

Séries

exercices



Terme général « abstrait »

101**carré**

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente.
Montrer que la série $\sum u_n^2$ est convergente.

102**max**

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.
Montrer que la série $\sum \max(u_n, v_n)$ converge si et seulement si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes.

103**sqrt**

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs convergentes.
Montrer que la série $\sum \sqrt{u_n v_n}$ est convergente.

104**Transformation homographique**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. On pose $v_n = \frac{u_n}{1 + u_n}$.
Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

105**Encadrement pour des séries à termes signés**

Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ trois séries réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n$.
Montrer que si $\sum u_n$ et $\sum w_n$ convergent, alors $\sum v_n$ converge également.

106**Exponentiation et comparaison**

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

1. On suppose que $\sum u_n$ converge. Prouver que, pour tout $\alpha > 1$, $\sum u_n^\alpha$ converge.
2. On suppose que $\sum u_n$ diverge. Prouver que, pour tout $\alpha \in]0, 1[$, $\sum u_n^\alpha$ diverge.

107**Sous-espace vectoriel (belote)**

Soit

$$F = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \text{la série } \sum n^2 u_n^2 \text{ converge} \right\}$$

Montrer que F est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

108**Sous-espace vectoriel (rebelote)**

Soit

$$F = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \text{la série } \sum n u_n^2 \text{ converge} \right\}$$

Montrer que F est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

109**Une double inégalité (série télescopique)**

Soit (u_n) et (w_n) deux suites de réels telles que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_k \leq w_{k-1} - w_k$$

On suppose de plus que w converge vers ℓ .

1. Montrer que la série $\sum u_k$ converge.

On note U sa somme.

2. En notant $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, U - w_n + \ell \leq U_n \leq U$$

110 Un classique

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$.

1. On suppose que la série $\sum a_n$ converge. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{a_n}{S_n}$?
2. On suppose que la série $\sum a_n$ diverge. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{a_n}{S_n}$?

Écrire α en fonction de β et γ dans l'équation $\alpha = \beta + \gamma$.

3. On suppose que la série $\sum a_n$ diverge. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{a_n}{S_n^2}$?

On suppose que $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

111 Condensation

Soit (u_n) une suite décroissante positive.

Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum 2^n u_{2^n}$ sont de même nature.

112 Hum...

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente.

Montrer que $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$ est convergente. Réciproque ?

Terme général « concret »**113 Télescopie**

Soit $a > 0$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

- Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
- En prenant le log de l'égalité définissant u_n , déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

114 Retour aux sommes partielles

1. Donner la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

On exprime les sommes partielles de la série en calculant les sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n}$.

2. On pose $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est un carré} \\ \frac{1}{n^2} & \text{sinon} \end{cases}$

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

115 Terme général défini par morceaux

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \begin{cases} -\frac{4}{n} & \text{si } n \text{ est multiple de } 5 \\ \frac{1}{n} & \text{sinon} \end{cases}$

1. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{5n} u_k$.

2. En déduire que $\sum u_k$ converge et déterminer $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.

116 Très détaillé

On pose $u_n = e^{-n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Soit $\alpha \leq 0$. Montrer que la série $\sum u_n$ est divergente.
2. Soit $\alpha > 0$. Montrer que $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et en déduire la nature de $\sum u_n$.

117**Avec paramètres**

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Étudier la nature de la série de terme général : $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$.
 Lorsque la série converge, calculer sa somme.
 Même question avec $\sum (\ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2))$.

118**Ça se corse**

1. Étudier la convergence de la série $\sum (n^{\frac{1}{n}} - (n+1)^{\frac{1}{n}})$.
2. Étudier la série de terme général $u_n = n^{\frac{3}{2}} \left(\tan \frac{1}{n} - \operatorname{sh} \frac{1}{n} \right)$.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la nature de la série $\sum \left(\cos \frac{1}{n} \right)^{n^\alpha}$.

119**Un calcul de somme**

1. Étudier la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}$.
2. En remarquant que $\int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}$, calculer sa somme.

120**Avec le critère des séries alternées**

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n-x}$.

121**Reste d'ordre n**

Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

En utilisant le critère des séries alternées, montrer que le reste d'ordre n de la série $\sum \frac{(-1)^n}{(n+x)^2}$ est le terme général d'une série convergente.

Comparaison série intégrale

122**Un petit morceau des séries de Bertrand**

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ avec $\alpha > 1$.

Montrer la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

123**Le cas $\alpha = 1$ et $\beta = 1$**

À l'aide d'une comparaison avec une intégrale, montrer la divergence de la série $\sum \frac{1}{n \ln n}$ et donner un équivalent de ses sommes partielles.

Quel développement asymptotique avons-nous obtenu ?

124**Le cas $\alpha = 1$ et $\beta = -1$**

Montrer que la série $\sum \frac{\ln n}{n}$ diverge et donner un équivalent simple de $\sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k}$.

125**Un DA à deux termes pour la série harmonique**

Par comparaison à une intégrale, donner un développement asymptotique à deux termes de la suite des sommes partielles de la série harmonique.

126**Reste d'indice n**

Soit $\alpha \in]1, +\infty[$. Justifier l'existence et donner un équivalent de $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$

En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Théorèmes classiques

127 La règle de d'Alembert

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes tous non nuls.
On suppose que la limite suivante existe :

$$\ell = \lim \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|.$$

1. Montrer que si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge absolument.
2. Montrer que si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
3. Peut-on conclure si $\ell = 1$?

128 Suite définie par récurrence

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{\sin u_n}{n}.$$

À l'aide de la règle de d'Alembert, montrer que la série $\sum u_n$ converge.

129 Avec d'Alembert

À l'aide de la règle de d'Alembert, déterminer les valeurs de $z \in \mathbb{C}$ pour lesquelles les séries suivantes sont absolument convergentes :

$$\sum z^n \quad \sum n z^{n-1} \quad \sum \frac{1}{n+1} z^{n+1} \quad \sum n! z^n \quad \sum \frac{1}{n!} z^n \quad \sum (az)^{2n}$$

130 Factorielles

1. On pose $u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}$.

Quelle est la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$?

Montrer que la suite des sommes partielles de la série $\sum nu_n$ est croissante.

En déduire que la série de terme général u_n est divergente.

2. On pose $v_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}$.

Quelle est la limite de $\frac{v_{n+1}}{v_n}$?

Montrer que, si $0 < \alpha < 3/2$, on a $(n+1)^\alpha v_{n+1} \leq n^\alpha v_n$.

En déduire que la série de terme général v_n converge.

131 Un critère

Soit (u_n) une suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$$

où a, b sont deux constantes réelles ($-a, -b \notin \mathbb{N}$).

1. Montrer que u_n est de signe constant à partir d'un certain rang.
2. On pose $v_n = n^{b-a} u_n$.
Étudier la convergence de la suite (v_n) . On introduira la série de terme général $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$.
3. En déduire que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $a - b + 1 < 0$.
4. Si ce critère est satisfait, montrer $nu_n \rightarrow 0$, puis calculer la somme en fonction de a, b, u_0 .

132 $\sum u_n$ convergente avec u positive et décroissante

Soit u une suite positive, décroissante telle que la série $\sum u_n$ converge.

On note $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

1. Montrer que $nu_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Majorer nu_{2n} par une expression du type $S_i - S_j$ avec i et j à déterminer en fonction de n .

2. Montrer que $u_n = o(\frac{1}{n})$.

Pour la culture : la condition de décroissance est indispensable ; en considérant

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est un carré} \\ \frac{1}{n^{2023}} & \text{sinon} \end{cases}$$

on peut montrer que $\sum u_n$ converge et que $u_n \neq o(\frac{1}{n})$.

133 Cauchy-Schwarz

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles telles que $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ convergent.

Montrer que la série $\sum u_n v_n$ est convergente, et que l'on a :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n \right|^2 \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2 \right).$$

134 Transformation d'Abel

Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles ou complexes.

On pose $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$. Relier :

$$\sum_{n=0}^N A_n b_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^N a_{n+1} B_n.$$

Étudier la convergence de $\sum \frac{\sin(n)}{n}$

On pourra commencer par montrer que la suite $\left(\sum_{k=0}^n \sin k \right)$ est bornée.

135 Produit de Cauchy

Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries absolument convergentes. On pose :

$$c_n = \sum_{p=0}^n a_p b_{n-p}.$$

Montrer que $\sum c_n$ est absolument convergente, de somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p \right) \left(\sum_{q=0}^{+\infty} b_q \right).$$

136 Séries de Riemann par télescopie

En étudiant la série $\sum \left(\frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta} \right)$ pour $\beta \in \mathbb{R}^*$ et la série $\sum (\ln(n+1) - \ln(n))$, retrouver la nature des séries de Riemann :

la série $\sum \frac{1}{n^{\beta+1}}$ converge si et seulement si $\beta > 0$

137 Un classique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive.

On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par définie par $v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k u_k$.

On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

1. Montrer que $\forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^N v_n = \sum_{k=1}^N u_k - N v_N$
2. En déduire que la série $\sum v_n$ converge.
3. Montrer ensuite que $N v_N$ tend vers une limite finie lorsque $N \rightarrow +\infty$, puis en raisonnant par l'absurde, montrer que cette limite est nulle.
4. En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$

138 La série du binôme négatif

On fixe $q \in]-1, 1[$. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on définit la série $\mathbb{B}(r)$

$$\mathbb{B}(r) = \sum_{n \geq r} \binom{n}{r} q^{n-r} = \sum_{n' \geq 0} \binom{n'+r}{r} q^{n'}$$

On note $(S_N(r))_N$ la suite de sommes partielles de la série $\mathbb{B}(r)$. Ainsi

$$\forall N \geq r, \quad S_N(r) = \sum_{k=r}^N \binom{k}{r} q^{k-r} = \sum_{j=0}^{N-r} \binom{j+r}{r} q^j$$

1. Quelle est la nature de la série $\mathbb{B}(r)$ pour $r = 0, 1, 2$?
2. Soit $r \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\forall N \geq r+1, \quad (1-q)S_N(r+1) = S_{N-1}(r) - \binom{N}{r+1} q^{N-r}$$

3. Montrer par récurrence sur r que la série $\mathbb{B}(r)$ converge et que sa somme vaut $\frac{1}{(1-q)^{r+1}}$.

139 Série semi-convergente, réagencement des termes

Soit u une suite indexée par $\mathbb{N}^*$.

On réordonne les termes de u en écrivant un terme d'indice impair suivi de deux termes d'indice pair, précisément :

$$u_1 \quad u_2 \quad u_4 \quad u_3 \quad u_6 \quad \dots$$

On appelle v cette nouvelle suite, que l'on indexe par $\mathbb{N}^*$. Dans cet exemple, on a $v_3 = u_4$.

1. Pour tout $k \geq 1$, exprimer v_{3k} en fonction d'un terme u_ℓ . Idem avec v_{3k-2} et v_{3k-1} .
2. On suppose **désormais** que $u_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

$$\text{Montrer que } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad V_{3n} = \frac{1}{2} U_{2n} \quad \text{où } U_N = \sum_{k=1}^N u_k \text{ et } V_N = \sum_{k=1}^N v_k.$$

3. Rappeler pourquoi la série $\sum u_n$ converge (idée de la preuve).
Connaissez-vous la valeur de sa somme ?
4. Montrer que la série $\sum v_n$ converge (on pourra considérer $V_{3n}, V_{3n+1}, V_{3n+2}$).
Quelle est la valeur de sa somme ?
5. Un théorème (largement hors programme) stipule que si une série $\sum w_n$ converge absolument alors pour toute bijection $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la série $\sum w_{\sigma(n)}$ converge (et même absolument) **vers la même somme**.
Au fait que représente la série $\sum w_{\sigma(n)}$?
Est-ce que ce résultat tient toujours si l'on suppose $\sum w_n$ seulement convergente (sans convergence absolue) ?

Faire ses gammes

140

Nature

Déterminer (en fonction des paramètres $a, b \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$) la nature des séries de terme général :

- | | |
|---|--|
| (i) $n \sin(1/n)$ | (xi) $\frac{\ln(n^2 + 3)\sqrt{2^n + 1}}{4^n}$ |
| (ii) $\frac{n^n}{2^n}$ | (xii) $\frac{\ln n}{\ln(e^n - 1)}$ |
| (iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$ | (xiii) $\sqrt{\operatorname{ch} \frac{1}{n} - 1}$ |
| (iv) $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ | (xiv) $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ |
| (v) $1 - \cos \frac{\pi}{n}$ | (xv) $\left(n \sin \left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha}$ |
| (vi) $\frac{(-1)^n + n}{n^2 + 1}$ | (xvi) $\sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2 + 3}$ |
| (vii) $a^n n!$ | (xvii) $e^{1/n} - a - \frac{b}{n}$ |
| (viii) $ne^{-\sqrt{n}}$ | (xviii) $\frac{1}{n^a} ((n+1)^{1+1/n} - (n-1)^{1-1/n})$ |
| (ix) $\frac{\ln n}{n^a}$ | |
| (x) $\ln \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n - 1}\right)$ | |

141

Avec un DA

Étudier la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}$.

142

Riemann (ou pas !)

1. Soit $a > 0$. Donner la nature de $\sum a^{\ln n}$.

En utilisant que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$, déterminer la nature de $\sum a^{H_n}$ où $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

2. Nature de $\sum \frac{1}{n^n}$.
3. Nature de $\sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

Essayer de mettre le terme général sous la forme $a^{\ln n}$ avec a à déterminer.

143

Calculs de somme

Montrer les égalités suivantes, après avoir justifié l'existence des sommes infinies.

- | | |
|--|---|
| (i) $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -\ln 2$ | (iii) $\sum_{k=2}^{+\infty} \ln \left(\frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 3n}\right) = \ln 2$ |
| (ii) $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 0$ | (iv) $\sum_{k=0}^{+\infty} (3 + (-1)^k)^{-k} = \frac{26}{15}$ |

144

Calculs de somme

Justifier l'existence et calculer la somme des séries suivantes.

- | | |
|---|---|
| (i) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ | (iii) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ |
| (ii) $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - 1}$ | (iv) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1) \cdots (k+p)}$ |

Séries

corrigés

La série $\sum u_n$ étant convergente, son terme général tend vers 0.

Il existe donc un rang N tel que :

$$\forall n \geq N \quad 0 \leq u_n \leq 1,$$

et l'on a alors :

$$\forall n \geq N \quad 0 \leq u_n^2 \leq u_n.$$

Le théorème de comparaison des séries à termes positifs permet alors de conclure.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq \max(u_n, v_n) \leq u_n + v_n$ par positivité de u_n et v_n . Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, alors la série de TG $u_n + v_n$ est convergente comme somme de deux séries convergentes et l'on en déduit que la série de TG $\max(u_n, v_n)$ est convergente.
- Si la série $\sum \max(u_n, v_n)$ converge, alors les inégalités $0 \leq u_n \leq \max(u_n, v_n)$ et $0 \leq v_n \leq \max(u_n, v_n)$ entraînent la convergence des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Montrons que F est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites.

- Il est clair que la suite nulle est dans F . En effet, la série de terme général $n^2 0^2 = 0$ converge ! (sa somme est nulle!).

- Montrons que F est stable par combinaison linéaire.

Soit $u, v \in F$, soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Montrons que $\lambda u + \mu v \in F$, càd montrons que la série $\sum n^2(\lambda u_n + \mu v_n)^2$ converge.

Prenons le terme général de cette série. Il vaut :

$$n^2(\lambda u_n + \mu v_n)^2 = \lambda^2 n^2 u_n^2 + 2\lambda\mu n^2 u_n v_n + \mu^2 n^2 v_n^2$$

Examinons les 3 termes de cette somme.

▷ Comme $u \in F$, la série $\sum n^2 u_n^2$ converge.

▷ Idem pour v .

▷ Montrons que la série $\sum n^2 u_n v_n$ converge.

Appliquons l'inégalité rappelée à $a = nu_n$ et $b = nv_n$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |n^2 u_n v_n| = |(nu_n)(nv_n)| \leq \frac{1}{2} (n^2 u_n^2 + n^2 v_n^2)$$

Les séries $\sum n^2 u_n^2$ et $\sum n^2 v_n^2$ convergent (car $u, v \in F$). Par opération sur les séries convergentes, on en déduit que la série $\sum \frac{1}{2} (n^2 u_n^2 + n^2 v_n^2)$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum |n^2 u_n v_n|$ converge, c'est-à-dire que la série $\sum n^2 u_n v_n$ converge absolument, donc converge (par théorème).

Bilan : Par combinaison linéaire de séries convergentes, la série $\sum n^2(\lambda u_n + \mu v_n)^2$ converge, ce qui signifie que $\lambda u + \mu v \in F$.

Remarque. On aurait pu vérifier la stabilité par combinaison linéaire en deux temps. En vérifiant d'abord la stabilité par multiplication par un scalaire, puis par somme.

Montrons que F est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites.

- Il est clair que la suite nulle est dans F . En effet, la série de terme général $n0^2 = 0$ converge ! (sa somme est nulle!).

- Montrons que F est stable par combinaison linéaire.

Soit $u, v \in F$, soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Montrons que $\lambda u + \mu v \in F$, c'est-à-dire montrons que la série $\sum n(\lambda u_n + \mu v_n)^2$ converge.

Prenons le terme général de cette série. Il vaut :

$$n(\lambda u_n + \mu v_n)^2 = \lambda^2 n u_n^2 + 2\lambda\mu n u_n v_n + \mu^2 n v_n^2$$

Examinons les 3 termes de cette somme.

▷ Comme $u \in F$, la série $\sum n u_n^2$ converge.

▷ Idem pour v .

▷ Montrons que la série $\sum n u_n v_n$ converge.

Appliquons l'inégalité rappelée à $a = \sqrt{n} u_n$ et $b = \sqrt{n} v_n$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |n u_n v_n| = |\sqrt{n} u_n \sqrt{n} v_n| \leq \frac{1}{2} (n u_n^2 + n v_n^2)$$

Les séries $\sum n u_n^2$ et $\sum n v_n^2$ convergent (car $u, v \in F$). Par opération sur les séries convergentes, on en déduit que la série $\sum \frac{1}{2} (n u_n^2 + n v_n^2)$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum |n u_n v_n|$ converge, c'est-à-dire que la série $\sum n u_n v_n$ converge absolument, donc converge (par théorème).

Bilan : Par combinaison linéaire de séries convergentes, la série $\sum n(\lambda u_n + \mu v_n)^2$ converge, ce qui signifie que $\lambda u + \mu v \in F$.

Remarque. On aurait pu vérifier la stabilité par combinaison linéaire en deux temps. En vérifiant d'abord la stabilité par multiplication par un scalaire, puis par somme.

- Montrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

— La suite u est décroissante.

En effet, on montre par récurrence immédiate que $\forall n, u_n > 0$.

Donc $\forall n, \frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n} < 1$.

Donc $\forall n, u_{n+1} \leq u_n$.

— La suite u est minorée par 0.

BILAN : la suite u converge d'après le th de la limite monotone.

Notons ℓ sa limite.

En passant à la limite dans l'égalité $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$, on obtient

$$\ell = \ell e^{-\ell} \quad \text{d'où} \quad \ell(1 - e^{-\ell}) = 0 \quad \text{d'où (WHY ?)} \quad \ell = 0$$

- Étudions la nature de la série $\sum u_n$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ et la suite u est à termes > 0 , on peut donc prendre le log népérien.

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ln(u_{n+1}) = \ln(u_n) - u_n$$

Ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \ln(u_n) - \ln(u_{n+1})$$

Ainsi, étudier la série $\sum u_n$ revient à étudier la série télescopique $\sum (\ln(u_n) - \ln(u_{n+1}))$, qui a même nature (d'après le cours) que la SUITE $(\ln u_n)$.

Cette suite diverge (car $u_n \rightarrow 0$).

BILAN : La série $\sum u_n$ diverge.

Notons $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
 S_{5n} &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{5k+1} + \frac{1}{5k+2} + \frac{1}{5k+3} + \frac{1}{5k+4} - \frac{4}{5k+5} \right) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{5k+1} + \frac{1}{5k+2} + \frac{1}{5k+3} + \frac{1}{5k+4} + \frac{1}{5k+5} \right) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{5}{5k+5} \\
 &= \sum_{k=1}^{5n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\
 &= \sum_{k=n+1}^{5n} \frac{1}{k} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{4n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}.
 \end{aligned}$$

Ce dernier terme est du type

$$I_{4n} = \frac{4}{4n} \sum_{k=1}^{4n} \frac{1}{1 + \frac{4k}{4n}} \quad \text{où l'on a posé} \quad I_m = \frac{4}{m} \sum_{k=1}^m \frac{1}{1 + \frac{4k}{m}}.$$

La suite $(I_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ est une somme de Riemann de la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t}$, continue sur $[0, 4]$.
Donc :

$$I_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \int_0^4 \frac{1}{1+t} dt = \ln 5.$$

Par extraction, on a $I_{4m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \ln 5$ c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{5n} u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln 5$$

2. Comme $\lim_{p \rightarrow +\infty} u_p = 0$, on en déduit que $S_{5n+1} = S_{5n} + u_{5n+1}$ a aussi pour limite $\ln 5$.

De la même manière, on montre que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{5n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{5n+3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{5n+4} = \ln 5$$

On peut alors facilement montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ converge vers $\ln 5$ et donc que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \ln 5$$

1. La série de terme général $u_n = e^{-n^\alpha}$ diverge pour $\alpha \leq 0$ puisque son TG ne tend pas vers 0.
2. Soit $\alpha > 0$. Par croissances comparées :

$$n^2 u_n = (n^\alpha)^{2/\alpha} e^{-n^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

ce qui signifie que $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Comme $2 > 1$, on en déduit que $\sum u_n$ converge absolument.

Bilan. On vient de prouver que

$$\sum u_n \text{ CV} \iff \alpha > 0$$

On a $u_n = \sqrt{n} \left(1 + a\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + b\sqrt{1 + \frac{2}{n}} \right)$.

— Le $DL_1(0)$ de $\sqrt{1+t}$ fournit $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} + O(t^2)$.

On obtient un développement asymptotique de u_n :

$$u_n = \sqrt{n} \left((1+a+b) + \left(\frac{a}{2} + b\right) \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = (1+a+b)\sqrt{n} + \left(\frac{a}{2} + b\right) \frac{1}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

— Si $1+a+b \neq 0$, alors $u_n \sim (1+a+b)\sqrt{n}$.

Le terme général u_n ne tend pas vers 0, donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

— Si $1+a+b = 0$ et $\frac{a}{2} + b \neq 0$.

Alors $u_n \sim \left(\frac{a}{2} + b\right) \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Or la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (Riemann avec $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$).

Par comparaison de séries à termes de signe constant, la série $\sum u_n$ diverge.

— Si $1+a+b = 0$ et $\frac{a}{2} + b = 0$.

Alors $u_n = O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ et $\sum u_n$ converge (absolument).

Comme on a $(1+a+b = 0 \text{ et } \frac{a}{2} + b = 0) \iff (a = -2 \text{ et } b = 1)$, on en déduit :

$$\text{la série } \sum u_n \text{ converge} \iff (a, b) = (-2, 1)$$

— On suppose que $(a, b) = (-2, 1)$. Dans ce cas, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n u_k &= \sum_{k=0}^n \sqrt{k} - 2 \sum_{k=1}^{n+1} \sqrt{k} + \sum_{k=2}^{n+2} \sqrt{k} \\ &= \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} - 1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - 1. \end{aligned}$$

On en déduit que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = -1$.

1. On peut écrire $u_n = n^{\frac{1}{n}} - (n+1)^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{1}{n}} \left[1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \right]$.
Comme $\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$, on a $\frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
On en déduit que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = 1 + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
Donc $u_n = n^{\frac{1}{n}} \left[-\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$.
Puisque $n^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln n\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, on a $u_n \sim -\frac{1}{n^2}$, d'où la convergence absolue de $\sum u_n$.
2. Les fonctions $\tan$ et sh étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, elles admettent un $\operatorname{DL}_3(0)$ que l'on peut écrire, par imparité, $\tan x = x + O(x^3)$ et $\operatorname{sh} x = x + O(x^3)$.

Ainsi,

$$\tan x - \operatorname{sh} x = O(x^3)$$

D'où

$$\tan \frac{1}{n} - \operatorname{sh} \frac{1}{n} = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Puis, en multipliant par $n^{\frac{3}{2}}$:

$$u_n = n^{3/2} \times O\left(\frac{1}{n^3}\right) = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

La série $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge absolument (série de Riemann avec $\alpha = \frac{3}{2} > 1$), donc par comparaison, il en est de même la série $\sum u_n$.

3. On a $u_n = \exp(v_n)$ avec $v_n = n^\alpha \ln \left(\cos \frac{1}{n}\right) \sim n^\alpha \left(\cos \frac{1}{n} - 1\right) \sim -\frac{n^{\alpha-2}}{2}$.

Ainsi,

— Cas $\alpha \leq 2$. Alors v_n ne tend pas vers $-\infty$ et donc u_n ne tend pas vers 0 ;

Donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

— Cas $\alpha > 2$. Montrons que $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Autrement dit, montrons que $n^2 u_n = \exp(v_n + 2 \ln n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Comme $v_n \sim -\frac{n^{\alpha-2}}{2}$ et $\alpha > 2$, on a $v_n \rightarrow -\infty$ et $\ln n = o(v_n)$ par croissances comparées.

Donc $v_n + 2 \ln n = v_n + o(v_n) \sim v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$.

Donc $\exp(v_n + 2 \ln n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On a montré que $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge absolument, donc par comparaison la série $\sum u_n$ converge absolument.

Bilan : la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 2$.

1. On a

$$\left| \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)} \right| \sim \frac{1}{4n^2}$$

D'où la convergence absolue, et donc la convergence.

2. La relation $\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right)$ pourrait faire penser à une somme télescopique ; mais ce n'est pas le cas ici à cause des changements de signes occasionnés par les « $(-1)^n$ ». Calculons les sommes partielles. Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} 2 \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)} &= \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{2n+1} - \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{2n+3} \\ &= \sum_{n=0}^N \int_0^1 (-1)^n x^{2n} dx - \sum_{n=0}^N \int_0^1 (-1)^n x^{2n+2} dx \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^N (1-x^2)(-x^2)^n \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1-x^2 - (1-x^2)(-x^2)^{N+1}}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2} dx - \int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2} (-x^2)^{N+1} dx. \end{aligned}$$

• Intéressons-nous à la deuxième intégrale. Par inégalité triangulaire, on a

$$\left| \int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2} (-x^2)^{N+1} dx \right| \leq \int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2} x^{2N+2} dx$$

En notant K un majorant de $\frac{1-x^2}{1+x^2}$ sur $[0, 1]$ (licite), on a

$$\left| \int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2} (-x^2)^{N+1} dx \right| \leq K \int_0^1 x^{2N+2} dx = K \frac{1}{2N+3}$$

Donc :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2} (-x^2)^{N+1} dx = 0.$$

• Calculons la première intégrale.

$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2} dx = \int_0^1 \left(-1 + \frac{2}{1+x^2} \right) dx = -1 + 2 \operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

Bilan

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Posons $u_n = \frac{1}{n-x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et prenons $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 \geq x$. La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est positive, décroissante et tend vers 0. On en déduit, d'après le théorème des séries alternées, la convergence de la série $\sum_{n \geq n_0} (-1)^n u_n$ donc, par le caractère asymptotique de la notion de série convergente, celle de $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$.

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(n+x)^2}$ est une série alternée et la suite $\left(\frac{1}{(n+x)^2}\right)$ décroît et tend vers 0.

D'après le théorème des séries alternées, on en déduit que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(n+x)^2}$ converge et que son reste d'ordre n vérifie :

$$|R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+x)^2} \right| \leq \frac{1}{(n+1+x)^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Par comparaison, la série de TG R_n est absolument convergente, donc convergente.

Notons u_n le terme général qui vaut $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

Comme $\alpha > 1$, on peut trouver $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $1 < \gamma < \alpha$.

Comme $\alpha - \gamma > 0$, on a par croissances comparées (et même directement si $\beta \geq 0$)

$$n^\gamma u_n = \frac{1}{n^{\alpha-\gamma} (\ln n)^\beta} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc $u_n = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$.

La convergence absolue de la série $\sum \frac{1}{n^\gamma}$ (Riemann avec $\gamma > 1$) assure celle de $\sum u_n$.

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ est continue et décroissante sur $[2, +\infty[$ (comme inverse d'une fonction continue à valeurs strictement positives et évidemment croissante).

On obtient donc l'encadrement

$$\forall n \geq 2, \quad \int_2^n f(t) dt + f(n) \leq \sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_2^n f(t) dt + f(2)$$

Une primitive de f est $x \mapsto \ln(\ln x)$, donc

$$\int_2^n f(t) dt = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2)$$

Déterminons un équivalent du membre gauche :

$$\int_2^n f(t) dt + f(n) = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) + \frac{1}{n \ln n} \sim \ln(\ln n)$$

Ce membre gauche tend vers $+\infty$.

Par minoration, on en déduit que la suite des sommes partielles tend vers $+\infty$, donc la série $\sum f(n)$ diverge.

Déterminons un équivalent du membre droit :

$$\int_2^n f(t) dt + f(2) = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) + \frac{1}{2 \ln 2} \sim \ln(\ln n)$$

Les membres extrêmes sont équivalents à $\ln(\ln n)$, donc

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \sim \ln(\ln n).$$

Une étude de fonction montre que la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ est continue et décroissante sur $[3, +\infty[$.
On obtient donc l'encadrement

$$\forall n \geq 3, \quad \int_3^n f(t) dt + f(n) \leq \sum_{k=3}^n f(k) \leq \int_3^n f(t) dt + f(3)$$

Une primitive de f est $x \mapsto \frac{1}{2}(\ln x)^2$ donc

$$\int_3^n f(t) dt = \frac{1}{2}(\ln n)^2 - \frac{1}{2}(\ln 3)^2$$

Déterminons un équivalent du membre gauche :

$$\int_3^n f(t) dt + f(n) = \frac{1}{2}(\ln n)^2 - \frac{1}{2}(\ln 3)^2 + \frac{\ln n}{n} \sim \frac{1}{2}(\ln n)^2$$

Ce membre gauche tend vers $+\infty$.

Par minoration, on en déduit que la suite des sommes partielles tend vers $+\infty$, donc la série $\sum f(n)$ diverge.

Déterminons un équivalent du membre droit :

$$\int_3^n f(t) dt + f(3) = \frac{1}{2}(\ln n)^2 - \frac{1}{2}(\ln 3)^2 + \frac{\ln 3}{3} \sim \frac{1}{2}(\ln n)^2$$

Les membres extrêmes sont équivalents à $\frac{1}{2}(\ln n)^2$, donc

$$\sum_{k=3}^n \frac{\ln k}{k} \sim \frac{1}{2}(\ln n)^2$$

Donc (WHY), on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} \sim \frac{1}{2}(\ln n)^2$$

Comme $\alpha > 1$, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente ; cela justifie l'existence de u_n .

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ étant continue et décroissante sur $[1, +\infty[$, une comparaison série-intégrale donne :

$$(\star) \quad \int_{n+1}^N f(t)dt + f(N) \leq \sum_{k=n+1}^N f(k) \leq \int_{n+1}^N f(t)dt + f(n+1)$$

Or

$$\int_{n+1}^N f(t)dt = -\frac{1}{\alpha-1} \left[\frac{1}{t^{\alpha-1}} \right]_{n+1}^N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$$

Par passage à la limite dans $(\star)$, on obtient :

$$\frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq u_n \leq \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

D'où $u_n \sim \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que $\sum u_n$ a même nature que $\sum \frac{1}{n^{\alpha-1}}$. Ainsi, $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1$ c'est-à-dire si et seulement si $\alpha > 2$.

1. — Soit $n \in \mathbb{N}$.

Par décroissance de u , on a

$$\forall k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket, \quad 0 \leq u_{2n} \leq u_k$$

Par somme, on a

$$0 \leq nu_{2n} \leq \underbrace{\sum_{k=n+1}^{2n} u_k}_{S_{2n} - S_n}$$

— On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq nu_{2n} \leq S_{2n} - S_n$$

Par hypothèse, la série $\sum u_n$ converge, donc la suite (S_n) converge, donc $S_{2n} - S_n \rightarrow 0$.

D'après le théorème des Gendarmes, on en déduit $nu_{2n} \rightarrow 0$.

2. Montrons que $u_n = o(\frac{1}{n})$.

Montrons que la suite (nu_n) tend vers 0.

En notant $v_n = nu_n$, il s'agit de montrer que $v_{2n+1} \rightarrow 0$ et $v_{2n} \rightarrow 0$.

- On a $(2n+1)u_{2n+1} = 2 \times nu_{2n+1} + u_{2n+1}$.

On a $u_{2n+1} \rightarrow 0$ car $\sum u_n$ converge.

Montrons que $nu_{2n+1} \rightarrow 0$.

On a, par décroissance de u ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq nu_{2n+1} \leq nu_{2n}$$

Or $nu_{2n} \rightarrow 0$ d'après la première question.

Le théorème des Gendarmes fournit $nu_{2n+1} \rightarrow 0$.

Ainsi $v_{2n+1} = (2n+1)u_{2n+1} \rightarrow 0$.

- Or $nu_{2n} \rightarrow 0$, donc $v_{2n} = 2nu_{2n} \rightarrow 0$.

BILAN : la suite (nu_n) tend vers 0 (car les suites extraites d'indice pair et impair tendent vers 0).

Soit $\beta \neq 0$. On a :

$$\frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta} = \frac{1}{n^\beta} \underbrace{\left(1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\beta}\right)}_{\sim -(-\beta)\frac{1}{n}} \sim \frac{\beta}{n^{\beta+1}}.$$

Comme la suite de terme général $v_n = \frac{\beta}{n^{\beta+1}}$ est de signe constant, la série $\sum v_n$ a même nature que la série télescopique $\sum \left(\frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta}\right)$, donc a même nature que la suite $\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$.

Or, cette dernière suite converge ssi $\beta > 0$ (ici, $\beta \neq 0$).

Donc pour $\beta \neq 0$, La série $\sum \frac{1}{n^{\beta+1}}$ converge ssi $\beta > 0$.

Pour $\beta = 0$. On a

$$\ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \geq 0$$

La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ a même nature que la série télescopique $\sum (\ln(n+1) - \ln n)$, qui a même nature que la suite $(\ln n)$, qui diverge.

Donc, pour $\beta = 0$, la série $\sum \frac{1}{n^{\beta+1}}$ diverge.

Bilan.

La série $\sum \frac{1}{n^{\beta+1}}$ converge ssi $\beta > 0$.

Autrement dit, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

1. Fixons $N \in \mathbb{N}^*$. On utilise la définition de v_n , on fait apparaître une somme double, on intervertit les sommes, puis on décompose la fraction $\frac{1}{n(n+1)}$ en $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$; et enfin, on télescope !

$$\sum_{n=1}^N v_n = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k u_k \right) = \sum_{1 \leq k \leq n \leq N} \left(\frac{1}{n(n+1)} k u_k \right) = \sum_{k=1}^N \left(k u_k \sum_{n=k}^N \frac{1}{n(n+1)} \right) = \sum_{k=1}^N k u_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{N+1} \right)$$

D'où

$$\sum_{n=1}^N v_n = \sum_{k=1}^N u_k - \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^N k u_k = \sum_{k=1}^N u_k - N v_N$$

2. Montrons que la série $\sum v_n$ converge en montrant que la **suite** des sommes partielles $(V_N)_{N \in \mathbb{N}^*} =$

$$\left(\sum_{n=1}^N v_n \right)_{N \in \mathbb{N}^*} \text{ converge.}$$

Tout d'abord, comme le terme général v_n est positif, la suite $(V_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

Reste à montrer qu'elle est majorée, c'est-à-dire qu'il existe K tel que, pour tout N , on ait $V_N \leq K$.

D'après 1, on a

$$V_N = U_N - N v_N \quad \text{d'où} \quad V_N \leq U_N$$

Or la série $\sum u_n$ converge, donc la suite des sommes partielles $(U_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge, donc est en particulier majorée.

Comme $V_N \leq U_N$ pour tout N , on en déduit que la suite $(V_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ est majorée !

3. D'après 1, on a

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad N v_N = U_N - V_N$$

Les suites U et V convergent (hypothèse et 2), donc la suite $(N v_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge également.

Montrons que $\lim N v_N = 0$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\lim N v_N = \ell \neq 0$.

On a alors

$$v_N \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \ell \times \frac{1}{N}$$

Or $\frac{1}{N}$ est le terme général d'une série divergente.

Par comparaison de séries à termes positifs (le terme général v_N l'est), on en déduit que la série $\sum v_N$ diverge, ce qui contredit 2.

4. Il suffit de passer à la limite quand $N \rightarrow +\infty$ dans l'égalité 1 (c'est licite, WHY ?) et d'utiliser la question 3 qui dit que $N v_N \rightarrow 0$.

Les relations d'équivalence ou de domination données dans la suite sont parfois le fruit d'un calcul non trivial.

- (i) On a $n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$: la série diverge grossièrement.
- (ii) On a $\left(\frac{n}{2}\right)^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$: la série diverge grossièrement.
- (iii) On a $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}} = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par croissance comparée : la série converge par comparaison à une série de Riemann (technique standard pour les séries « à l'air exponentiel »).
- (iv) On a $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{n}$: la série diverge par comparaison à une série de Riemann.
- (v) On a $1 - \cos \frac{\pi}{n} \sim \frac{\pi^2}{2n^2}$: la série converge par comparaison à une série de Riemann.
- (vi) On a $\frac{(-1)^n + n}{n^2 + 1} \sim \frac{1}{n}$: la série diverge par comparaison à une série de Riemann.
- (vii) On a $|a^n n!| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ dès que $a \neq 0$. Ainsi, la série converge (elle est nulle à partir d'un certain rang) si $a = 0$, et diverge grossièrement dans tous les autres cas.
- (viii) On a $ne^{-\sqrt{n}} = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par croissance comparée : la série converge par comparaison à une série de Riemann (technique standard pour les séries « à l'air exponentiel »).
- (ix) Distinguons trois cas :
 - si $a \leq 0$, la série diverge grossièrement ;
 - si $0 < a \leq 1$, on a $\frac{1}{n} = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{\ln n}{n^a}\right)$, et la série diverge par comparaison à une série de Riemann ;
 - si $a > 1$, on peut trouver un réel $1 < b < a$, et on a $\frac{\ln n}{n^a} = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^b}\right)$ (par croissance comparée) : la série converge par comparaison à une série de Riemann.
- (x) On a $\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right) \sim \frac{2}{n^2}$: la série converge par comparaison à une série de Riemann.
- (xi) On a $\frac{\ln(n^2+3)\sqrt{2^n+1}}{4^n} = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$: la série converge par comparaison à une série de Riemann (technique standard pour les séries « à l'air exponentiel »).
- (xii) On a $\frac{\ln n}{\ln(e^n-1)} \sim \frac{\ln n}{n}$, donc $\frac{1}{n} = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{\ln n}{\ln(e^n-1)}\right)$: la série diverge par comparaison à une série de Riemann.
- (xiii) On a $\sqrt{\operatorname{ch} \frac{1}{n} - 1} \sim \frac{1}{n}$: la série diverge par comparaison à une série de Riemann.
- (xiv) On a $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$: la série converge par comparaison à une série de Riemann (technique standard pour les séries « à l'air exponentiel »).
- (xv) On a $\left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^\alpha} = \exp\left[-\frac{1}{6}n^{\alpha-2} + o(n^{\alpha-2})\right]$. On montre alors que la série diverge grossièrement si $\alpha \leq 2$ et qu'elle converge si $\alpha > 2$ car son terme général est alors $o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (technique standard pour les séries « à l'air exponentiel »).
- (xvi) On a $\sqrt[3]{n^3+an} - \sqrt{n^2+3} = \left(\frac{a}{3} - \frac{3}{2}\right)\frac{1}{n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Ainsi,

- si $a \neq \frac{9}{2}$, le terme général est équivalent à $\underbrace{\left(\frac{a}{3} - \frac{3}{2}\right)}_{\neq 0} \frac{1}{n}$, et la série diverge par comparaison à une série de Riemann ;
- si $a = \frac{9}{2}$, le terme général est $o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et la série converge par comparaison à une série de Riemann.
- (xvii) On a $e^{1/n} - a - \frac{b}{n} = (1-a) + \frac{1-b}{n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ainsi,
 - si $a \neq 1$, le terme général tend vers $1-a \neq 0$, et la série diverge grossièrement ;
 - si $a = 1$ et $b \neq 1$, le terme général est équivalent à $\frac{1-b}{n}$, et la série diverge par comparaison à une série de Riemann ;
 - si $a = b = 1$, le terme général est $o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et la série converge par comparaison à une série de Riemann.

Remarque : il était habile d'effectuer un développement du terme général avec un terme d'erreur en $O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$ plutôt que d'écrire un terme en $\frac{*}{n^2}$ (qui n'aurait pas eu d'importance) puis un terme d'erreur en $o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$.

- (xviii) Le terme général est équivalent à $2^{\frac{\ln(n)}{n^a}}$. Ainsi, en reprenant le résultat sur les séries de Bertrand, la série converge si et seulement si $a > 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Utilisons un DL :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)^{-1} \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}_{v_n}. \end{aligned}$$

La convergence de la série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, la divergence de la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ et la convergence absolue, par comparaison à une série de Riemann, de la série $\sum v_n$ entraîne donc la divergence de la série $\sum u_n$.