

Variables aléatoires

I Généralités	2
Variable aléatoire	
Événements liés à une variable aléatoire	
Quelques exemples	
II Loi d'une variable aléatoire	5
Définition - Propriétés	
Lois usuelles	
III Couples de variables aléatoires	9
Définition	
Loi conjointe	
Lois marginales	
Lois conditionnelles	
IV Variables aléatoires indépendantes	13
Indépendance de deux variables aléatoires	
Indépendance de n variables aléatoires	
Généralisation à n variables	
Somme de variables indépendantes de même loi de Bernoulli	



I. Généralités

Variable aléatoire

1

Définition. Soit Ω un univers fini.

Une *variable aléatoire* sur Ω est une application $X : \Omega \rightarrow E$ où E est un ensemble.

- Une variable aléatoire n'est pas une « variable »!
C'est une *application* définie sur Ω .
Cette application n'est *pas* aléatoire.
- L'image de l'application X , à savoir $X(\Omega)$, est souvent appelé *l'univers image* de X .
Comme Ω est un ensemble fini, alors $X(\Omega)$ est une partie finie de $\mathbb{R}$.
- Une variable aléatoire X est dite
 - réelle, lorsque $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$
 - complexe, lorsque $X(\Omega) \subset \mathbb{C}$
 - entière, lorsque $X(\Omega) \subset \mathbb{Z}$
 - positive, lorsque $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$
- Soit E un ensemble et $x_0 \in E$.
L'application $X : \Omega \rightarrow E$ est une variable aléatoire appelée *variable aléatoire constante* ou *certaine*.
$$\omega \mapsto x_0$$
- Soit A un événement de Ω (c'est-à-dire $A \in \mathcal{P}(\Omega)$).
L'application :

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$
$$\omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une variable aléatoire réelle appelée *variable indicatrice de A* et notée $\mathbb{1}_A$.

- L'ensemble des variables aléatoires **réelles** définies sur Ω est donc l'ensemble $\mathbb{R}^\Omega$ (l'ensemble des applications de Ω dans $\mathbb{R}$), ensemble sur lequel ont été définies une structure d'espace vectoriel et une multiplication interne.
Ainsi, si X et Y sont des variables aléatoires réelles sur Ω et λ un réel, alors $X + Y$, λX et XY sont des variables aléatoires réelles.
On peut faire la même remarque pour les variables aléatoires complexes.

2

Définition (Transformée d'une VA).

Soit X une variable aléatoire sur Ω .

Soit g une application définie sur $X(\Omega)$ et à valeurs dans E .

L'application $g \circ X : \Omega \rightarrow E$ est une variable aléatoire sur Ω , notée $g(X)$, plutôt que $g \circ X$.
$$\omega \mapsto g(X(\omega))$$

- La notation $g(X)$, *a priori* incorrecte pour nommer la composée de X et g , s'accorde avec la terminologie qui nomme variable l'application X .



Événements liés à une variable aléatoire

La théorie des probabilités utilise, pour décrire certains événements liés aux variables aléatoires, des notations spéciales dont il importe de bien comprendre la signification.

Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers Ω , à valeurs dans E .

- **Cas général.**

Soit D une partie de E .

L'ensemble $X^{-1}(D) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in D\}$, image réciproque de D par l'application X , est noté :

$$\{X \in D\} \quad \text{ou} \quad (X \in D) \quad \text{ou encore} \quad [X \in D]$$

L'ensemble $\{X \in D\}$ est une partie de Ω , c'est-à-dire un événement.

- En particulier, pour $x \in E$, l'événement $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$ est noté $\{X = x\}$.

On remarque que, pour tout $x \notin X(\Omega)$, on a $\{X = x\} = \emptyset$.

Ainsi, on a toujours $\{X = x\} = \emptyset$, sauf pour un nombre fini de valeurs de x !!

- **Pour une VA réelle.**

Soit X est une variable aléatoire **réelle** et $x \in \mathbb{R}$. On utilise les notations suivantes :

$$\{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}$$

$$\{X \geq x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geq x\}$$

$$\{X < x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\}$$

$$\{X > x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > x\}.$$

On a l'égalité remarquable d'événements :

$$\{X \leq x\} = \{X < x\} \sqcup \{X = x\}$$

- **Pour une indicatrice.**

Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

L'événement $\{\mathbb{1}_A = 1\}$ est

L'événement $\{\mathbb{1}_A = 0\}$ est

3

Proposition. Soit X une variable aléatoire sur Ω .

La famille $(\{X = x\})_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements, appelé *système complet d'événements associé à X* :

$$\Omega = \bigsqcup_{x \in X(\Omega)} \{X = x\}$$

- **Exemple.** Le système complet d'événements associé à la variable aléatoire $\mathbb{1}_A$ est $(A, \bar{A})$.

- **Remarque.** Soit $D \subset E$.

L'événement $\{X \in D\}$ peut s'écrire comme réunion (peut-être infinie, si D est infinie...) d'événements de la forme $\{X = x\}$:

$$\{X \in D\} = \bigsqcup_{x \in D} \{X = x\}$$

Mais on a aussi (WHY) :

$$\{X \in D\} = \bigsqcup_{x \in D \cap X(\Omega)} \{X = x\}$$

qui est une réunion finie (WHY).

Ainsi, tout événement du type $\{X \in D\}$ peut s'écrire comme une réunion **finie** d'événements de la forme $\{X = x\}$.

Quelques exemples

- On lance deux dés et on s'intéresse aux deux numéros obtenus. On suppose que ces dés sont discernables (par exemple qu'ils sont de couleurs différentes) ou qu'au moins on peut les distinguer mentalement (de telle sorte qu'il y ait un premier dé et un second).

On choisit comme univers $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$ de sorte qu'une issue soit le couple des résultats obtenus.

On introduit les variables aléatoires X_1 et X_2 désignant respectivement les résultats du premier dé et du second dé :

$$\begin{array}{lll} X_1 : & \Omega & \longrightarrow \llbracket 1, 6 \rrbracket \\ & (a, b) & \longmapsto a \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{lll} X_2 : & \Omega & \longrightarrow \llbracket 1, 6 \rrbracket \\ & (a, b) & \longmapsto b \end{array}$$

Ces variables aléatoires X_1 et X_2 permettent d'exprimer de manière simple les événements associés à cette expérience aléatoire. Par exemple :

- l'événement A : « le premier dé donne un numéro pair » s'écrit :

$$A = \{X_1 \text{ est pair}\} \quad \text{ou encore} \quad A = \{X_1 \in \{2, 4, 6\}\} \quad \text{ou encore} \quad A = \{X_1 = 2\} \sqcup \{X_1 = 4\} \sqcup \{X_1 = 6\}$$

- l'événement E : « les deux dés donnent le même résultat » s'écrit :

$$E = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

mais s'écrit aussi $E = \{X_1 = X_2\}$.

- si l'on note S la variable aléatoire « somme des deux résultats obtenus » :

$$\begin{array}{lll} S : & \Omega & \longrightarrow \llbracket 2, 12 \rrbracket \\ & (a, b) & \longmapsto a + b \end{array}$$

alors on a $S = X_1 + X_2$, de telle sorte que l'événement « la somme des deux résultats obtenus vaut au moins 7 » s'écrit $\{X_1 + X_2 \geq 7\}$.

- Considérons l'expérience consistant à tirer simultanément 4 cartes d'un jeu de 52 cartes. On peut modéliser cette expérience aléatoire en considérant comme univers l'ensemble des parties à 4 éléments parmi les 52 cartes du jeu.

Parmi les événements que l'on peut considérer, citons-en deux :

$$A = \text{« obtenir au moins un as »} \quad B = \text{« obtenir au moins une carte rouge et une carte noire »}$$

- Notons X la variable aléatoire donnant le nombre d'as obtenus. Alors on a :

$$A = \{X \geq 1\} \quad \text{et} \quad \overline{A} = \{X = 0\}.$$

- Notons Y la variable aléatoire donnant le nombre de cartes rouges. Alors on a :

$$B = \{1 \leq Y \leq 3\} \quad \text{et} \quad \overline{B} = \{Y = 0\} \sqcup \{Y = 4\}$$

- On effectue n lancers d'une pièce, chaque lancer donnant pile ou face.

Au résultat PILE, on associe 1 et au résultat FACE, on associe 0.

Modélisons cette expérience aléatoire par l'univers $\Omega = \{0, 1\}^n$.

Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons X_k la variable aléatoire associée au $k^{\text{ème}}$ lancer :

$$\begin{array}{lll} X_k : & \Omega & \longrightarrow \{0, 1\} \\ & (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto x_k \end{array}$$

Avec ces notations :

- l'événement « on n'a obtenu que des piles » s'écrit
- la variable aléatoire égale au « nombre de piles obtenus » est
- l'événement « on a obtenu au moins autant de piles que de faces » s'écrit

II. Loi d'une variable aléatoire

Considérons un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$.

En vue d'alléger les notations, on écrit $\mathbb{P}(X \in A)$ pour désigner la probabilité de l'événement $\{X \in A\}$, au lieu de $\mathbb{P}(\{X \in A\})$; de même, on écrit $\mathbb{P}(X = x)$ au lieu de $\mathbb{P}(\{X = x\})$.

Définition - Propriétés

4

preuve

Théorème. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathbb{P})$. Alors l'application :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_X : \mathcal{P}(X(\Omega)) &\longrightarrow [0, 1] \\ A &\longmapsto \mathbb{P}(X \in A)\end{aligned}$$

est une probabilité sur $X(\Omega)$, appelée *loi de X* et notée $\mathbb{P}_X$.

- Considérer la loi de X , c'est s'intéresser uniquement à $X(\Omega)$ et à sa probabilité $\mathbb{P}_X$.
On oublie l'univers Ω et on oublie X en tant qu'application.
- La loi de X dépend de la probabilité choisie sur Ω , alors que la variable aléatoire X peut être définie indépendamment de la probabilité.

5

Proposition.

La loi d'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathbb{P})$ est déterminée de manière unique par la distribution de probabilités $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.

Plus précisément,

$$\forall A \in \mathcal{P}(X(\Omega)), \quad \mathbb{P}_X(A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x).$$

- La loi de X est la donnée de :
 - l'univers image $X(\Omega)$
 - la probabilité $\mathbb{P}(X = x)$, pour tout $x \in X(\Omega)$
- Parfois, on ne connaît *a priori* qu'un ensemble E tel que $X(\Omega) \subset E$.
On calcule alors $\mathbb{P}(X = x)$ pour tout $x \in E$.
Lorsque $x \notin X(\Omega)$, on doit trouver $\mathbb{P}(X = x) = 0$, car $\{X = x\} = \emptyset$ pour $x \notin X(\Omega)$.

6

Question.

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On tire au hasard s boules **sans** remise.
On note X la VA égale au plus grand des numéros tirés.
Déterminer la loi de X .

7

Question.

On lance n fois une pièce de monnaie donnant PILE avec une probabilité p .
On note X la VA égale au nombre de PILE obtenus.
Déterminer la loi de X .

8

sol → 19

Question.

On lance un dé deux fois successivement.
On note X la variable aléatoire égale à la somme des chiffres apparus.
Déterminer la loi de X .

9

Définition.

On dit que X et Y ont même loi lorsque $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$, c'est-à-dire lorsque :

$$X(\Omega) = Y(\Omega) \quad \text{et} \quad \forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(Y = x)$$

On note $X \sim Y$ la relation $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$.

- **Attention.** Dire que deux variables aléatoires sur le même espace probabilisé ont même loi ne signifie pas qu'elles sont égales.

En effet, l'égalité $X = Y$ équivaut à :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X(\omega) = Y(\omega) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \forall x \in X(\Omega), \quad \{X = x\} = \{Y = x\}$$

- **Exemple à retenir.**

Soit A un événement de probabilité $\frac{1}{2}$.

Alors les variables $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_{\bar{A}}$ ont même loi, mais ne sont pas égales.

En effet, elles sont à valeurs dans $\{0, 1\}$ et

$$\mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 0) = \mathbb{P}(\mathbb{1}_{\bar{A}} = 0) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1) = \mathbb{P}(\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1) = \frac{1}{2}$$

Mais $\mathbb{1}_A$ n'est pas égal à $\mathbb{1}_{\bar{A}}$ car il existe $\omega_0 \in \Omega$ tel que $\mathbb{1}_A(\omega_0) \neq \mathbb{1}_{\bar{A}}(\omega_0)$.

En fait, pour tout $\omega \in \Omega$, on a $\mathbb{1}_A(\omega) = 1 \iff \mathbb{1}_{\bar{A}}(\omega) = 0$, donc $\mathbb{1}_A(\omega) \neq \mathbb{1}_{\bar{A}}(\omega)$ pour **tout** $\omega \in \Omega$.

- **Astuce.**

Parfois, il est plus simple de déterminer $\mathbb{P}(X \leq x)$ (resp. $\mathbb{P}(X \geq x)$) plutôt que directement $\mathbb{P}(X = x)$. C'est le cas en particulier dans des problèmes de maximum (resp. minimum).

Dans le cas où $X(\Omega) \subset \mathbb{Z}$, on utilisera, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, les égalités :

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k - 1) \quad \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k + 1)$$

qui proviennent des égalités d'événements

$$\{X \leq k\} = \{X = k\} \sqcup \{X \leq k - 1\} \quad \{X \geq k\} = \{X = k\} \sqcup \{X \geq k + 1\}$$

10

Question.

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On tire au hasard s boules **avec** remise.

On note X (resp. Y) la VA égale au plus grand (resp. plus petit) des numéros tirés.

Déterminer la loi de X et de Y .

11

preuve

Proposition.

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$ et g une application définie sur $X(\Omega)$.

La loi de la variable aléatoire $Z = g(X)$ est donnée par :

$$\forall z \in g(X)(\Omega), \quad \mathbb{P}(g(X) = z) = \sum_{x \in g^{-1}(\{z\})} \mathbb{P}(X = x).$$

- **Exemple.** Soit X une VA telle que $X(\Omega) = \llbracket -n, n \rrbracket$.

La loi de X^2 est donnée par :

- $X^2(\Omega) = \{k^2, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ (qui est seulement inclus dans $\llbracket 0, n^2 \rrbracket$).
- Soit $y \in X^2(\Omega)$. Alors y s'écrit k^2 pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
 - Si $y = 0$, alors $\{X^2 = 0\} = \{X = 0\}$. D'où $\mathbb{P}(X^2 = 0) = \mathbb{P}(X = 0)$.
 - Si $y \neq 0$, alors $\{X^2 = y\} = \{X = k\} \sqcup \{X = -k\}$. D'où $\mathbb{P}(X^2 = y) = \mathbb{P}(X = k) + \mathbb{P}(X = -k)$.



12
sol → 20**Question.**

Un joueur lance successivement deux fois un dé équilibré. Soit X la variable aléatoire égale à la différence entre les résultats du premier et du deuxième lancer. Déterminer les lois de X et $|X|$.

13
preuve**Proposition (conservation de la loi par transformation).**

Soit X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbb{P})$.

Soit g une application définie sur $X(\Omega)$.

On a l'implication :

$$X \sim Y \implies g(X) \sim g(Y)$$

- Le résultat reste vrai si X et Y ne sont pas définies sur le même espace probabilisé.

Lois usuelles

14

Définition.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans E , ensemble fini non vide.

On dit que X suit *la loi uniforme sur E* lorsque

- X est à valeurs dans E on a même l'égalité $X(\Omega) = E$
- $\forall x \in E, \quad \mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{\text{card}(E)}.$

On note $X \sim \mathcal{U}(E)$.

Cas particuliers.

Soit $a \leq b \in \mathbb{Z}$.

X suit une loi uniforme sur $\llbracket a, b \rrbracket$ lorsque

- X est à valeurs dans $\llbracket a, b \rrbracket$
- $\forall k \in \llbracket a, b \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{b - a + 1}$

On note $X \sim \mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

X suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ lorsque

- X est à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$
- $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$

On note $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

Situation typique.

- On choisit un élément au hasard dans un ensemble fini non vide E .
La variable aléatoire égale à l'élément choisi suit la loi uniforme sur E .
- Considérons l'expérience qui consiste à tirer une boule dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n .
Alors la VA égale au numéro de la boule tirée suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.
- Considérons l'expérience qui consiste à lancer (1 fois) un dé équilibré.
Alors la VA égale au numéro du dé suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, 6 \rrbracket$.

15

Définition (Loi de Bernoulli)

Soit $p \in [0, 1]$ et X une variable aléatoire.

On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p lorsque

- X est à valeurs dans $\{0, 1\}$ et même $X(\Omega) = \{0, 1\}$ lorsque $p \in]0, 1[$
- $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et donc $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$

On note $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Situation typique.

Considérons l'expérience à deux issues : « succès » ou « échec » où p est la probabilité du succès. Alors la VA égale à 1 en cas de succès et 0 sinon suit une loi de Bernoulli de paramètre p .



- **Remarque.**

Une variable aléatoire suit une loi de Bernoulli (on dira est une variable de Bernoulli) si et seulement si elle est à valeurs dans $\{0, 1\}$.

- **Indicatrice.**

Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Alors $\mathbb{1}_A$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.

Donc l'indicatrice d'un événement est une variable de Bernoulli.

Réciproquement, toute variable de Bernoulli est l'indicatrice d'un événement (en l'occurrence de l'événement $\{X = 1\}$).

16

Définition (Loi binomiale)

Soit $p \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire.

On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p lorsque

— X est à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ et même $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ lorsque $p \in]0, 1[$

— $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

On note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

- **Situation typique.**

Considérons l'expérience qui consiste à répéter de manière identique et indépendante n fois une même expérience à deux issues : « succès » ou « échec » où p est la probabilité du succès. Alors la VA égale au nombre de succès suit une loi binomiale de paramètres n et p .



III. Couples de variables aléatoires

Définition

17

Définition.

Soit X et Y sont deux variables aléatoires sur Ω à valeurs dans E et F respectivement.

L'application :

$$\begin{aligned}\Omega &\longrightarrow E \times F \\ \omega &\longmapsto (X(\omega), Y(\omega))\end{aligned}$$

est appelée *couple de variables aléatoires* sur Ω .

Cette application est notée (X, Y) .

- Un couple de variables aléatoires est simplement une application de Ω dans $E \times F$, c'est-à-dire une variable aléatoire à valeurs dans $E \times F$.
- L'image $(X, Y)(\Omega)$ est la partie du produit cartésien $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ formée des couples $(X(\omega), Y(\omega))$ où ω décrit Ω . En général $(X, Y)(\Omega)$ est *strictement* inclus dans $X(\Omega) \times Y(\Omega)$, qui est l'ensemble formé des couples $(X(\omega), Y(\omega'))$ avec $\omega, \omega' \in \Omega$.

On lance un dé.

Notons X la variable aléatoire qui désigne le numéro, et Y la variable aléatoire qui désigne sa parité.

On note $Z = (X, Y)$.

Alors $(5, \text{pair}) \notin Z(\Omega)$, mais $(5, \text{pair}) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

• Événements liés à un couple.

Soit X une VA à valeurs dans E . On rappelle que, pour $x \in E$, on a

$$\{X = x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$$

On a aussi une notation analogue pour un couple de VA.

$$\begin{aligned}\{(X, Y) = (x, y)\} &= \{\omega \in \Omega \mid (X(\omega), Y(\omega)) = (x, y)\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x \text{ et } Y(\omega) = y\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\} \cap \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) = y\} \\ &= \{X = x\} \cap \{Y = y\}\end{aligned}$$

• Exemple des deux dés. On lance deux dés.

Notons X la variable aléatoire égale au plus petit des nombres apparus et Y est la variable aléatoire égale au plus grand des nombres apparus.

Alors (X, Y) est un couple de variables aléatoires réelles. Les variables aléatoires X et Y sont à valeurs dans $\llbracket 1, 6 \rrbracket$ et, par définition de X et Y , l'ensemble des valeurs prises par (X, Y) est :

$$\{(i, j) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket^2 \mid i \leq j\}.$$

- Une urne contient 2 boules blanches, 3 boules rouges et 4 boules bleues. On extrait simultanément 3 boules de l'urne. On note X le nombre de boules blanches et Y le nombre de boules rouges. Alors (X, Y) est un couple de variables aléatoires réelles. La variable aléatoire X est à valeurs dans $\llbracket 0, 2 \rrbracket$ et Y est à valeurs dans $\llbracket 0, 3 \rrbracket$. L'ensemble des valeurs prises par (X, Y) est :

$$\{(i, j) \in \llbracket 0, 2 \rrbracket \times \llbracket 0, 3 \rrbracket \mid i + j \leq 3\},$$

car on ne tire que 3 boules en tout.

18

Proposition. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur Ω .

La famille d'événements $\left(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\right)_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ est un système complet d'événements de Ω appelé *système complet d'événements associé au couple* (X, Y) .

$$\Omega = \bigsqcup_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} \{X = x\} \cap \{Y = y\}$$

- Si l'univers Ω est muni d'une probabilité $\mathbb{P}$, on a l'égalité :

$$\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = 1.$$

- **Notation.** La probabilité $\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$ pourra être notée $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$.

Loi conjointe

19

Définition.

Soit X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbb{P})$. La *loi conjointe* de X et Y est la loi du couple (X, Y) .

- Par définition de la loi d'une variable aléatoire, la loi du couple (X, Y) est l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{(X,Y)} : \mathcal{P}((X,Y)(\Omega)) &\longrightarrow [0,1] \\ A &\longmapsto \mathbb{P}((X,Y) \in A) \end{aligned}$$

C'est une probabilité sur $(X, Y)(\Omega)$.

- **Dans la pratique.**

La loi conjointe des variables aléatoires X et Y — ou encore la loi du couple (X, Y) — est caractérisée par la donnée de

- $X(\Omega) \times Y(\Omega)$
- des valeurs $\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$ pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

- **Transformée d'une VA.**

Comme à la proposition 11, on peut s'intéresser à la loi d'une transformée du couple (X, Y) .

Par exemple, lorsque X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{K}$, on peut s'intéresser à la VA $X + Y$.

Notons que $X + Y$ s'écrit $g \circ (X, Y)$, où $g : (x, y) \mapsto x + y$.

Lorsque les variables sont à valeurs **réelles**, on peut également s'intéresser à $\max(X, Y)$ et $\min(X, Y)$.

- **Exemple des deux dés.** On lance deux dés équilibrés.

Notons X la variable aléatoire égale au plus petit des nombres apparus et Y est la variable aléatoire égale au plus grand des nombres apparus.

Déterminons la loi conjointe.

On munit l'univers $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$ de la probabilité uniforme.

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$.

On a l'égalités d'événements :

$$\{X = i\} \cap \{Y = j\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } i > j \\ \{(i, i)\} & \text{si } i = j \\ \{(i, j), (j, i)\} & \text{si } i < j \end{cases}$$

En appliquant $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ \frac{1}{36} & \text{si } i = j \\ \frac{2}{36} & \text{si } i < j \end{cases}$$



20

Définition.

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires.

La loi de X est appelée *première loi marginale du couple* et celle de Y est appelée *deuxième loi marginale du couple*.

Le théorème suivant exprime le fait que l'on peut déduire les lois marginales de la loi du couple. Pour obtenir une loi marginale, on somme par rapport à l'autre variable.

21

preuve

Théorème. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbb{P})$.

Pour tout $x \in X(\Omega)$, on a

$$\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$$

Pour tout $y \in Y(\Omega)$, on a

$$\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$$

• Exemple des deux dés.

Déterminons les lois marginales du couple (X, Y) .

On obtient que, pour tout $i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$:

$$\mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=1}^6 \mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = \frac{1}{36} + \sum_{j=i+1}^6 \frac{1}{18} = \frac{1 + 2(6-i)}{36} = \frac{13-2i}{36}.$$

De même, pour tout entier j de $\llbracket 1, 6 \rrbracket$, on a :

$$\mathbb{P}(Y = j) = \sum_{i=1}^6 \mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{18} + \frac{1}{36} = \frac{2(j-1) + 1}{36} = \frac{2j-1}{36}.$$

Si la loi conjointe est représentée sous la forme d'un tableau, pour obtenir les lois de X et Y , il faut sommer sur les lignes ou les colonnes.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

• Remarque.

La connaissance des lois marginales ne suffit pas, en général, à reconstituer la loi conjointe d'un couple de variables aléatoires, sauf pour des variables aléatoires indépendantes.



22
sol → 20

Question. Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3. On tire deux boules avec remise. On note X le premier numéro tiré et Y le second. Déterminer la loi conjointe et les lois marginales.

Recommencer avec du « sans remise ». Que peut-on en conclure ?

Lois conditionnelles

23

Définition. Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$.

Soit A un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

La *loi conditionnelle de X sachant A* est la loi de X dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P}_A)$.

• Dans la pratique.

La *loi conditionnelle de X sachant A* est déterminée par la donnée de

- $X(\Omega)$
- des valeurs $\mathbb{P}_A(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

24
sol → 21

Question. On lance un dé équilibré.

On note X la variable égale au numéro obtenu.

On note A l'événement « le numéro est pair ».

Déterminer la loi conditionnelle de X sachant A .

25

Proposition.

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbb{P})$.

Pour tout $x \in X(\Omega)$, on a

$$\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(Y = y) \mathbb{P}_{\{Y=y\}}(X = x).$$

Pour tout $y \in Y(\Omega)$, on a

$$\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) \mathbb{P}_{\{X=x\}}(Y = y).$$



IV. Variables aléatoires indépendantes

Indépendance de deux variables aléatoires

26

Définition. Soit X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbb{P})$ et à valeurs dans E et F respectivement. Les VA X et Y sont dites *indépendantes* lorsque pour toute partie A de E et toute partie B de F , les événements $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ sont indépendants, c'est-à-dire

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F), \quad \mathbb{P}(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = \mathbb{P}(X \in A) \mathbb{P}(Y \in B)$$

- La proposition suivante dit qu'il suffit de vérifier cette égalité pour les singletons. Autrement dit, il suffit de prendre $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$ pour $x \in E$ et $y \in F$.

27

preuve

Proposition. Soit X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbb{P})$ et à valeurs dans E et F respectivement. Ces VA X et Y sont indépendantes si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E \times F, \quad \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \mathbb{P}(X = x) \mathbb{P}(Y = y).$$

- Indépendance** $\implies$ (**Lois marginales** $\rightarrow$ **Loi conjointe**). Dans le cas de variables aléatoires indépendantes, la donnée des lois marginales permet de connaître la loi conjointe.
- Exemple.** Soit X une VA constante et Y quelconque. Alors X et Y sont indépendantes (WHY?).

28

preuve

Proposition.

Soit X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbb{P})$. Il y a équivalence entre :

- X et Y sont indépendantes
- pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$, la loi de X sachant $\{Y = y\}$ est égale à la loi de X .

- Remarque à sauter en première lecture.**

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Si :

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x) \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y = y) \neq 0,$$

alors, pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$:

$$\mathbb{P}((X, Y) = (x, y)) = \mathbb{P}(X = x) \mathbb{P}(Y = y) \neq 0,$$

et donc *a fortiori* $\{(X, Y) = (x, y)\} \neq \emptyset$.

Dans ce cas $(X, Y)(\Omega) = X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

- La notion d'indépendance n'est pas une notion ensembliste. Elle dépend de la probabilité choisie.

29

preuve

Proposition.

Soit X et Y définies sur le même espace probabilisé.

Si X et Y suivent des lois de **Bernoulli**, alors

$$X \text{ et } Y \text{ sont des VA indépendantes} \iff \{X = 1\} \text{ et } \{Y = 1\} \text{ sont des év}^t \text{ indépendants}$$



30
preuve

Proposition. Soit X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbb{P})$.
Soit φ (resp. ψ) une application définie sur $X(\Omega)$ (resp. sur $Y(\Omega)$).
On a l'implication

$$X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \implies \varphi(X) \text{ et } \psi(Y) \text{ indépendantes}$$

- **Exemple.** Si X et Y sont indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{K}$, alors $\exp(X)$ et Y^2 le sont aussi.

31 **Question.** Soit X et Y deux variables indépendantes.

On suppose que X (resp. Y) suit la loi de Bernoulli de paramètre p (resp. p').

Déterminer la loi de $Z = |X - Y|$.

Même question avec $Z = \max(X, Y)$ puis $Z = XY$.

32
sol → 23

Question. On considère X et Y deux VA indépendantes suivant une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.
Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Indépendance de n variables aléatoires

33

Définition.

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathbb{P})$ à valeurs dans $E_1, \dots, E_n$ respectivement.
Ces VA sont dites *mutuellement indépendantes* lorsque

$$\forall (A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(E_1) \times \dots \times \mathcal{P}(E_n), \quad \mathbb{P}(\{X_1 \in A_1\} \cap \dots \cap \{X_n \in A_n\}) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in A_i).$$

- Une suite finie $(X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes sert à modéliser n épreuves aléatoires indépendantes, la variable X_k représentant le résultat de la k -ième épreuve.
- On dit souvent indépendantes au lieu de mutuellement indépendantes.
- L'indépendance d'un n -uplet de variables aléatoires ne dépend pas de l'ordre de ces variables.
- **Rappel.** Fixons des parties $A_i \in \mathcal{P}(E_i)$.
Les événements $\{X_1 \in A_1\}, \dots, \{X_n \in A_n\}$ sont mutuellement indépendants lorsque

$$\forall I \in \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket), \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} \{X_i \in A_i\}\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(X_i \in A_i)$$

Il y a donc 2^n égalités à vérifier (pour des parties A_i fixées).

Dans la définition de la mutuelle indépendance des VA, cette égalité n'est demandée que pour $I = \llbracket 1, n \rrbracket$. Il n'y a donc qu'une seule égalité à vérifiée (pour des parties A_i fixées).

34
preuve

Proposition.

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathbb{P})$ à valeurs dans $E_1, \dots, E_n$ respectivement.
Ces VA sont mutuellement indépendantes si et seulement si

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n, \quad \mathbb{P}(\{X_1 = x_1\} \cap \dots \cap \{X_n = x_n\}) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i).$$



- **Remarque 1.** Si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors elles sont indépendantes deux à deux.

Soit X et Y deux variables indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et $Z = |X - Y|$.

Étudions l'indépendance deux à deux et l'indépendance mutuelle des variables X , Y et Z .

On a vu que Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

On a d'une part :

$$\mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Z = 1\}) = \mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Y = 0\}) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Z = 1)$$

Donc X et Z sont indépendantes.

Comme X et Y jouent des rôles symétriques, on peut en déduire que Y et Z sont indépendantes.

Donc les variables aléatoires X , Y et Z sont deux à deux indépendantes.

D'autre part,

$$\underbrace{\mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\} \cap \{Z = 1\})}_{=0} \neq \underbrace{\mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1)\mathbb{P}(Z = 1)}_{\frac{1}{8}}$$

Donc les variables X , Y et Z ne sont pas mutuellement indépendantes, bien qu'elles soient deux à deux indépendantes.

- **Remarque 2.** Une sous-famille d'une famille indépendante est indépendante.

En maths.

Soit $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille de VA mutuellement indépendantes. Soit $I \in \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

Alors $(X_i)_{i \in I}$ est une famille de VA mutuellement indépendantes.

On suppose que X_i est à valeurs dans E_i .

Montrons que $(X_i)_{i \in I}$ est une famille de VA mutuellement indépendantes.

Pour tout $i \in I$, on fixe une partie A_i de E_i .

On va appliquer la définition de la mutuelle indépendance de $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$.

Pour cela, il nous faut une famille $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$.

Pour l'instant, on a seulement une famille $(A_i)_{i \in I}$.

Pour tout $i \notin I$, on pose $A_i = X_i(\Omega)$ de sorte que $\{X_i \in A_i\} = \Omega$. Ainsi,

$$\bigcap_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \{X_i \in A_i\} = \bigcap_{i \in I} \{X_i \in A_i\} \quad \text{et} \quad \forall i \notin I, \quad \mathbb{P}(X_i \in A_i) = 1$$

Par indépendance de $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$, on obtient :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \{X_i \in A_i\}\right) = \prod_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \mathbb{P}(X_i \in A_i)$$

Ce qui se réécrit

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} \{X_i \in A_i\}\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(X_i \in A_i)$$

Ainsi $(X_i)_{i \in I}$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

- **Remarque 3.** Relire la définition 33 et les remarques qui suivent.

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathbb{P})$ à valeurs dans $E_1, \dots, E_n$ respectivement.

Si ces VA sont dites *mutuellement indépendantes* alors

$\forall (A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(E_1) \times \dots \times \mathcal{P}(E_n)$, les év^t $\{X_1 \in A_1\}, \dots, \{X_n \in A_n\}$ sont mutuellement indépendants.

Preuve. Fixons $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(E_1) \times \dots \times \mathcal{P}(E_n)$

Montrons que les év^t $\{X_1 \in A_1\}, \dots, \{X_n \in A_n\}$ sont mutuellement indépendants.

Pour cela, fixons $I \in \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ et montrons que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} \{X_i \in A_i\}\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(X_i \in A_i).$$

Par hypothèse $(X_i)_{i \in I}$ est une famille de VA mutuellement indépendantes, donc en vertu de la remarque 2, la famille $(X_i)_{i \in I}$ est également une famille de VA mutuellement indépendantes.

D'où l'égalité.



Généralisation à n variables

La proposition suivante généralise la proposition 30.

35

Proposition.

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathbb{P})$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, considérons une fonction φ_i définie sur $X_i(\Omega)$,

On a l'implication

$$X_1, \dots, X_n \text{ mutuellement indépendantes} \implies \varphi_1(X_1), \dots, \varphi_n(X_n) \text{ mutuellement indépendantes}$$

- **Exemple.** Si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, il en est de même des indicatrices $\mathbb{1}_{X_1}, \dots, \mathbb{1}_{X_n}$.

La proposition précédente peut se généraliser à des variables aléatoires fonctions de plusieurs variables aléatoires X_k (pour $1 \leq k \leq n$). Ci-dessous, voici le cas de deux fonctions.

36

preuve

Lemme des coalitions.

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathbb{P})$.

Soit $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

Soit φ une fonction de p variables définie sur $X_1(\Omega) \times \dots \times X_p(\Omega)$.

Soit ψ une fonction de $n-p$ variables définie sur $X_{p+1}(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$.

On a l'implication

$$X_1, \dots, X_n \text{ mutuellement indépendantes} \implies \varphi(X_1, \dots, X_p) \text{ et } \psi(X_{p+1}, \dots, X_n) \text{ indépendantes}$$

- **Exemple.** Si X, Y, Z et T sont des variables indépendantes, les variables XY et ZT sont indépendantes, les variables $X, Y+Z$ et T^2 sont indépendantes.

37

sol → 25

Question.

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathbb{P})$ indépendantes.

Soit $Y_1, \dots, Y_n$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathbb{P})$ indépendantes.

Pour tout i , on suppose que $X_i \sim Y_i$. Montrer que $(X_1, \dots, X_n) \sim (Y_1, \dots, Y_n)$.

De plus, si on suppose que X_i et Y_i sont à valeurs dans E_i , et si on considère g une application définie sur $E_1 \times \dots \times E_n$, alors $g(X_1, \dots, X_n) \sim g(Y_1, \dots, Y_n)$.

Soit $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$ comme ci-dessus et à valeurs dans $\mathbb{C}$. En déduire que

$$X_1 + \dots + X_n \sim Y_1 + \dots + Y_n.$$



Somme de variables indépendantes de même loi de Bernoulli

38

Proposition.

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathbb{P})$.

Si les VA X_i sont mutuellement indépendantes et suivent la loi de Bernoulli de paramètre p , alors la VA $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi binomiale de paramètre (n, p) .

39

Proposition (Somme de deux binomiales indépendantes).

Soit X, Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathbb{P})$.

On a

$$\begin{cases} X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \\ X \sim \mathcal{B}(n, p) \\ Y \sim \mathcal{B}(m, p) \end{cases} \implies X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p)$$

40

Proposition (Somme de n binomiales indépendantes).

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathbb{P})$.

On a

$$\begin{cases} X_1, \dots, X_n \text{ mutuellement indépendantes} \\ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_i \sim \mathcal{B}(m_i, p) \end{cases} \implies X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}(s, p)$$

où $s = \sum_{i=1}^n m_i$.

- En particulier, une somme de VA indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre p , suit une loi de paramètre p .



Variables aléatoires

preuve et éléments de correction

4

- L'application $\mathbb{P}_X$ est définie sur $\mathcal{P}(X(\Omega))$ et à valeurs dans $\{0, 1\}$.
- On a, par définition, $\{X \in X(\Omega)\} = \Omega$ donc $\mathbb{P}_X(X(\Omega)) = 1$.
- Si A et B sont deux parties disjointes de $X(\Omega)$, alors :

$$\{X \in A\} \cap \{X \in B\} = \emptyset \text{ et } \{X \in A\} \cup \{X \in B\} = \{X \in A \cup B\}.$$

Les événements $\{X \in A\}$ et $\{X \in B\}$ étant incompatibles, on a, par additivité :

$$\mathbb{P}_X(A \cup B) = \mathbb{P}(X \in A \cup B) = \mathbb{P}(X \in A) + \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}_X(A) + \mathbb{P}_X(B).$$

8

On considère l'univers $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$, muni de la probabilité uniforme. On a $X(\Omega) = \llbracket 2, 12 \rrbracket$ et, pour tout $k \in \llbracket 2, 12 \rrbracket$:

$$\{X = k\} = \{(i, j) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket^2 \mid i + j = k\} = \{(i, k - i) \mid (i, k - i) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket^2\}$$

On déroule des équivalences sur les indices

$$\begin{aligned} (i, k - i) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket^2 &\iff \begin{cases} 1 \leq i \leq 6 \\ 1 \leq k - i \leq 6 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 1 \leq i \leq 6 \\ k - 6 \leq i \leq k - 1 \end{cases} \\ &\iff \max(1, k - 6) \leq i \leq \min(6, k - 1) \\ &\iff \begin{cases} 1 \leq i \leq k - 1 & \text{si } k \leq 7 \\ k - 6 \leq i \leq 6 & \text{si } k \geq 7 \end{cases} \end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{P}(X = k) = \begin{cases} \frac{k-1}{36} & \text{si } k \leq 7 \\ \frac{13-k}{36} & \text{si } k \geq 12 \end{cases}$$

11

L'image de la variable aléatoire $g(X)$ est $g(X)(\Omega) = g(X(\Omega))$.

Pour tout $z \in g(X)(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned} \{g(X) = z\} &= \{\omega \in \Omega \mid g(X(\omega)) = z\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in g^{-1}(\{z\})\} \\ &= \{X \in g^{-1}(\{z\})\} \\ &= \bigsqcup_{x \in g^{-1}(\{z\})} \{X = x\}. \end{aligned}$$

On en déduit, par additivité :

$$\mathbb{P}(g(X) = z) = \sum_{x \in g^{-1}(\{z\})} \mathbb{P}(X = x).$$



12

Loi de X . Vous devez trouver $X(\Omega) = \llbracket -5, 5 \rrbracket$ et

$$\forall k \in \llbracket -5, 5 \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{6 - |k|}{36}.$$

Loi de $|X|$. On a $|X|(\Omega) = \llbracket 0, 5 \rrbracket$ et :

$$\forall k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket, \quad \mathbb{P}(|X| = k) = \begin{cases} \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{6} & \text{si } k = 0 \\ \mathbb{P}(X = -k) + \mathbb{P}(X = k) = \frac{6 - k}{18} & \text{sinon} \end{cases}$$

13

L'ensemble des valeurs prises par $g(X)$ et $g(Y)$ est $g(X(\Omega))$, et d'après on a, pour tout $z \in g(X(\Omega))$:

$$\mathbb{P}(g(X) = z) = \sum_{x \in g^{-1}(\{z\})} \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in g^{-1}(\{z\})} \mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(g(Y) = z).$$

21

Montrons la première formule.

Cela résulte de la formule des probabilités totales appliquées au système complet d'événements $(\{Y = y\})_{y \in Y(\Omega)}$.

22

1. Tirage avec remise.

Prenons $\Omega = \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$ muni de la probabilité uniforme. On a $\text{card } \Omega = 9$.

Loi conjointe.

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$.

On a l'égalité d'événements :

$$\{X = i\} \cap \{Y = j\} = \{(i, j)\}$$

Appliquons $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = \frac{\text{card}(\{X = i\} \cap \{Y = j\})}{\text{card } \Omega} = \frac{1}{9}.$$

Première loi marginale.

Soit $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$. On a

$$\mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=1}^3 \mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = \sum_{j=1}^3 \mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) \frac{1}{9} = \frac{1}{3}.$$

Bilan : $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, 3 \rrbracket)$.

Deuxième loi marginale. On obtient le même résultat pour Y , c'est-à-dire $Y \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, 3 \rrbracket)$.



2. Tirage sans remise.

Les deux boules tirées sont distinctes.

Prenons $\Omega = \{(i, j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2 \mid i \neq j\}$ muni de la probabilité uniforme. On a $\text{card } \Omega = 6$.

Soit $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) = \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$. On a l'égalité d'événements

$$\{X = i\} \cap \{Y = j\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } i = j \\ \{(i, j)\} & \text{sinon} \end{cases}$$

D'où

$$\mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \frac{1}{6} & \text{sinon} \end{cases}$$

Première loi marginale.

Soit $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$. On a

$$\mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=1}^3 \mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Bilan : $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, 3 \rrbracket)$.

Deuxième loi marginale. On obtient le même résultat pour Y , c'est-à-dire $Y \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, 3 \rrbracket)$.

Dans les deux cas, les variables X et Y suivent la loi uniforme sur $\llbracket 1, 3 \rrbracket$, mais le couple (X, Y) n'a pas la même loi. Ainsi les lois marginales ne déterminent pas la loi conjointe.

24

Fixons $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$. On a

$$\mathbb{P}_A(X = k) = \frac{\mathbb{P}(\{X = k\} \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \quad \text{avec } \mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$$

On a l'égalité d'événements :

$$\{X = k\} \cap A = \begin{cases} \emptyset & \text{si } k \text{ est impair} \\ \{X = k\} & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$$

D'où

$$\mathbb{P}(\{X = k\} \cap A) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair} \\ \frac{1}{6} & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$$

Bilan :

$$\mathbb{P}_A(X = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair} \\ \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$$

BILAN : la loi de X sachant A est la loi uniforme sur $\{2, 4, 6\}$.

27

$\Rightarrow$ Supposons X et Y indépendantes.

Posons $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$ dans la définition de l'indépendance, d'où :

$$\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \mathbb{P}(X = x) \mathbb{P}(Y = y)$$





Soit $A \subset E$ et $B \subset F$.

Les ensembles $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis donc les sous-ensembles $A' = A \cap X(\Omega)$ et $B' = B \cap Y(\Omega)$ aussi.

On a :

$$(\spadesuit) \quad \{X \in A\} = \bigsqcup_{x \in A'} \{X = x\} \quad \text{et} \quad \{Y \in B\} = \bigsqcup_{y \in B'} \{Y = y\}.$$

D'où (lois de Morgan)

$$\{X \in A\} \cap \{Y \in B\} = \bigsqcup_{(x,y) \in A' \times B'} \{X = x\} \cap \{Y = y\}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) &= \sum_{(x,y) \in A' \times B'} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) \quad \text{additivité de } \mathbb{P} \\ &= \sum_{(x,y) \in A' \times B'} \mathbb{P}(X = x) \mathbb{P}(Y = y) \quad \text{hypothèse} \\ &= \left(\sum_{x \in A'} \mathbb{P}(X = x) \right) \left(\sum_{y \in B'} \mathbb{P}(Y = y) \right) \quad \text{distributivité } +/\times \\ &= \mathbb{P}(X \in A) \mathbb{P}(Y \in B) \quad \text{additivité de } \mathbb{P} \text{ sur } (\spadesuit) \end{aligned}$$

Donc les variables X et Y sont indépendantes.

28

— Supposons (i).

Soit $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$.

Soit $x \in X(\Omega)$. Par indépendance de X et Y :

$$\mathbb{P}_{\{Y=y\}}(X = x) = \frac{\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\})}{\mathbb{P}(Y = y)} = \frac{\mathbb{P}(X = x) \mathbb{P}(Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} = \mathbb{P}(X = x).$$

La loi de X sachant $\{Y = y\}$ est égale à la loi de X , donc (ii) est vérifié.

— Supposons (ii).

Soit $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$.

— Si $\mathbb{P}(Y = y) = 0$, alors $\{Y = y\}$ est indépendant de $\{X = x\}$.

— Sinon :

$$\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \mathbb{P}_{\{Y=y\}}(X = x) \mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \mathbb{P}(Y = y).$$

Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

29

— Si les variables X et Y sont indépendantes, il résulte de la définition qu'en particulier les événements $\{X = 1\}$ et $\{Y = 1\}$ sont indépendants.



— Supposons que les événements $\{X = 1\}$ et $\{Y = 1\}$ sont indépendants.

D'après le premier épisode de proba, les événements :

$$\overline{\{X = 1\}} \text{ et } \{Y = 1\}, \quad \{X = 1\} \text{ et } \overline{\{Y = 1\}}, \quad \overline{\{X = 1\}} \text{ et } \overline{\{Y = 1\}}$$

sont indépendants.

Or, on a l'égalité $\overline{\{X = 1\}} = \{X = 0\}$. Ainsi que $\overline{\{Y = 1\}} = \{Y = 0\}$. Donc les événements :

$$\{X = 0\} \text{ et } \{Y = 1\}, \quad \{X = 1\} \text{ et } \{Y = 0\}, \quad \{X = 0\} \text{ et } \{Y = 0\}$$

sont indépendants.

Pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, les événements $\{X = x\}$ et $\{Y = y\}$ sont indépendants, donc les variables X et Y sont indépendantes.

30

Disons que $\varphi(X)$ est à valeurs dans E et $\psi(Y)$ dans F .

Supposons X et Y indépendantes.

Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$.

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{\varphi(X) \in A\} \cap \{\psi(Y) \in B\}) &= \mathbb{P}(\{X \in \varphi^{-1}(A)\} \cap \{Y \in \psi^{-1}(B)\}) \quad \text{par définition} \\ &= \mathbb{P}(X \in \varphi^{-1}(A)) \mathbb{P}(Y \in \psi^{-1}(B)) \quad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y \\ &= \mathbb{P}(\varphi(X) \in A) \mathbb{P}(\psi(Y) \in B) \quad \text{par définition} \end{aligned}$$

Ainsi $\varphi(X)$ et $\psi(Y)$ sont indépendantes.

32

On a $(X + Y)(\Omega) = \llbracket 2, 2n \rrbracket$.

Soit $k \in \llbracket 2, 2n \rrbracket$. On a

$$\begin{aligned} \{X + Y = k\} &= \bigsqcup_{\substack{i+j=k \\ (i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}} \{X = i\} \cap \{Y = j\} \\ &= \bigsqcup_{(i, k-i) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} \{X = i\} \cap \{Y = k - i\} \end{aligned}$$

On déroule des équivalences sur les indices

$$\begin{aligned} (i, k - i) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) &\iff \begin{cases} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k - i \leq n \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 1 \leq i \leq n \\ k - n \leq i \leq k - 1 \end{cases} \\ &\iff \max(1, k - n) \leq i \leq \min(n, k - 1) \\ &\iff \begin{cases} 1 \leq i \leq k - 1 & \text{si } k \leq n + 1 \\ k - n \leq i \leq n & \text{si } k \geq n + 1 \end{cases} \\ \mathbb{P}(X + Y = k) &= \begin{cases} \frac{k - 1}{n^2} & \text{si } k \leq n + 1 \\ \frac{2n - k + 1}{n^2} & \text{si } k \geq n + 1 \end{cases} \end{aligned}$$



$\Rightarrow$ Supposons $X_1, \dots, X_n$ mutuellement indépendantes.

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$.

En appliquant la définition de l'indépendance avec, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $A_i = \{x_i\}$, on obtient :

$$\mathbb{P}(\{X_1 = x_1\} \cap \dots \cap \{X_n = x_n\}) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i).$$

$\Leftarrow$ Supposons que

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n, \quad \mathbb{P}(\{X_1 = x_1\} \cap \dots \cap \{X_n = x_n\}) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i).$$

Montrons que

$$\forall (A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(E_1) \times \dots \times \mathcal{P}(E_n), \quad \mathbb{P}(\{X_1 \in A_1\} \cap \dots \cap \{X_n \in A_n\}) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in A_i).$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit $A_i \in \mathcal{P}(E_i)$.

On pose $A'_i = A_i \cap X_i(\Omega)$ de sorte que :

$$(\star) \quad \{X_i \in A_i\} = \{X_i \in A'_i\} = \bigsqcup_{x_i \in A'_i} \{X_i = x_i\}.$$

Par intersection :

$$\bigcap_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \{X_i \in A_i\} = \bigsqcup_{(x_1, \dots, x_n) \in B} \left(\bigcap_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \{X_i = x_i\} \right) \quad \text{où } B = A'_1 \times \dots \times A'_n$$

Remarque. On vient d'utiliser ce genre d'égalité

$$(C_1 \sqcup C_2) \cap (D_1 \sqcup D_2) = (C_1 \sqcup D_1) \cap (C_1 \sqcup D_2) \cap (C_2 \sqcup D_1) \cap (C_2 \sqcup D_2)$$

Par additivité de $\mathbb{P}$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\bigcap_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \{X_i \in A_i\} \right) &= \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in B} \mathbb{P} \left(\bigcap_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \{X_i = x_i\} \right) \\ &= \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in B} \left(\prod_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \mathbb{P}(X_i = x_i) \right) \quad \text{par hypothèse} \\ &= \prod_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left(\sum_{x_i \in A'_i} \mathbb{P}(X_i = x_i) \right) \quad \text{cf. explications ci-dessous} \\ &= \prod_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \mathbb{P}(X_i \in A_i) \quad \text{par additivité de } \mathbb{P} \text{ sur l'égalité } (\star) \end{aligned}$$

Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont donc mutuellement indépendantes.

Explications! On rappelle la formule suivante

Formule pour 2 familles.

Soit $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ deux familles de réels indexées par deux ensembles finis I et J .

Alors

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right).$$



Formule généralisée à n familles.

Soit $(a_{i_1})_{i_1 \in I_1}, \dots, (a_{i_n})_{i_n \in I_n}$ n familles de réels indexées par n ensembles finis $I_1, \dots, I_n$.

Alors, en notant B le big produit cartésien $B = I_1 \times \dots \times I_n$, on a

$$\sum_{(i_1, \dots, i_n) \in B} a_{i_1} \cdots a_{i_n} = \left(\sum_{i_1 \in I_1} a_{i_1} \right) \times \cdots \times \left(\sum_{i_n \in I_n} a_{i_n} \right).$$

que l'on peut écrire

$$\sum_{(i_1, \dots, i_n) \in B} \left(\prod_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} a_{i_k} \right) = \prod_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left(\sum_{i_k \in I_k} a_{i_k} \right)$$

Formule généralisée à n familles avec d'autres notations.

Soit $(p_{x_1})_{x_1 \in A_1}, \dots, (p_{x_n})_{x_n \in A_n}$ n familles de réels indexées par n ensembles finis $A_1, \dots, A_n$.

Alors, en notant B le big produit cartésien $B = A_1 \times \dots \times A_n$, on a

$$\sum_{(x_1, \dots, x_n) \in B} p_{x_1} \cdots p_{x_n} = \left(\sum_{x_1 \in A_1} p_{x_1} \right) \times \cdots \times \left(\sum_{x_n \in A_n} p_{x_n} \right).$$

que l'on peut écrire

$$\sum_{(x_1, \dots, x_n) \in B} \left(\prod_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} p_{x_i} \right) = \prod_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left(\sum_{x_i \in I_i} p_{x_i} \right)$$

36

Supposons que X_i est à valeurs dans E_i .

- Montrons que les **deux** variables aléatoires $Y = (X_1, \dots, X_p)$ et $Z = (X_{p+1}, \dots, X_n)$, (chacune étant des k -uplets de VA donc une VA), sont indépendantes.

Soit $y \in E_1 \times \dots \times E_p$ et $z \in E_{p+1} \times \dots \times E_n$.

Montrons que $\mathbb{P}(\{Y = y\} \cap \{Z = z\}) = \mathbb{P}(Y = y) \mathbb{P}(Z = z)$.

L'élément y s'écrit $(x_1, \dots, x_p)$ et l'élément z s'écrit $(x_{p+1}, \dots, x_n)$.

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{Y = y\} \cap \{Z = z\}) &= \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) && \text{définition} \\ &= \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k = x_k) && \text{indépendance des } X_k \\ &= \prod_{k=1}^p \mathbb{P}(X_k = x_k) \prod_{k=p+1}^n \mathbb{P}(X_k = x_k) && \text{paquets} \\ &= \mathbb{P}(Y = y) \mathbb{P}(Z = z) && \text{cf. ci-après} \end{aligned}$$

Justification. Une sous-famille d'une famille indépendante est indépendante. Donc $(X_1, \dots, X_p)$ est une famille indépendante. Ainsi

$$\prod_{k=1}^p \mathbb{P}(X_k = x_k) = \mathbb{P}(\underbrace{X_1 = x_1, \dots, X_p = x_p}_{\{Y=y\}})$$

Idem pour $(X_{p+1}, \dots, X_n)$.

- On en déduit que $\varphi(X_1, \dots, X_p)$ et $\psi(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes, d'après 30.



37

Montrons que $(X_1, \dots, X_n) \sim (Y_1, \dots, Y_n)$.

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((X_1, \dots, X_n) = (x_1, \dots, x_n)) &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i) && \text{par indépendance des } X_i \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(Y_i = x_i) && \text{car } X_i \sim Y_i \\ &= \mathbb{P}((Y_1, \dots, Y_n) = (x_1, \dots, x_n)) && \text{par indépendance des } Y_i \end{aligned}$$

Les deux variables aléatoires $(X_1, \dots, X_n)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ ont même loi.

D'après 13, on en déduit qu'il en est de même de $g(X_1, \dots, X_n)$ et $g(Y_1, \dots, Y_n)$.

Pour le dernier point, il suffit d'appliquer ce qui précède à la fonction $g : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 + \dots + x_n$.

