x \mid y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

En posant $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y)$, on a

$$\langle x \mid y \rangle = X^\top Y \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = X^\top X$$

- Il y a un léger abus de notation dans la dernière formulation.
À gauche de l'égalité, $\langle x \mid y \rangle$ est un réel, à droite $X^\top Y$ est une matrice carrée de taille 1.
On pourrait enlever cet abus de langage en utilisant la trace

$$\langle x \mid y \rangle = \mathrm{tr}(X^\top Y) \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \mathrm{tr}(X^\top X)$$

mais il faut aussi savoir gérer les abus de langage (nombreux en sciences).
- Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.
On rappelle que l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ x & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels de E sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Si l'on munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique, la proposition montre que cet isomorphisme conserve la norme et le produit scalaire.

31 sol → 0 **Question.** Soit E un espace euclidien muni d'une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.
Soit f une forme linéaire sur E.
Montrer qu'il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que $\quad \forall x \in E, \quad f(x) = \langle a \mid x \rangle$.
Et l'expliciter dans la base $\mathscr{B}$.

Analyse Supposons qu'il existe un vecteur $a \in E$ tel que....

Écrivons a sur la base $\mathscr{B}$, disons $a = \sum_{i=1}^{n} a_i \, e_i$.

Comme $\mathscr{B}$ est orthonormée, on a

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad a_i = \langle a \mid e_i \rangle$$

Par définition de f, on a alors $a_i = f(e_i)$.

Donc $a = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) \, e_i$.

Synthèse Posons $a = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) \, e_i$.

Comme $\mathscr{B}$ est orthonormée, la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de a dans $\mathscr{B}$ vaut $\langle a \mid e_i \rangle$.
D'autre part, cette $i^{\text{ème}}$ coordonnée vaut $f(e_i)$.
D'où $f(e_i) = \langle a \mid e_i \rangle$.
Alors les formes linéaires f et $x \mapsto \langle a \mid x \rangle$ coïncident sur la base $(e_1, \ldots, e_n)$ donc sont égales.

Autre preuve. On peut aussi considérer l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathscr{L}(E,\mathbb{R}) \\ a & \longmapsto & \langle a \mid \bullet \rangle \end{array}$$

C'est une application linéaire *injective* entre deux espaces vectoriels de même dimension finie.

Soit $a \in \operatorname{Ker}\varphi$. Alors $a \in E$ et $\varphi(a) = 0_{\mathscr{L}(E,\mathbb{R})}$.
Autrement dit, $\langle a \mid \bullet \rangle = 0$, donc pour tout $x \in E$, on a $\langle a \mid x \rangle = 0$.
En particulier, pour $x = a$, on obtient $\langle a \mid a \rangle = 0$, d'où $a = 0$ (d'après le caractère défini du produit scalaire).

Ainsi, φ est bijective, et on obtient qu'il existe un unique $a \in E$ tel que $f = \langle a \mid \bullet \rangle$.
On obtient donc l'existence et l'unicité du vecteur a cherché mais pas son expression.

III. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Dans cette partie, E désigne un espace préhilbertien réel.
On note $\langle \mid \rangle$ le produit scalaire et $\| \ \|$ la norme euclidienne associée.

Supplémentaire orthogonal

32 **Définition.**
Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont *orthogonaux* lorsque $\quad \forall (x, y) \in F \times G, \quad \langle x \mid y \rangle = 0.$

- **Reformulation.** L'orthogonalité de F et G est équivalente à $F \subset G^{\perp}$ (bien sûr, c'est aussi équivalent à $G \subset F^{\perp}$).
- **Fait.** Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors les sous-espaces vectoriels F et $F^{\perp}$ sont orthogonaux.
  En effet, par définition les éléments de $F^{\perp}$ sont orthogonaux à tous les éléments de F.

33 **Question.** Soit E un espace préhilbertien réel.
sol → 0
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels orthogonaux de E vérifiant $E = F \oplus G$.
Montrer que $G = F^{\perp}$ et $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

Montrons que $G = F^{\perp}$ par double inclusion.

— On a $G \subset F^{\perp}$, car F et G sont orthogonaux.

— Montrons l'autre inclusion.
Soit $x \in F^{\perp}$.
A fortiori $x \in E$ donc il existe $(a, b) \in F \times G$ tel que $x = a + b$.

Idée. On veut montrer que $x \in G$, autrement dit, on veut montrer que $a = 0$, ce qui revient à montrer que $\langle a \mid a \rangle = 0$ (par caractère défini du produit scalaire).

On a $x = a + b$.
En « effectuant le produit scalaire par a » (autrement dit, en appliquant $\langle \bullet \mid a \rangle$), on a

$$\langle x \mid a \rangle \ = \ \langle a \mid a \rangle + \langle b \mid a \rangle$$

Comme $x \in F^{\perp}$, on a $\langle x \mid a \rangle = 0$.
Comme F et G sont orthogonaux, on a $\langle b \mid a \rangle = 0$.
D'où $\langle a \mid a \rangle = 0$, d'où $a = 0$.
Ainsi, $x \in G$.

Bilan. On a donc montré $F^{\perp} = G$.

Comme F et G jouent des rôles symétriques, on obtient $G^{\perp} = F$.

En utilisant le fait que $G = F^\perp$, cela se réécrit $(F^\perp)^\perp = F$.

34 preuve

Proposition. Soit E un espace préhilbertien.
Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie.
Alors
$$E = F \oplus F^\perp$$
Autrement dit, F et $F^\perp$ sont supplémentaires.

- **En français.** Un sev de dimension finie et son orthogonal sont supplémentaires.
- **Vocabulaire.** Ainsi, $F^\perp$ est **un** supplémentaire de F, pourvu que F soit de dimension finie.
  C'est même **le** supplémentaire orthogonal de F.
  On note parfois
  $$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$$
- **À retenir.** Notons $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F.
  Un vecteur x de E possède une écriture unique sur la somme directe $F \oplus F^\perp$, à savoir :
  $$x = \sum_{k=1}^{p} \langle x \mid e_k \rangle e_k \quad + \quad \text{il n'y a plus le choix}$$
  Pour retenir cette formule, penser au cas où $x \in F$; dans ce cas, $x = x + 0$ et comme $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée, on a $x = \sum_{k=1}^{p} \langle x \mid e_k \rangle e_k$.

Comme F est de dimension finie, il possède une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$.
Soit $x \in E$.
Montrons qu'il existe un unique couple $(y, z) \in F \times F^\perp$ tel que $x = y + z$.
Pour cela, raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Supposons qu'il existe $(y, z) \in F \times F^\perp$ tel que $x = y + z$.

Idée. On cherche à exprimer y en fonction de x et $\mathscr{B}$.

En appliquant $\langle \bullet \mid e_k \rangle$, on a :
$$(\spadesuit) \qquad \forall\, k \in [\![1, p]\!], \quad \langle x \mid e_k \rangle = \langle y \mid e_k \rangle + \langle z \mid e_k \rangle$$

— Comme la base $\mathscr{B}$ est orthonormée, on a :
$$y = \sum_{k=1}^{p} \langle y \mid e_k \rangle\, e_k$$

— Comme $z \in F^\perp$ et $e_k \in F$, on a $\langle z \mid e_k \rangle = 0$.

D'où, en reprenant $(\spadesuit)$, on a $\langle y \mid e_k \rangle = \langle x \mid e_k \rangle$.
Ainsi,
$$y = \sum_{k=1}^{p} \langle x \mid e_k \rangle\, e_k$$

Autre rédaction de l'Analyse. Supposons qu'il existe $(y, z) \in F \times F^\perp$ tel que $x = y + z$.
Comme $\mathscr{B}$ est une base de F, le vecteur y s'écrit
$$y = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k\, e_k$$

Idée. On cherche à exprimer y, donc les λ_k en fonction de x et $\mathscr{B}$.

Fixons $i \in [\![1, n]\!]$. Appliquons $\langle \bullet \mid e_i \rangle$.
$$\langle x \mid e_i \rangle = \langle y \mid e_i \rangle + \langle z \mid e_i \rangle$$

— Comme la base $\mathscr{B}$ est orthonormée, on a :

$$\lambda_i = \langle y \mid e_i \rangle$$

— Comme $z \in F^\perp$ et $e_i \in F$, on a $\langle z \mid e_i \rangle = 0$.

Ainsi,

$$y = \sum_{k=1}^{p} \langle x \mid e_k \rangle \, e_k$$

Synthèse. Posons $y = \sum_{k=1}^{p} \langle x \mid e_k \rangle \, e_k$ et $z = x - y$.

Alors

- ⋆ $x = y + z$
- ⋆ $y \in F$ car $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.
- ⋆ $z \in F^\perp$ car

$$\forall\, i \in [\![1, p]\!], \quad \langle z \mid e_i \rangle \; = \; \langle x - y \mid e_i \rangle \; = \; \langle x \mid e_i \rangle - \langle y \mid e_i \rangle \; = \; 0$$

Justifions la dernière égalité.

Comme $(e_1, \dots, e_p)$ est une BON, y s'écrit $\sum_{k=1}^{p} \langle y \mid e_k \rangle e_k$.

Par unicité de l'écriture d'un vecteur dans une base, on a alors $\langle y \mid e_k \rangle = \langle x \mid e_k \rangle$.

35 sol → 0 **Question.** Soit $E = \mathscr{C}\big([0,1], \mathbb{R}\big)$ muni du produit scalaire usuel. Soit $F = \Big\{ f \in E \mid f(0) = 0 \Big\}$.
Montrer que $F^\perp = \{0\}$. A-t-on $F \oplus F^\perp = E$?

Soit $g \in F^\perp$. On a alors

$$(\star) \qquad \forall\, f \in F, \quad \langle f \mid g \rangle = 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \int_0^1 f g = 0$$

Idée. On veut montrer que $g = 0$.
Ce serait bien si l'on pouvait prendre pour fonction f la fonction g, car on aurait alors $\langle g \mid g \rangle = 0$, puis $g = 0$ (par le caractère défini du produit scalaire).
Mais aucune raison pour que g soit dans F.
On a donc l'idée de prendre $f : t \mapsto t g(t)$ qui est bien dans F.

Posons $f : t \mapsto t g(t)$. Cette fonction f est continue et vérifie $f(0) = 0$, donc $f \in F$.
On a alors d'après $(\star)$

$$\int_0^1 f g = 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \int_0^1 t g(t)\, g(t) = 0$$

La fonction $t \mapsto t g^2(t)$ est continue, positive et d'intégrale nulle.
D'après le critère de nullité, c'est la fonction nulle :

$$\forall\, t \in [0,1], \quad t g^2(t) = 0$$

D'où

$$\forall\, t \in \,]0,1], \quad g^2(t) = 0$$

Ainsi, la fonction $g_{|]0,1]}$ est la fonction nulle.
Par continuité de g en 0, on en déduit que g est la fonction nulle.

Bilan. On a montré l'inclusion $F^\perp \subset \{0\}$.
Comme l'autre inclusion est évidente, on a $F^\perp = \{0\}$.
Ainsi, $F \oplus F^\perp = F$.
Par ailleurs, on a évidemment $F \subsetneq E$ (il existe des fonctions continues qui ne s'annulent pas en 0), donc $F \oplus F^\perp \subsetneq E$.

36 preuve **Proposition (en dimension finie).** Soit E un espace *euclidien* (donc de dimension finie).
Soit F un sev de E. Alors

- $\dim F \; + \; \dim F^\perp \; = \; \dim E$
- $(F^\perp)^\perp = F$

Comme E est de dimension finie, il en est de même de F.

Alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires d'après 34.
On a alors (licite, car E est de dimension finie) l'égalité $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$.

On a toujours l'inclusion $F \subset (F^\perp)^\perp$.
En appliquant le premier point au sous-espace $F^\perp$, on a

$$\dim F^\perp + \dim (F^\perp)^\perp = \dim E$$

Or $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$.
En combinant ces deux égalités, on obtient $\dim F = \dim (F^\perp)^\perp$.
Par inclusion et égalité des dimensions, on en déduit $F = (F^\perp)^\perp$.

- Ici, E est un espace euclidien.

  Alors le supplémentaire orthogonal d'un hyperplan H est une droite D (ce n'est pas nécessairement le cas en dimension infinie, penser à l'exemple précédent).

  Tout vecteur dirigeant cette droite D (c'est-à-dire toute base de cette droite D) est appelé *vecteur normal* à H.

  Il existe deux vecteurs normaux *unitaires*, opposés l'un à l'autre.

37 **Proposition.**
Soit E un espace euclidien de dimension n.
Soit $p \in [\![0, n]\!]$.

— Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E, alors $(e_1, \dots, e_p)$ et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ sont des bases orthonormées de deux supplémentaires orthogonaux.

— Soit F un sous-espace vectoriel de E.
Si F et $F^\perp$ admettent respectivement $(e_1, \dots, e_p)$ et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ comme bases orthonormées, alors la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

38 preuve **Proposition (Théorème de la base orthonormée incomplète).**
Toute famille orthonormée d'un espace euclidien peut être complétée en une base orthonormée.

Soit E un espace euclidien.
Soit $\mathscr{F}$ une famille orthonormée de E.
Posons $F = \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ (comme $\mathscr{F}$ est orthonormée, $\mathscr{F}$ est libre, donc c'est une base de F).
Le sous-espace vectoriel $F^\perp$ est de dimension finie et admet, en vertu de..., une base orthonormée $\mathscr{B}_{F^\perp}$.
Alors $\mathscr{F} \vee \mathscr{B}_{F^\perp}$ est une base orthonormée de E, en vertu du deuxième point de la proposition précédente.

Projection orthogonale

39 **Définition.**
Soit E un espace préhilbertien.
Soit F un sous-espace vectoriel de *dimension finie*, de sorte que (WHY?) $E = F \oplus F^\perp$.
La projection sur F parallèlement à $F^\perp$ est appelée la *projection orthogonale* sur F.
L'image d'un vecteur x par cette projection est appelée le *projeté orthogonal* de x sur F.

- **Notation.** La projection orthogonale sur F est notée p_F.
- **Caractérisation.** Soit $x \in E$.

  Le projeté orthogonal de x sur F, noté $p_F(x)$, est l'unique vecteur y vérifiant $\begin{cases} y \in F \\ x - y \in F^\perp \end{cases}$

  Ainsi, $p_F(x)$ est **le** vecteur de F tel que $x - p_F(x) \in F^\perp$.

40 preuve

Proposition.
Soit F un sev de dimension finie, engendré par une famille $\mathscr{F}$.
Soit $x \in E$.
On a
$$\forall\, y \in F, \qquad \Big(y = p_F(x) \iff \forall\, e \in \mathscr{F},\ \langle x - y \mid e\rangle = 0\Big)$$

- En notant $p = \operatorname{card}\mathscr{F}$, il est important de voir l'équivalence précédente comme :

$$\underbrace{\forall\, y \in \operatorname{Vect}(\mathscr{F})}_{\text{se donner } p \text{ scalaires}}, \qquad \Big(y = p_F(x) \iff \underbrace{\forall\, e \in \mathscr{F},\ \langle y \mid e\rangle = \underbrace{\langle x \mid e\rangle}_{\text{à calculer}}}_{\text{il y a } p \text{ égalités}}\Big)$$

Soit $y \in F$.

— On suppose que $y = p_F(x)$.
Alors $x - y \in F^\perp$.
Donc ce vecteur est orthogonal à tout vecteur de F, en particulier à tous les vecteurs $e \in \mathscr{F}$.
On vient de traduire le fait que $F^\perp \subset \mathscr{F}^\perp$.

— Supposons que $\forall\, e \in \mathscr{F},\ \langle x - y \mid e\rangle = 0$.
Alors $x - y \in \mathscr{F}^\perp = \operatorname{Vect}(\mathscr{F})^\perp = F^\perp$.
De plus, $y \in F$.
Donc $y = p_F(x)$.

41 sol → 0

Question. Considérons $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle P \mid Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.
Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $F = \operatorname{Vect}(1, X)$.
Même question avec le projeté orthogonal de X^3 sur $F = \mathbb{R}_2[X]$.

Notons $p_F(X^2)$ le projeté orthogonal de X^2 sur $F = \operatorname{Vect}(1, X)$.
C'est l'unique vecteur de F tel que $X^2 - p_F(X^2) \in F^\perp$.
Comme ce projeté appartient à F, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $p_F(X^2) = \lambda + \mu X$.
Comme $X^2 - p_F(X^2) \in F^\perp$, on a $\begin{cases} \langle X^2 - p_F(X^2) \mid 1\rangle = 0 \\ \langle X^2 - p_F(X^2) \mid X\rangle = 0 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} \langle p_F(X^2) \mid 1\rangle = \langle X^2 \mid 1\rangle \\ \langle p_F(X^2) \mid X\rangle = \langle X^2 \mid X\rangle \end{cases}$

Donc $\begin{cases} 2\lambda + \frac{1}{2}\mu = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{3}\mu = \frac{1}{4} \end{cases}$

D'où $\lambda = -\dfrac{1}{6}$ et $\mu = 1$.

Ainsi, $p_F(X^2) = X - \frac{1}{6}$.

- Notons $p_F(X^3)$ le projeté orthogonal de X^3 sur $F = \mathbb{R}_2[X]$.
Comme ce projeté appartient à F, il existe $a, b, c \in R$ tels que $p_F(X^3) = aX^2 + bX + c$.
Comme $X^3 - p_F(X^3) \in F^\perp$, on a
$$\begin{cases} \langle X^3 - P \mid 1\rangle = 0 \\ \langle X^3 - P \mid X\rangle = 0 \\ \langle X^3 - P \mid X^2\rangle = 0 \end{cases}$$
ce qui se traduit par le système suivant :
$$\begin{cases} 4a + 6b + 12c = 3 \\ 15a + 20b + 30c = 12 \\ 12a + 15b + 20c = 10. \end{cases}$$

L'opération $L_2 \leftarrow L_1 + L_3 - L_2$ donne le système équivalent suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 4a & + & 6b & + & 12c & = & 3 \\ a & + & b & + & 2c & = & 1 \\ 12a & + & 15b & + & 20c & = & 10 \end{array}\right.$$

ce qui conduit au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & + & 2c & = & 1 \\ & & 2b & + & 4c & = & -1 \\ & & 3b & - & 4c & = & -2 \end{array}\right.$$

On obtient ainsi $b = -\dfrac{3}{5}$, $c = \dfrac{1}{20}$ et $a = \dfrac{3}{2}$.

D'où

$$p_F(X^3) = \frac{3}{2}X^2 - \frac{3}{5}X + \frac{1}{20}.$$

42 **Question.** Considérons $E = \mathscr{C}^0\big([0,2\pi],\mathbb{R}\big)$ muni du produit scalaire $\langle f \mid g\rangle = \displaystyle\int_0^{2\pi} fg$.
Déterminer le projeté orthogonal de $\varphi : t \longmapsto t$ sur $F = \mathrm{Vect}(\cos,\sin)$.

43 preuve

Proposition (expression du projeté avec une BON.)
Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.
Notons $\mathscr{B} = (f_1, \dots, f_p)$ une base *orthonormée* de F.
Soit $x \in E$. Alors le projeté orthogonal de x sur F est :

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} \langle x \mid f_k \rangle f_k.$$

Décomposons $p_F(x)$ dans la base orthonormée $\mathscr{B}$:

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} \langle p_F(x) \mid e_k \rangle e_k.$$

Comme $x - p_F(x) \in F^\perp$ et $e_k \in F$, on en déduit :

$$\langle x - p_F(x) \mid e_k \rangle = 0$$

D'où $\langle x \mid e_k \rangle = \langle p_F(x) \mid e_k \rangle$.

- **Remarque.** Par construction, le vecteur $x - p_F(x)$ est dans $F^\perp$, donc avec les notations précédentes

$$x - \sum_{k=1}^{p} \langle x \mid f_k \rangle f_k \in F^\perp$$

- **Retour sur Gram-Schmidt.** On rappelle que pour construire f_p, on considère :

$$g_p = e_p - \sum_{k=1}^{p-1} \langle e_p \mid f_k \rangle f_k \quad \text{et on pose} \quad f_p = \frac{g_p}{\|g_p\|}.$$

Ainsi, g_p est obtenu en retranchant à e_p son projeté orthogonal sur $\mathrm{Vect}(\underbrace{f_1, \dots, f_{p-1}}_{\text{BON}}) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{p-1})$.

44 preuve

Proposition (projection sur une droite).
Soit $u \in E \setminus \{0_E\}$ un vecteur non nul de E.
Posons $D = \mathrm{Vect}(u)$.
Soit $x \in E$. On a

$$p_D(x) = \frac{\langle x \mid u \rangle}{\|u\|^2} u$$

La famille $\left(\frac{u}{\|u\|}\right)$ est une base orthonormée de $D = \mathrm{Vect}(u)$.
Donc

$$p_F(x) = \left\langle x \,\middle|\, \frac{u}{\|u\|} \right\rangle \frac{u}{\|u\|} = \frac{\langle x \mid u \rangle}{\|u\|^2} u$$

Dans la proposition suivante, on suppose E de dimension finie pour parler d'un hyperplan conformément au programme de PCSI.

45

Proposition (Projection sur un hyperplan).
Soit E un espace euclidien.
Soit $u \in E \setminus \{0_E\}$ un vecteur non nul de E.
Posons $D = \mathrm{Vect}(u)$ et $H = D^\perp$.
Soit $x \in E$. On a

$$p_H(x) = x - \frac{\langle x \mid u \rangle}{\|u\|^2} u$$

Distance à un sous-espace vectoriel

Dans ce paragraphe, on note d la distance associée au produit scalaire sur E.

46 **Définition.**
Soit $x \in E$.
Soit A une partie non vide de E
On appelle *distance* de x à A la quantité :

$$d(x,A) \ = \ \inf_{a\in A} d(x,a) \qquad \text{ou encore} \qquad d(x,A) \ = \ \inf_{a\in A} \|x-a\|$$

La partie $\{d(x,a) \mid a \in A\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et minorée (par 0), donc admet une borne inférieure.
Dans la situation suivante, cette borne inférieure est en fait un minimum :

47 preuve **Proposition.**
Soit $x \in E$.
Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie.
Notons p_F la projection orthogonale sur F.
La distance du vecteur x à F est atteinte en un unique point de F, à savoir $p_F(x)$.

Autrement dit :

- ⋆ $d(x,F) = \|x-p_F(x)\|$
- ⋆ $\forall\, y \in F, \quad \Big(d(x,F) = \|x-y\| \iff y = p_F(x)\Big)$

Soit $x \in E$.
Montrons que $d(x,F) = \|x-p_F(x)\|$.
Autrement dit que $\inf\limits_{y\in F} \|x-y\| = \|x-p_F(x)\|$.
Autrement dit que $\inf\Big\{\|x-y\|, y\in F\Big\} = \|x-p_F(x)\|$.
En fait, on va montrer que c'est un minimum ;

$$\min\Big\{\|x-y\|, y\in F\Big\} = \|x-p_F(x)\|$$

- On a $\|x-p_F(x)\| \in \Big\{\|x-y\|, y\in F\Big\}$.
- Montrons que $\|x-p_F(x)\|$ est un minorant.
  Soit $y \in F$. On a
  $$\|x-p_F(x)\|^2 \ \leqslant \ \|\underbrace{x-p_F(x)}_{\in F^\perp}\|^2 \ + \ \|\underbrace{p_F(x)-y}_{\in F}\|^2$$
  D'après Pythagore :
  $$\|x-p_F(x)\|^2 \ \leqslant \ \|x-y\|^2$$

De plus, soit $y \in F$. On a

$$d(x,F) = \|x-y\| \iff \|x-p_F(x)\|^2 = \|x-y\|^2 \iff \|p_F(x)-y\|^2 = 0 \iff y = p_F(x).$$

- **Remarque.** On a (WHY ?)
$$d(x,F)^2 \ = \ \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$$

- **Exemple.** On souhaite déterminer
$$m \ = \ \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} \Big(t-(a\cos t + b\sin t)\Big)^2 \mathrm{d}t.$$

Qui joue le rôle de E ? de F ? de x ?

Quel est le produit scalaire ?

48
preuve

Proposition. Soit E un espace euclidien.
Soit $u \in E \setminus \{0\}$ et $H = \mathrm{Vect}(u)^\perp$.
Soit $x \in E$.
Alors

$$d(x, H) = \frac{|\langle x \mid u \rangle|}{\|u\|}.$$

Soit $x \in E$. On a

$$d(x,H) = \|x - p_H(x)\| = \left\| \frac{\langle x \mid u \rangle}{\|u\|^2} u \right\| = |\langle x \mid u \rangle| \frac{\|u\|}{\|u\|^2} = \frac{|\langle x \mid u \rangle|}{\|u\|}$$

Espace euclidien

preuve et éléments de correction