Espace euclidien

exercices

101 Produit scalaire ?

Pour $X=(x,y)$ et $X'=(x',y')$ dans $\mathbb{R}^2$, on pose :

$$\varphi(X,X') = 2xx' + 2yy' + xy' + x'y \quad \text{et} \quad \psi(X,X') = 2xx' - 2yy' + xy' + x'y.$$

1. Vérifier que φ et ψ sont des formes bilinéaires symétriques.
2. φ et ψ sont-ils des produits scalaires sur $\mathbb{R}^2$?

102 Produit scalaire chez les polynômes (1)

Soit $n \geqslant 2$ et $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = P(1) = 0\}$.

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \longmapsto & -\displaystyle\int_0^1 P(x)Q''(x)\mathrm{d}x \end{array}$

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Montrer que φ définit un produit scalaire sur E. Expliciter la norme euclidienne associée.

103 Produit scalaire chez les polynômes (2)

Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, \dots, a_n$ des réels distincts.
Pour $(P,Q) \in E^2$, on pose

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$$

1. Vérifier qu'on définit un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une base orthonormée de E.
3. Déterminer la distance de $Q \in E$ au sous-espace $H = \left\{ P \in E \;\middle|\; \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0 \right\}$.

104 Matrices

Pour $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on pose $\langle A \mid B \rangle = \mathrm{tr}(A^\top B)$.

1. Montrer que $\langle \mid \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Vérifier que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux.
3. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = (\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))^\perp$.

105 Orthogonal et opérations

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien E. Montrer que :

$$(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \qquad \text{et} \qquad (F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

106 Gram-Schmidt

Orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire $\langle P \mid Q \rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

Avec Cauchy-Schwarz

107

Soit x, y, z trois réels tels que $2x^2 + y^2 + 5z^2 \leqslant 1$. Démontrer que $(x + y + z)^2 \leqslant \frac{17}{10}$.

108

Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.
Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

Étudier le cas d'égalité.
On suppose en outre que $x_k > 0$ pour tout k. Démontrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) \geqslant n^2$$

109

Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\right)^2 \leqslant \frac{n^2(n+1)}{2}$$

110

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ strictement positive sur $[0,1]$.
Montrer

$$\int_0^1 \frac{1}{f(t)} \mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{\displaystyle\int_0^1 f(t) \mathrm{d}t}.$$

111

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) = 0$.

1. Démontrer que, pour tout $t \in [a,b]$, on a

$$f^2(t) \leqslant (t-a) \int_a^t f'^2(u) \mathrm{d}u.$$

2. En déduire que

$$\int_a^b f^2(t) \mathrm{d}t \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b f'^2(u) \mathrm{d}u$$

112

Soit $E = \mathcal{C}\left([a,b], \mathbb{R}_+^*\right)$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs strictement positives.
Déterminer

$$\inf_{f \in E} \left(\int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f}\right)$$

Cette borne inférieure est-elle atteinte ?

Petits calculs

113

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on considère $F = \mathrm{Vect}\Big((1,0,2),(1,-1,0)\Big)$.
Le vecteur $(2,2,0)$ est-il dans $F^\perp$?
Déterminer $F^\perp$.

114

On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique.
On considère le sous-espace G de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$G = \Big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y-z+t=0 \text{ et } x+2y+3z+t=0\Big\}.$$

Déterminer un système d'équations de $G^\perp$.

115

On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique.
Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par le système d'équations :

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0. \end{cases}$$

Déterminer une base de F.
Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.

116

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.
On considère l'endomorphisme f canoniquement associé à $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$.
Montrer que f est la projection orthogonale sur un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ à déterminer.

117

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.
On considère le vecteur v et le sous-espace vectoriel F

$$v = (2,2,2) \qquad\qquad F = \Big\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 0\Big\}$$

1. Déterminer le projeté orthogonal de x sur F.
2. Déterminer la distance de x à F.

118

On souhaite déterminer

$$m \;=\; \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^\pi \Big(x - (a\cos x + b\sin x)\Big)^2 \mathrm{d}x.$$

1. Justifier que m existe.
2. On note $F = \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$.
   (a) Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([0,\pi],\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.
   (b) Déterminer une base orthonormale de F pour le produit scalaire $\langle f \mid g\rangle = \displaystyle\int_0^\pi f(x)g(x)\mathrm{d}x$.
   (c) On note $\mathrm{id} : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$. Quel est le lien entre id, F et m ?
3. Déterminer le projeté orthogonal de id sur F.
4. En déduire la valeur de m.

Plus abstrait

119 Pas de supplémentaire orthogonal

On considère $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f \mid g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$.

Soit $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$. Montrer que $F^\perp = \{0\}$.
En déduire que F n'admet pas de supplémentaire orthogonal.

120 Caractérisation de l'orthogonalité

Soit E un espace vectoriel préhilbertien et x, y deux vecteurs de E.
Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x\| \leqslant \|x + \lambda y\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

121 Projecteur orthogonal

Soit E un espace préhilbertien réel et p un projecteur de E tel que :

$$\forall x \in E, \quad \|p(x)\| \leqslant \|x\|.$$

Montrer que p est un projecteur orthogonal, c'est-à-dire que $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont orthogonaux.

122 À propos d'unicité dans Gram-Schmidt

Soit E un espace préhilbertien réel.
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de E et deux familles orthonormées $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ et $\mathcal{G} = (g_1, \ldots, g_n)$ de E telles que :

$$\begin{cases} \forall p \in [\![1,n]\!], \quad \mathrm{Vect}\,(e_1,\ldots,e_p) = \mathrm{Vect}\,(f_1,\ldots,f_p) = \mathrm{Vect}\,(g_1,\ldots,g_p) \\ \forall p \in [\![1,n]\!], \quad \langle e_p \mid f_p\rangle > 0 \quad \text{et} \quad \langle e_p \mid g_p\rangle > 0. \end{cases}$$

Montrer que les familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont égales.

123 Matrice de Gram

Soit E un espace préhilbertien réel et $(e_1, \ldots, e_n) \in E^n$. On pose $G \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad G_{i,j} = \langle e_i \mid e_j\rangle.$$

1. Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille libre si et seulement si G est inversible.
2. On suppose que $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et on note $\mathcal{B}' = (f_1, \ldots, f_n)$ la base orthonormée obtenue à partir de $\mathcal{B}$ par l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
   On pose $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}}$.
   Montrer que P est triangulaire supérieure et que $G = P^\top P$.
3. En déduire que $0 < \det(G) \leqslant \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \|e_i\|^2$.

124 Famille libre telle que...

Soit E un espace préhilbertien réel et $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de E.
On suppose que :

$$\forall x \in E, \ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \langle x \mid e_i\rangle^2.$$

1. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ est une base de E.
2. Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille orthonormée.

Pour $i \in [\![1,p]\!]$, on pourra considérer un vecteur unitaire appartenant à $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_p)^\perp$, après en avoir justifié l'existence.

125 Vecteurs unitaires tels que...

Soit E un espace préhilbertien réel et $(e_1, \dots, e_p)$ de vecteurs unitaires de E.
On suppose que :

$$\forall\, x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \langle x \mid e_i \rangle^2.$$

Montrer que $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de E.

126 Pas trop de vecteurs tels que...

Soit E un espace euclidien.
Soit $e_1, \dots, e_p \in E$ tels que :

$$\forall\, (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \quad i \neq j \quad \Longrightarrow \quad \langle e_i \mid e_j \rangle < 0.$$

En raisonnant par récurrence sur la dimension de E, montrer que $p \leqslant \dim E + 1$.

On pourra raisonner considérer une projection orthogonale sur un hyperplan bien choisi.

127 Similitude

Soit E un espace euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda > 0$.
On dit que f est une similitude de rapport λ lorsque pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \lambda \|x\|$.

1. Question préliminaire : soient $u, v \in E$ tels que $u + v \perp u - v$. Démontrer que $\|u\| = \|v\|$.
2. Démontrer que f est une similitude de rapport λ si et seulement si,

$$\forall\, x, y \in E, \quad \langle f(x), f(y) \rangle = \lambda^2 \langle x, y \rangle$$

3. On souhaite prouver que f est une similitude si et seulement f est non-nulle et conserve l'orthogonalité :

$$\forall\, x, y \in E, \quad x \perp y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \perp f(y)$$

   (a) Prouver le sens direct.
   (b) Réciproquement, on suppose que f est non-nulle et préserve l'orthogonalité.
   Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E.
   Démontrer que, pour tout couple (i,j), $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$.
   (c) Conclure.

Espace euclidien

corrigés

101

1. — L'application φ est linéaire à gauche :

   Soit $X_1, X_2, X' \in \mathbb{R}^2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.
   On a $\varphi(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, X') = \alpha_1 \varphi(X_1, X') + \alpha_2 \varphi(X_2, X')$.

   — L'application φ est symétrique car $\varphi(X, X') = \varphi(X', X)$.

   — Ainsi, φ est bilinéaire.

   Bilan. L'application φ est une forme bilinéaire symétrique.
   De même, ψ est une forme bilinéaire symétrique.

2. On rappelle qu'un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

   — L'application φ est positive.

   Soit $X \in \mathbb{R}^2$. On a $\varphi(X, X) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy = 2\big(x + \frac{1}{2}y\big)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geqslant 0$.

   — L'application φ est définie.

   Soit $X \in \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(X, X) = 0$.
   Alors $(x + \frac{1}{2}y)^2 = 0$ et $\frac{3}{4}y^2 = 0$.
   Donc $y = 0$, puis $x = 0$.
   D'où $X = 0$.

   Bilan. L'application φ est un produit scalaire.
   En revanche, ψ n'est pas un produit scalaire car elle n'est pas positive.
   En effet, pour $X = (0, 1)$, on a $\psi(X, X) = -2$.

1. — $0 \in E$.
   — Soient $P, Q \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
   On a : $\lambda P + \mu Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $(\lambda P + \mu Q)(0) = (\lambda P + \mu Q)(1) = 0$
   donc $\lambda P + Q \in E$.

   Ainsi, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

   Remarque. On peut aussi élever le débat en remarquant que $E = \operatorname{Ker}\psi_0 \cap \operatorname{Ker}\psi_1$ où $\psi_k : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(k) \end{array}$ est une forme linéaire. Donc $\operatorname{Ker}\psi_k$ est un espace vectoriel.

   Et une intersection d'espaces vectoriels est un espace vectoriel.

2. — L'application φ est une forme bilinéaire, par linéarité de l'intégrale et linéarité de la dérivation.
   — Soit $P, Q \in E$.
   Une intégration par parties fournit :

$$\varphi(P,Q) \;=\; -\int_0^1 P(x)Q''(x)\mathrm{d}x = -\underbrace{\Big[(x)Q'(x)\Big]_0^1}_{=0} + \int_0^1 P'(x)Q'(x)\mathrm{d}x \;=\; \int_0^1 P'(x)Q'(x)\mathrm{d}x$$

   L'expression étant symétrique, on a $\varphi(P,Q) = \varphi(Q,P)$ donc φ est symétrique.

   — Soit $P \in E$. On a $\varphi(P,P) = \displaystyle\int_0^1 P'(x)^2\mathrm{d}x \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale.
   Donc φ est positive.

   — Soit $P \in E$ tel que $\varphi(P,P) = 0$.
   Alors $\displaystyle\int_0^1 P'(x)^2\mathrm{d}x = 0$.
   La fonction $x \mapsto P'(x)^2$ est continue, positive sur $[0,1]$ et d'intégrale nulle ; c'est donc la fonction nulle.
   Ainsi, la fonction P est constante sur l'intervalle $[0,1]$.
   Or, $P(0) = 0$ donc la fonction P est nulle sur $[0,1]$.
   Ainsi, le polynôme P a une infinité de racines, donc P est le polynôme nul.
   Ainsi, φ est définie.

   En conclusion, φ est un produit scalaire.

   De plus, la norme euclidienne associée à ce produit scalaire est :

$$\|P\| \;=\; \left(\int_0^1 P'(x)^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

1. Fait en classe.
   Remontrons la symétrie :

$$\begin{array}{rcll} \langle A \mid B\rangle & = & \mathrm{tr}(A^\top B) & \\ & = & \mathrm{tr}((A^\top B)^\top) & \text{car } \mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(M^\top) \\ & = & \mathrm{tr}(B^\top A) & \text{propriétés de la transposée} \\ & = & \langle B \mid A\rangle & \end{array}$$

2. Montrons que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux.
   Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
   On a
   $$\langle A \mid S\rangle \;=\; \mathrm{tr}(A^\top S) \;\overset{\star}{=}\; \mathrm{tr}(-AS^\top) \;=\; -\,\mathrm{tr}(S^\top A) \;=\; -\langle S \mid A\rangle$$
   où l'égalité $\star$ est justifiée par le fait que $A^\top = -A$ et $S^\top = S$.
   L'avant dernière égalité provient du fait que la trace est « cyclique ».
   On a donc montré que $\langle A \mid S\rangle = -\langle S \mid A\rangle$.
3. La question précédente montre que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \subset \left(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\right)^\perp$.
   Comme on est en dimension finie, on a
   $$\dim \left(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\right)^\perp \;=\; \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$$
   Par ailleurs, on a
   $$\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) \;=\; \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$$
   Ainsi, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\left(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\right)^\perp$ ont même dimension.
   Par inclusion et égalité des dimensions, ces deux sous-espaces vectoriels sont égaux.

— Montrons $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Puisque $F \subset F+G$ et $G \subset F+G$, on a $(F+G)^\perp \subset F^\perp$ et $(F+G)^\perp \subset G^\perp$ donc :

$$(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp.$$

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$.
Montrons que x est orthogonal à tout vecteur de $F+G$.
Soit $z \in F+G$ que l'on écrit $z = z_F + z_G$ avec $(z_F, z_G) \in F \times G$.
Par linéarité à droite du produit scalaire, on a

$$\begin{aligned} \langle x \mid z\rangle &= \underbrace{\langle x \mid z_F\rangle}_{=0} + \langle x \mid z_G\rangle && \text{car } x \in F^\perp \text{ et } z_F \in F \\ &= 0 && \text{Idem pour l'autre terme} \end{aligned}$$

Donc $x \in (F+G)^\perp$.

On a donc montré
$$F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp.$$

— Montrons $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.
Le premier point montre que pour tout couple de sous-espaces vectoriels $(\widetilde{F}, \widetilde{G})$:

$$(\widetilde{F} + \widetilde{G})^\perp = \widetilde{F}^\perp \cap \widetilde{G}^\perp$$

D'où
$$\widetilde{F} + \widetilde{G} = \left(\widetilde{F}^\perp \cap \widetilde{G}^\perp\right)^\perp$$

On applique cela à $\widetilde{F} = F^\perp$ et $\widetilde{G} = G^\perp$.
Comme E est de dimension finie, on a $\widetilde{F}^\perp = (F^\perp)^\perp = F$ et de même, $\widetilde{G}^\perp = G$.
On obtient $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

107

Considérons le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^3$.
D'une part, l'hypothèse $2x^2 + y^2 + 5z^2 \leqslant 1$ se reformule $\|w\|^2 \leqslant 1$ où $w = (\sqrt{2}x, y, \sqrt{5}z)$.
D'autre part, on réalise la somme $x + y + z$ comme un produit scalaire :

$$x + y + z \ = \ \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2}x \ + \ 1 \times y \ + \ \frac{1}{\sqrt{5}} \times \sqrt{5}z \ = \ \langle v \mid w \rangle$$

où $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{5}})$ et $w = (\sqrt{2}x, y, \sqrt{5}z)$.
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\langle v \mid w \rangle^2 \ \leqslant \ \|v\|^2 \|w\|^2.$$

Comme $\|v\|^2 = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 \right) = \dfrac{17}{10}$ et $\|w\|^2 \leqslant 1$, on a :

$$(x + y + z)^2 \ \leqslant \ \frac{17}{10}.$$

1. Fixons $t \in [a,b]$ une fois pour toutes.
   Considérons le produit scalaire (je vous laisse vérifier que c'est bien une forme bilinéaire symétrique définie positive) :
   $$\langle g \mid h \rangle \;=\; \int_a^t gh$$
   Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ et s'annule en a, on a par le théorème fondamental de l'Analyse :
   $$f(t) \;=\; \int_a^t f'(u)\mathrm{d}u \;=\; \int_a^t 1 \times f'(u)\mathrm{d}u.$$
   Ainsi, t étant toujours fixé, le réel $f(t)$ se présente comme le produit scalaire $\langle 1 \mid f' \rangle$.
   On applique alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
   $$\langle 1 \mid f' \rangle^2 \;\leqslant\; \|1\|^2 \|f'\|^2$$
   D'où
   $$\begin{aligned} f^2(t) &\leqslant \left(\int_a^t 1\,\mathrm{d}u\right)\left(\int_a^t f'^2(u)\mathrm{d}u\right) \\ &\leqslant (t-a)\int_a^t f'^2(u)\mathrm{d}u \end{aligned}$$

2. Reprenons ce qui précède à t fixé :
   $$\begin{aligned} f^2(t) &\leqslant (t-a)\int_a^t f'^2(u)\mathrm{d}u \\ &\leqslant (t-a)\int_a^b f'^2(u)\mathrm{d}u \quad \text{car } f'^2 \geqslant 0 \text{ et } t \leqslant b \end{aligned}$$
   Réumons. On a
   $$\forall\, t \in [a,b], \quad f^2(t) \;\leqslant\; (t-a)\int_a^b f'^2(u)\mathrm{d}u$$
   Par croissance de l'intégrale :
   $$\begin{aligned} \int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t &\leqslant \left(\int_a^b (t-a)\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b f'^2(u)\mathrm{d}u\right) \\ &\leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b f'^2(u)\mathrm{d}u \end{aligned}$$

Utilisons le produit scalaire sur E défini par $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_a^b fg$.
Soit $f \in E$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour ce produit scalaire

$$\left|\langle \sqrt{f} \mid \frac{1}{\sqrt{f}}\rangle\right|^2 \;\leqslant\; \|\sqrt{f}\|^2 \times \|\frac{1}{\sqrt{f}}\|^2$$

d'où

$$(b-a)^2 \leqslant \int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f}$$

Autrement dit, $(b-a)^2$ est un minorant de l'ensemble $\left\{\displaystyle\int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f} \mid f \in E\right\}$, qui est une partie non vide de $\mathbb{R}$.
D'où

$$(b-a)^2 \leqslant \inf_{f\in E}\left(\int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f}\right)$$

De plus, pour $f_0 = 1$ qui est élément de E, on a l'égalité $(b-a)^2 = \displaystyle\int_a^b f_0 \times \int_a^b \frac{1}{f_0}$.
Ainsi, la borne inférieure est atteinte (c'est donc un minimum), par exemple par la fonction identiquement égale à 1 (et plus généralement, par les fonctions constantes).
On a donc montré

$$\inf_{f\in E}\left(\int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f}\right) \;=\; \min_{f\in E}\left(\int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f}\right) \;=\; (b-a)^2$$

115

Une base de F est $\Big((1,0,-1,0),(0,1,0,-1)\Big)$.

Une base orthonormée de F est (f_1,f_2) où $f_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0)$ et $f_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,-1)$.

Notons p_F la projection orthogonale sur F.
Donc :

$$\forall\, v\in\mathbb{R}^4,\quad p_F(v)=\langle v\mid f_1\rangle f_1+\langle v\mid f_2\rangle f_2$$

La matrice de p dans la base canonique est donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathrm{cano}}}(p_F)\ =\ \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{bmatrix}$$

Détaillons la première colonne.
En notant $\varepsilon_1=(1,0,0,0)$, on a

$$\begin{aligned}p_F(\varepsilon_1)\ &=\ \underbrace{\langle\varepsilon_1\mid f_1\rangle}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}}f_1+\underbrace{\langle\varepsilon_1\mid f_2\rangle}_{=0}f_1\\&=\ \frac{1}{\sqrt{2}}f_1\\&=\ \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0)\\&=\ \frac{1}{2}(1,0,-1,0)\end{aligned}$$

116

Il s'agit de montrer que f est une projection sur un certain sous-espace vectoriel F parallèlement à $F^\perp$.
Or, si f est une projection sur F parallèlement à G, on a $F = \operatorname{Im} f$ et $G = \operatorname{Ker} f$ et $E = F \oplus G$.
Si on montre que F et G sont orthogonaux, c'est-à-dire une inclusion $F \subset G^\perp$, on aura $F = G^\perp$ car $E = F \oplus G$ (c'est un exercice classique, fait dans le cours).

Résumons. Nous allons montrer que f est un projecteur $f^2 = f$ et que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont orthogonaux.
Pour le premier point, il suffit de vérifier que $A^2 = A$.
Ce qui est facile en remarquant que

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De plus, cette matrice est de rang 1 (la colonne C_1 est une base de l'image).
On a

$$\operatorname{Im} f \;=\; \operatorname{Vect}\underbrace{\big((1,0,-1)\big)}_{\mathcal{F}} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Ker} f \;=\; \operatorname{Vect}\underbrace{\big((0,1,0),(1,0,1)\big)}_{\mathcal{G}}$$

Il est facile de voir que les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont orthogonaux aux vecteurs de $\mathcal{G}$, de sorte que $\operatorname{Im} f \perp \operatorname{Ker} f$.

La condition nécessaire

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|x\| \leqslant \|x + \lambda y\|$$

se reformule

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|x\|^2 \leqslant \|x + \lambda y\|^2$$

c'est-à-dire

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|x\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\lambda \langle x \mid y \rangle + \lambda^2 \|y\|^2$$

c'est-à-dire

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad 0 \ \leqslant \ \|y\|^2 \lambda^2 \ + \ 2\langle x \mid y \rangle \lambda$$

que l'on peut voir comme une fonction polynomiale de degré $\leqslant 2$.
$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $\langle x \mid y \rangle = 0$.
Alors la dernière assertion des équivalences ci-dessus est vraie, puisqu'on a bien

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad 0 \ \leqslant \ \|y\|^2 \lambda^2$$

D'où la condition nécessaire :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|x\| \leqslant \|x + \lambda y\|$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|x\| \leqslant \|x + \lambda y\|$.
Alors

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad 0 \ \leqslant \ \|y\|^2 \lambda^2 \ + \ 2\langle x \mid y \rangle \lambda$$

On a donc une hypothèse du type

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad 0 \ \leqslant \ a\lambda^2 + b\lambda$$

et on cherche à montrer que $b = 0$.
Plusieurs façons de conclure.
On peut distinguer le cas $a = 0$ et $a \neq 0$ (dans ce dernier cas, on a une fonction polynomiale de degré exactement 2 qui est positive, donc son discriminant est négatif ou nul, donc $b^2 \leqslant 0$, donc $b = 0$).
On peut aussi raisonner par l'absurde, supposer $b \neq 0$.
Au voisinage de 0, on a alors (car $b \neq 0$) l'équivalent $a\lambda^2 + b\lambda \sim b\lambda$.
Or $a\lambda^2 + b\lambda$ ne change pas de signe, alors que $b\lambda$ change de signe. D'où la contradiction.

121

Soit $(x, y) \in \mathrm{Im}(p) \times \mathrm{Ker}(p)$.
Montrons $\langle x \mid y \rangle = 0$.
D'après l'hypothèse faite sur p, on a

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|p(\lambda x + y)\|^2 \leqslant \|\lambda x + y\|^2$$

Or, comme $x \in \mathrm{Im}\, p$ et $y \in \mathrm{Ker}\, p$, on a $p\,(\lambda x + y) = \lambda x$.
D'où

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda^2 \|x\|^2 \leqslant \|\lambda x + y\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda \langle x \mid y \rangle + \|y\|^2,$$

On en déduit

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|y\|^2 + 2\lambda \langle x \mid y \rangle \geqslant 0.$$

Autrement dit, la fonction affine $\lambda \mapsto \|y\|^2 + 2\lambda \langle x \mid y \rangle$ est de signe constant sur $\mathbb{R}$.
Donc elle est de pente nulle, donc $\langle x \mid y \rangle = 0$.

Bilan. Les espaces vectoriels $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont orthogonaux.

Remarquons que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, l'espace vectoriel $\text{Vect}(e_1,\dots,e_k)$ est de dimension finie égale à k.

On va montrer que $\forall\, p \in [\![1,n]\!], f_p = g_p$.
Fixons $p \in [\![1,n]\!]$.
Considérons l'espace euclidien $F = \text{Vect}(e_1,\dots,e_p)$ dans lequel vivent les f_j et g_j car, par hypothèse, $F = \text{Vect}(f_1,\dots,f_p) = \text{Vect}(g_1,\dots,g_p)$.
Comme la famille $\mathcal{F}$ est orthonormée, f_p est orthogonale à tout vecteur f_j, donc est orthogonal à l'hyperplan de F suivant :

$$\text{Vect}(e_1,\dots,e_{p-1}) = \text{Vect}(f_1,\dots,f_{p-1})$$

Idem pour g_p.
Ainsi, f_p et g_p se retrouvent orthogonaux à l'hyperplan commun $\text{Vect}(e_1,\dots,e_{p-1})$.
Les vecteurs f_p et g_p appartiennent donc à une même droite vectorielle (l'orthogonal d'un hyperplan est une droite vectorielle en dimension finie).
Donc ils sont colinéaires.
Comme ils sont unitaires, on a $f_p = \pm g_p$.
Les conditions $\langle e_p \mid f_p\rangle > 0$ et $\langle e_p \mid g_p\rangle > 0$ empêchent le cas $f_p = -g_p$ et imposent donc $f_p = g_p$.

BILAN : Les familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont égales.

1. **Sens direct** Supposons que $(e_1,\dots,e_n)$ est ibre.

   Vérifions que G est inversible en montrant que la famille de ses colonnes $(C_1,\dots,C_n)$ est une famille libre.

   Soit donc $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\lambda_j C_j = 0$.

   Pour $i \in [\![1,n]\!]$, en examinant le $i^{\text{ème}}$ coefficient des colonnes qui vaut $G_{i,j} = \langle e_i \mid e_j\rangle$, on a

   $$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\langle e_i \mid e_j\rangle = 0$$

   puis par bilinéarité du produit scalaire, $\langle e_i \mid \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\lambda_j e_j\rangle = 0$.

   On en déduit que :

   $$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j e_j \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)\cap\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)^{\perp},$$

   Or cette intersection est réduite au vecteur nul, d'où $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j e_j = 0$.
   Par liberté de la famille $(e_1,\dots,e_n)$, on obtient $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$.

   Sens réciproque Supposons que G est inversible.

   Soit $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ des réels tels que $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j e_j = 0$.

   En remontant les calculs précédents, on obtient $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j C_j = 0$,
   ce qui constitue une combinaison linéaire nulle de la famille des colonnes de la matrice inversible G.

   On en déduit que $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$.

2. — Par construction, pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, $e_j\in\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_j)=\mathrm{Vect}(f_1,\dots,f_j)$, ce qui justifie que P est une matrice triangulaire supérieure.

   — Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$.
   Que vaut le coefficient $p_{i,j}$ de P ?
   Réponse : la coordonnée sur f_i du vecteur e_j.
   Comme la famille $\mathcal{B}'=(f_1,\dots,f_n)$ est orthonormée, on sait que cette cooordonnée vaut $\langle e_j \mid f_i\rangle$.
   Ainsi, $p_{i,j}=\langle e_j \mid f_i\rangle$.
   On a alors

   $$\mathrm{coeff}_{i,j}(P^\top P) \;=\; \sum_{k=1}^{n}p_{k,i}p_{k,j} = \sum_{k=1}^{n}\langle e_i \mid f_k\rangle\langle e_j \mid f_k\rangle.$$

   Or, pour deux vecteurs x et y, on a

   $$\langle x \mid y\rangle = \sum_{k=1}^{n}\langle x \mid f_k\rangle\langle y \mid f_k\rangle$$

   car la base orthonormée $(f_1,\dots,f_n)$.
   En appliquant cette remarque à $x=e_i$ et $y=e_j$, on obtient

   $$\mathrm{coeff}_{i,j}(P^\top P) = \langle e_i \mid e_j\rangle.$$

   On a donc montré que $\mathrm{coeff}_{i,j}(P^\top P)=\mathrm{coeff}_{i,j}(G)$.
   D'où $P^\top P = G$.

3. Montrons l'inégalité de gauche.
   D'après la question précédente, on a

   $$\det(G)=\det(P^\top P)=\det(P^\top)\det(P)=\det(P)^2\geqslant 0$$

   La matrice G est inversible donc de déterminant non nul.
   On a donc $\det(G)>0$.
   Montrons l'inégalité de droite.

Comme P est une matrice triangulaire, on a $\det(P)^2 = \prod_{j=1}^n (p_{j,j})^2 = \prod_{j=1}^n \langle e_j \mid f_j \rangle^2$.
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le caractère unitaire des vecteurs f_j, on a :

$$\forall\, j \in [\![1, n]\!], \quad \langle e_j \mid f_j \rangle^2 \leqslant \|e_j\|^2.$$

Par produit d'inégalités dont les termes sont positifs, on en déduit :

$$\det(G) \leqslant \prod_{j=1}^{n} \|e_j\|^2.$$

1. Posons $F = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.
   Montrons que $E = F$.
   Comme F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, on a $E = F \oplus F^\perp$.
   Montrons que $F^\perp = \{0_E\}$.
   Soit $x \in \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_p)^\perp$.
   D'après l'hypothèse, on a $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \langle x \mid e_i\rangle^2 = 0$ car x est orthogonal aux vecteurs $e_1, \dots, e_p$.
   Ainsi, $\|x\|^2 = 0_{\mathbb{R}}$. Donc $x = 0_E$.

   On en déduit que $E = F$, donc la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est génératrice de E.
   Comme par hypothèse elle est libre, c'est une base de E.
2. D'après la question précédente, la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de E, qui est donc en particulier de dimension p.

   Soit $i \in [\![1, p]\!]$.
   Objectif.
   — Montrer que $\|e_i\|^2 \geqslant 1$. Cela fait penser à Cauchy-Schwarz...
   ... avec un vecteur u vérifiant $\|u\|^2 = \langle u \mid e_i\rangle^2$.
   — Puis montrer que $\|e_i\|^2 \leqslant 1$, et enfin $\quad \forall\, j \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\},\ \langle e_i \mid e_j\rangle = 0$.

   Allons-y.
   — Notons $F_i = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_p)$
   On a $\dim F_i = p - 1$ (car $(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_p)$ est une sous-famille d'une famille libre).
   Ainsi,
   $$\dim F_i^\perp \;=\; p - (p-1) \;=\; 1$$
   Considérons une base de cet espace $F_i^\perp$, disons (u).
   Ainsi $\forall\, j \neq i,\ \langle u \mid e_j\rangle = 0$.
   L'hypothèse appliquée à ce vecteur u fournit
   $$\|u\|^2 \;=\; \langle u \mid e_i\rangle^2 \qquad \text{qui n'est pas nul, car } u \text{ n'est pas le vecteur nul}$$
   — L'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit
   $$\langle u \mid e_i\rangle^2 \;\leqslant\; \|u\|^2 \|e_i\|^2$$
   D'où (WHY ?) :
   $$1 \;\leqslant\; \|e_i\|^2$$
   — L'hypothèse appliquée au vecteur e_i fournit :
   $$(\star) \qquad \|e_i\|^2 \;=\; \|e_i\|^4 + \underbrace{\sum_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} \langle e_i \mid e_j\rangle^2}_{\geqslant 0}$$
   D'où
   $$\|e_i\|^2 \geqslant \|e_i\|^4 \qquad \text{d'où} \qquad \|e_i\| \leqslant 1$$
   — Par double inégalité, on en déduit $\|e_i\| = 1$.
   — En reprenant $(\star)$, on a :
   $$0 \;=\; \sum_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} \langle e_i \mid e_j\rangle^2$$
   D'où
   $$\forall\, j \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\}, \quad \langle e_i \mid e_j\rangle = 0$$

   Bilan : la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée.

126

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{H}_n$: « pour tout espace euclidien de dimension n, on a ....

— Soit un espace euclidien de dimension 0.
Donnons-nous p vecteurs tels que ...
Montrons que $p \leqslant 1$.
Supposons donc avoir au moins 2 tels vecteurs et aboutissons à une absurdité.
Soit (e_1, e_2) tel que $\langle e_1 \mid e_2 \rangle < 0$.
Comme on est en dimension 0, on a $e_1 = e_2 = 0$ donc $\langle e_1 \mid e_2 \rangle = 0$. D'où la contradiction.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vérifiée pour tout espace euclidien de dimension n.
Soit E un espace euclidien de dimension $n+1$ et $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E vérifiant la condition requise sur les produits scalaires.

  — Si $p = 1$, il n'y a rien à faire car $1 \leqslant n+1$. On supposera donc $p \geqslant 2$ dans la suite.

  — Tout d'abord, $\langle e_1 \mid e_p \rangle < 0$ donc $e_p \neq 0$.
  Posons $H = \{e_p\}^\perp$. C'est un hyperplan, donc de dimension $n = \dim E - 1$.
  Notons p_H la projection orthogonale sur H.
  Montrons que la famille $(p_H(e_1), \dots, p_H(e_{p-1}))$ de vecteurs de H satisfait la condition requise sur les produits scalaires.
  On pourra en déduire que $p - 1 \leqslant \dim H + 1$, d'où $p \leqslant n+2$, ce qui achèvera la preuve de l'hérédité.

  — On a
$$\forall\, x \in E, \quad p_H(x) = x - \frac{\langle x \mid e_p \rangle}{\|e_p\|^2} e_p.$$
  Soit $(i,j) \in [\![1, p-1]\!]^2$ tel que $i \neq j$. On a :
$$\langle p_H(e_i) \mid p_H(e_j) \rangle = \langle e_i \mid e_j \rangle - \frac{\langle e_i \mid e_p \rangle \langle e_j \mid e_p \rangle}{\|e_p\|^2},$$
  par bilinéarité et symétrie du produit scalaire.
  Le premier terme de cette soustraction est strictement négatif.
  Le second est strictement positif (produit de deux négatifs).
  Ainsi $\langle p_H(e_i) \mid p_H(e_j) \rangle < 0$.