Variables aléatoires

exercices

101 Un péage binomial

À un péage autoroutier, n voitures franchissent au hasard et indépendamment l'une des trois barrières de péage mises à leur disposition. On note X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires dénombrant les voitures ayant franchi ces barrières.

1. Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.
2. Déterminer l'espérance et la variance de $X_2 + X_3$.

102 Deux questions indépendantes

1. Deux joueurs lancent une pièce équilibrée n fois chacun.
   Quelle est la probabilité qu'ils obtiennent le même nombre de fois FACE ? Introduire deux VA X et Y, pour le nombre de PILE des joueurs.
2. On effectue n lancers indépendants d'une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité qu'on obtienne strictement plus de PILE que de FACE ?

103 Loi hypergéométrique

Une urne contient b boules blanches, et r boules rouges.
On tire simultanément n boules ($n \leqslant b + r$).
On note X la VA égale au nombre de boules blanches tirées.
Donner la loi de X. On pourra supposer $n \leqslant b$ et $n \leqslant r$.
Déterminer son espérance.
Vérifier la cohérence des résultats en prenant $n = 1$ (et alors X suit une loi ...) et $r = 0$ (et alors X est ...)

104 Rang d'apparition de la 1ère blanche (sans remise).

Une urne contient 2 boules blanches et $n - 2$ rouges. On effectue des tirages sans remise.
Soit X la VA égale au rang de sortie de la 1ère boule blanche et Y la VA égale au nombre de boules rouges restant à ce moment dans l'urne.

1. Déterminer la loi de X et son espérance.
2. Donner une relation entre X et Y.
3. En déduire la loi de Y et son espérance.

105 Somme des numéros dans un tirage simultané de p jetons)

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n.
On tire p jetons simultanément.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note A_i l'événement « le n° i est tiré ».
On note S la VA égale à la somme des numéros tirés.
Déterminer $\mathrm{E}(S)$.

106 Minimum de deux uniformes indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
On pose $Z = \min(X, Y)$.

1. Démontrer le lemme suivant :

   Lemme. *Soit U une VA suivant une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.*
   On a
   $$\forall \ell \in [\![1, n]\!], \qquad \mathbb{P}(U \geqslant \ell) = \frac{n - \ell + 1}{n}$$
   Cette égalité est également valable pour $\ell = n + 1$.
2. Déterminer la loi de Z. Puis déterminer son espérance.
3. On recommence tout l'exercice. En utilisant le résultat suivant :

   Soit T une variable aléatoire telle que $T(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$. On a $\mathrm{E}(T) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T \geqslant k)$

   déterminer l'espérance de Z.

107 Rang d'apparition du 1er PILE en n lancers

Soit $n \geqslant 2$ fixé une fois pour toutes. Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$.
On dispose d'une pièce donnant PILE avec la proba p.
On lance cette pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :

- si on a obtenu PILE
- si on a obtenu n FACE

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note F_k l'événement « obtenir FACE au $k^{\text{ème}}$ lancer ».
On note

- T_n la VA égale au nombre de lancers effectués
- X_n le nombre de PILE obtenus
- Y_n le nombre de FACE obtenus.

1. (a) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Déterminer $\mathbb{P}(T_n = k)$.
   (b) Déterminer $\mathbb{P}(T_n = n)$.
   (c) Vérifier par le calcul que $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T_n = k) = 1$.
   (d) Montrer que $\mathrm{E}(T_n) = \dfrac{1-q^n}{1-q}$.
2. Donner la loi de X_n et donner son espérance.
3. Déterminer la loi de Y_n.

108 Marche aléatoire

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_N$ des variables aléatoires indépendantes toutes de même loi définie par $\mathbb{P}(X_1 = -1) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$. Pour $1 \leqslant n \leqslant N$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.
Soit $n \in [\![1, N]\!]$. Déterminer la loi de S_n. Préciser $\mathbb{P}(S_n = 0)$.

Conditionnement

109 Gain

On dispose d'une boîte contenant trois objets A, B, C. Un jeu consiste en une succession de tirages d'un objet avec remise dans la boîte.
À chaque tirage, le joueur gagne 1 euro s'il tire l'objet A, ne gagne ni ne perd rien s'il tire l'objet B, et perd tout ce qu'il a gagné précédemment s'il tire l'objet C.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la VA égale au gain du joueur à l'issue de n tirages.

1. Déterminer les lois de X_0, X_1 et X_2.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\mathbb{P}(X_n = n)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_n = 0)$.
   En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X_n = 0)$.
4. Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = a) \;=\; \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n = a) \;+\; \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n = a-1)$$
5. Trouver une relation entre $\mathrm{E}(X_{n+1})$ et $\mathrm{E}(X_n)$. En déduire $\mathrm{E}(X_n)$ en fonction de n.

110 Avec remise de la couleur tirée

Une urne contient initialement une boule blanche et une rouge. On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne :
après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on rajoute une boule de la couleur qui vient d'être tirée.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit X_n la VA égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n^{ers} tirages.

1. Déterminer la loi de X_1 et celle de X_2.
2. Émettre une conjecture concernant la loi de X_n. Prouver cette conjecture par récurrence.

111 Robin des bois

Un archer tire sur n cibles. À chaque tir, il a la probabilité $p \in]0,1[$ de toucher la cible et les tirs sont supposés indépendants. Il tire une première fois sur chaque cible et on note X le nombre de cibles atteintes lors de ce premier jet.
L'archer tire ensuite une seconde fois sur les cibles restantes et on note Y le nombre de cibles touchées lors de cette tentative.
On pose $Z = X + Y$.

1. Déterminer la loi de X.
2. Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
   Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = k\}$.
   En déduire la loi conjointe de X et Y.
3. En déduire la loi de Z ; reconnaître une loi classique.

112 Échange entre 2 urnes

On dispose de deux boîtes A et B, de deux boules noires et de deux boules rouges. Au départ, chaque urne contient deux des quatre boules. À chaque étape, on tire une boule de chacune des boîtes et on les échange.
Soit X_0 le nombre de boules noires placées initialement dans A et X_n le nombre de boules noires dans A après n étapes. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p_n = \mathbb{P}(X_n = 0), \quad q_n = \mathbb{P}(X_n = 1) \ \text{ et } \ r_n = \mathbb{P}(X_n = 2).$$

1. Déterminer la loi de X_0 si, au départ, les boules sont placées au hasard dans les deux boîtes.
   Dans la suite, X_0 est quelconque.
2. Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N} \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$.
3. Montrer que la matrice M est semblable à $D = \operatorname{diag}\left(1, 0, -\dfrac{1}{2}\right)$. On note P une matrice inversible telle que $M = PDP^{-1}$.
4. On pose $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$. Exprimer p_n, q_n et r_n en fonction de a, b, c et n. En déduire que les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Déterminer leurs limites respectives p, q et r (on pourra remarquer que $p + q + r = 1$).
   Commenter.

Espérance, Covariance, Variance

113 Somme et différence de deux Bernoulli indépendantes

Soit X et Y deux variables de Bernoulli indépendantes et de paramètre $p \in]0,1[$ sur le même espace probabilisé. Soit $U = X + Y$ et $V = X - Y$. Déterminer :

1. la loi du couple (U,V) ;
2. la covariance de U et V ;
3. U et V sont-elles indépendantes ?

114 Un calcul de covariance (1)

On considère une suite de N lancers de pile ou face indépendants, la probabilité d'obtenir pile étant $p \in]0,1[$. Pour $n \in [\![1,N]\!]$, on note S_n le nombre de piles obtenus lors des n premiers lancers. Calculer la covariance de (S_m, S_n) pour m et n dans $[\![1,N]\!]$.

115 Un calcul de covariance (2)

Soit $n \geqslant 2$. On dispose de n urnes numérotées de 1 à n.
Dans l'urne k, il y a k boules numérotées de 1 à k. On choisit une urne au hasard et dans celle-ci, on pioche une boule au hasard.
Soit X la variable aléatoire égale au numéro de l'urne et Y la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.
Déterminer la covariance de X et de Y.

116 Urne de Pólya

Soit r, b et c trois entiers naturels non nuls. L'urne $\mathcal{U}$ contient initialement r boules rouges et b boules blanches. On pose $N = r + b$. On tire les boules de $\mathcal{U}$ une à une ; à l'issue de chaque tirage, la boule prélevée dans l'urne est remise, avec c boules de la même couleur.
Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour $1 \leqslant n \leqslant m$, on note X_n le nombre de boules rouges tirées lors des n premiers tirages, Y_n la variable indicatrice de l'événement « le n^{e} tirage donne une boule rouge ».

1. Déterminer la loi de Y_1.
2. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que l'on a, pour tout $n \in [\![1, m-1]\!]$:
$$\mathrm{E}(Y_{n+1}) = \frac{r + c\,\mathrm{E}(X_n)}{N + nc}.$$
3. Exprimer X_n à l'aide des variables $Y_1, \ldots, Y_n$ et en déduire que toutes les variables Y_n ont même loi.
4. Déterminer l'espérance de X_n.

117 Poignée

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n.
On tire une poignée de jetons (*i.e.* une partie, éventuellement vide, de l'ensemble des jetons).
On note N le nombre de jetons tirés, et S la somme des numéros des jetons tirés.
Enfin, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note X_i la variable de Bernoulli qui vaut 1 si le $i^{\text{ème}}$ jeton est dans la poignée et 0 sinon.
On suppose que toutes les poignées sont équiprobables.

1. Déterminer la loi de N, son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de X_i. Montrer que les variables X_i sont deux à deux indépendantes.
3. Exprimer S en fonction des X_i. Calculer $\mathrm{E}(S)$ et $\mathrm{V}(S)$.

DM

555 **Fonction génératrice**

Soit X est une variable aléatoire finie telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
On définit la **fonction génératrice de** X, notée g_X, par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g_X(t) = \mathrm{E}(t^X) = \sum_{k \in X(\Omega)} t^k \, \mathbb{P}(X = k).$$

1. Montrer que la loi de X est entièrement déterminée par la fonction g_X.
2. Soit X_1 et X_2 des variables aléatoires finies et indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   Montrer que :
   $$g_{X_1+X_2} = g_{X_1} g_{X_2}.$$
3. Déterminer la fonction génératrice d'une variable suivant une loi binomiale.
   En déduire que, si X_1 et X_2 sont des variables indépendantes suivant les lois binomiales de paramètres (n_1, p) et (n_2, p), alors $X_1 + X_2$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
4. On lance deux dés classiques à six faces.
   On note X_i la variable aléatoire indiquant le numéro du dé n° i.
   Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont supposées indépendantes.
   On pose $Y = X_1 + X_2$.
   (a) On veut montrer que, même si les dés sont pipés, il est impossible que Y suive la loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$.
   On raisonne par l'absurde, en supposant que Y suive la loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$.
      i. Déterminer alors la fonction génératrice de Y. Quelles sont ses racines ?
      ii. Montrer que g_{X_1} et g_{X_2} sont deux polynômes de degré 6 ayant 0 comme racine tels que $g_{X_1} g_{X_2} = g_Y$. Conclure.
   (b) On veut montrer que si les dés sont pipés, il est impossible que la loi de Y soit la même que quand les dés ne sont pas pipés.
      i. Déterminer la fonction génératrice de Y quand les dés sont équilibrés. On la note P. Préciser les racines de P.
      ii. On suppose que $X_1 + X_2$ suit la même loi que dans le cas où les dés sont équilibrés. En écrivant que $g_{X_1} g_{X_2} = P$, montrer que les dés sont équilibrés.

556 Inégalité de Bernstein

Soit S_n une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$, qui suit la loi binomiale de paramètre (n,p) et $x>0$. On pose $q=1-p$.

1. Montrer que :
$$\forall\lambda>0, \qquad \mathbb{P}\big(S_n-np\geqslant nx\big) \;\leqslant\; \frac{\mathrm{E}(e^{\lambda(S_n-np)})}{e^{n\lambda x}}.$$

2. Montrer que
$$\forall\lambda\in\mathbb{R}, \qquad \mathrm{E}(e^{\lambda(S_n-np)}) \;=\; (pe^{\lambda q}+qe^{-\lambda p})^n.$$

3. (a) Montrer que
$$\forall\, t\in\mathbb{R}, \qquad e^t\leqslant e^{t^2}+t.$$

   (b) En déduire que :
$$\forall\lambda>0, \qquad \mathbb{P}(S_n-np\geqslant nx) \;\leqslant\; e^{n(\lambda^2-\lambda x)},$$
   puis que :
$$\mathbb{P}(S_n-np\geqslant nx) \;\leqslant\; e^{-\frac{nx^2}{4}}.$$

4. (a) Expliquer comment on démontrerait de la même façon que :
$$\mathbb{P}(S_n-np\leqslant -nx) \;\leqslant\; e^{-\frac{nx^2}{4}}.$$

   (b) En déduire **l'inégalité de Bernstein** :
$$\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{S_n}{n}-p\Big|\geqslant x\Big) \;\leqslant\; 2e^{-\frac{nx^2}{4}}.$$

   (c) Comparer cette inégalité avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Toutes les variables aléatoires présentes dans ce problème sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Partie B

Pour tout entier n strictement positif, on considère l'expérience suivante : on dispose de n urnes initialement vides, numérotées de 1 à n et on dispose d'un grand stock de boules que l'on dépose une à une dans ces urnes. Pour chaque boule, on choisit au hasard, de façon équiprobable, l'urne dans laquelle la boule est déposée.
On note X_n le rang du premier tirage pour lequel une des urnes contiendra deux boules.

1. Compléter la fonction Scilab suivante pour qu'elle simule une réalisation de la variable aléatoire X_n :
function X = tirage(n) urnes = zeros(1,n) X = 1 choix = floor((rand()*n))+1 while .... urnes(choix) = urnes(choix)+1 choix = floor((rand()*n)+1 X = ... end endfunction

2. On suppose dans cette question que $n = 1$.
Déterminer la loi de X_1 ainsi que son espérance et sa variance.

3. On suppose dans cette question que $n = 2$.
Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance et sa variance.

4. On se place ici dans le cas général, n désigne un entier strictement positif.

a) Déterminer $X_n(\Omega)$ en justifiant brièvement.

b) Montrer que :
$$\forall k \in [\![2, n+1]\!], \quad \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{n!(k-1)}{n^k(n-k+1)!}.$$

c) Montrer que, pour tout entier strictement positif n, X_n admet une espérance.

d) On souhaite écrire une fonction Scilab qui calcule $\mathrm{E}(X_n)$ en fonction de n.
Compléter la fonction suivante à cet effet :
function E = esperance(n) facto = prod([1 :n]) fac = facto somme = 0 for k =2 : (n+1) puissance = ... fac = ... somme = somme + k*(k-1)/(puissance*fac) end E = facto * somme endfunction

Partie C

On reprend dans cette partie les variables aléatoires X_n étudiées dans la partie B.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose :
$$\alpha(n, m) = \sum_{k=0}^{m} \ln\left(1 - \frac{k}{n}\right).$$

5. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$,
$$-x - x^2 \leq \ln(1-x) \leq -x.$$

6. En déduire que, pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ tel que $m \leq \frac{n}{2}$, on a :
$$-\frac{m(m+1)}{2n} - \frac{m(m+1)(2m+1)}{6n^2} \leq \alpha(n, m) \leq -\frac{m(m+1)}{2n}.$$

7. On suppose dans cette question que $x \leq 0$.
Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n}\mathbb{P}\left(X_n = \lfloor\sqrt{n}x\rfloor\right)\right)$.

8. On suppose dans cette question que x est un réel $x > 0$.

a) Donner la limite puis un équivalent simple de $\lfloor\sqrt{n}x\rfloor$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Justifier qu'il existe un entier N tel que :
$$\forall n \geq N, \quad \lfloor\sqrt{n}x\rfloor \leq \frac{n}{2}.$$

c) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in [\![2, n+1]\!], \quad \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{k-1}{n} \prod_{i=0}^{k-2} \left(1 - \frac{i}{n}\right).$$

d) En déduire que, pour tout $n \geq N$, on a :

$$\mathbb{P}\left(X_n = \lfloor \sqrt{n}x \rfloor\right) = \frac{\lfloor \sqrt{n}x \rfloor - 1}{n} \exp\left(\alpha\left(n, \lfloor \sqrt{n}x \rfloor - 2\right)\right).$$

e) Montrer alors que $\sqrt{n}\mathbb{P}\left(X_n = \lfloor \sqrt{n}x \rfloor\right)$ admet une limite lorsque n tend vers l'infini et déterminer cette limite.

Soit n un entier naturel non nul.
On effectue une série illimité de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au k-ième tirage.
Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages :

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i.$$

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

Exemple : avec $n = 10$, si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre $2, 4, 1, 5, 9$, alors on obtient : $S_1 = 2,\ S_2 = 6,\ S_3 = 7,\ S_4 = 12,\ S_5 = 21$ et $T_{10} = 4$.

Partie A

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_k ainsi que son espérance.

2. (a) Déterminer $T_n(\Omega)$.

(b) Calculer $\mathbb{P}(T_n = 1)$.

(c) Montrer que :

$$\mathbb{P}(T_n = n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

3. Dans cette question, $n = 2$. Déterminer la loi de T_2.

4. Dans cette question, $n = 3$. Donner la loi de T_3. Vérifier que $\mathrm{E}(T_3) = \dfrac{16}{9}$.

Partie B

5. Déterminer $S_k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

6. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

(a) Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et de X_{k+1}.

(b) En utilisation un système complet d'événements lié à la variable aléatoire S_k, démontrer alors que :

$$\forall i \in [\![k+1, n]\!],\ \mathbb{P}(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}(S_k = j).$$

7. (a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du triangle de Pascal liant les nombres : $\binom{j-1}{k-1}$, $\binom{j-1}{k}$ et $\binom{j}{k}$.

(b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel i supérieur ou égal à $k+1$:

$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$

(c) Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathcal{H}_k$ la proposition :

$$\text{« } \forall i \in [\![k, n]\!],\ \mathbb{P}(S_k = i) = \frac{1}{n^k}\binom{i-1}{k-1} \text{ ».}$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{H}_k$ est vraie.

8. (a) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Comparer les événements : $[T_n > k]$ et $[S_k \leqslant n-1]$.

(b) En déduire que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \mathbb{P}(T_n > k) = \dfrac{1}{n^k}\binom{n-1}{k}$.

9. Démontrer que $\mathrm{E}(T_n) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(T_n > k)$, puis que

$$\mathrm{E}(T_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

10. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{E}(T_n)$.

Variables aléatoires

corrigés

① ▷ **Loi de X**

On trouve $X(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$, et même si l'on veut $X(\Omega) \subset [\![1, n-1]\!]$.
Soit $k \in X(\Omega)$. L'événement

$$[X = k] \;=\; R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1} \cap B_k$$

où R_i est l'événement « tirer une boule rouge au $i^{\text{ème}}$ tirage » et B_i « tirer une boule blanche au $i^{\text{ème}}$ tirage ».
En utilisant la formule des probas composées

$$\mathbb{P}(X = k) \;=\; \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}_{R_1}(R_2) \times \cdots \times \mathbb{P}_{R_1 \cap \cdots \cap R_{k-2}}(R_{k-1}) \times \mathbb{P}_{R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1}}(B_k)$$

$$\mathbb{P}(X = k) \;=\; \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \cdots \times \frac{n-k}{n-k+2} \times \frac{2}{n-k+1}$$

Après simplification, on trouve :

$$\forall\, k \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = k) \;=\; \frac{2(n-k)}{n(n-1)}$$

Remarque : pour $k = n$, on trouve une proba nulle comme attendu (pourquoi « comme attendu » ?).

Autre solution On peut aussi raisonner en dénombrant.
Prenons pour Ω l'ensemble des n-arrangements de $\{B_1, B_2, R_1, \ldots, R_{n-2}\}$ muni de la probabilité uniforme.
Le cardinal de Ω vaut $n!$.
Soit $k \in X(\Omega)$. Un tirage réalisant l'événement $[X = k]$ est du type :

$$(R_\star, \ldots, R_\star, B_\star, \text{ce-qui-reste})$$

Se donner un tel tirage revient à

- choisir les $k-1$ boules rouges et les permuter : $\binom{n-2}{k-1} \times (k-1)! = \dfrac{(n-2)!}{(n-k-1)!}$
- choisir une des deux boules blanches en $k^{\text{ème}}$ position : 2 choix
- choisir un $(n-k)$-arrangement des $n-k$ boules restantes : $(n-k)!$ choix

D'où

$$\mathbb{P}(X = k) \;=\; \frac{\dfrac{(n-2)!}{(n-k-1)!} \times 2 \times (n-k)!}{n!} \;=\; \frac{2(n-k)}{n(n-1)}$$

▷ **Espérance de X**

$$\mathrm{E}(X) \;=\; \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) \;=\; \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n} k(n-k) \;=\; \frac{2}{n(n-1)} \Big(n \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2 \Big) \;=\; \cdots \;\; \frac{n+1}{3}$$

② Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
Lorsque l'on a tiré la première blanche au $k^{\text{ème}}$ tirage, il reste $(n-2) - (k-1) = n-k-1$ rouges dans l'urne ; et réciproquement.
Ainsi, on a l'égalité d'**événements** :

$$[X = k] \;=\; [Y = n-k-1]$$

BILAN. On a l'égalité de **variables aléatoires** :

$$Y \;=\; n - X - 1 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad Y \;=\; (-1)X + (n-1)$$

③ $\triangleright$ **Loi de Y**

• Déterminons l'univers image de Y.

Comme la VA Y est la transformée de la VA X par la fonction $t \mapsto -t + (n-1)$, il suffit de regarder l'image de $X(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$ par cette fonction.
Ainsi $Y(\Omega) \subset [\![-1, n-2]\!]$.

• Comme $Y = (-1)X + (n-1)$, on a également X en fonction de Y ; en effet $X = (n-1) - Y$.
Ainsi, pour $y \in Y(\Omega)$, on a l'égalité d'événements :

$$[Y = y] \;=\; [X = n - 1 - y]$$

Comme on connaît la loi de X, on en déduit la loi de Y ; en effet, on a

$$P(Y = y) \;=\; \frac{2\Big(n - (n-1-y)\Big)}{n(n-1)} \;=\; \frac{2(y+1)}{n(n-1)}$$

$\triangleright$ **Espérance de Y**

Une mauvaise stratégie consiste à refaire tout un calcul pour $\mathrm{E}(Y)$.
Il est bien mieux de profiter du fait que Y est la transformée de X par une fonction affine. Ainsi

$$\mathrm{E}(Y) \;=\; -\mathrm{E}(X) + (n-1)$$

Après petit calcul, on trouve

$$\mathrm{E}(Y) \;=\; \frac{2n-4}{3}$$

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

1. Soit $\ell \in [\![1,n]\!]$.
   On a
   $$\mathbb{P}(U \geqslant \ell) \;=\; \sum_{i=\ell}^{n} \frac{1}{n} \;=\; \frac{n-\ell+1}{n}$$
   Cette égalité est encore valable pour $\ell = n+1$. En effet, pour $\ell = n+1$, on doit avoir $\mathbb{P}(Z \geqslant \ell) = 0$. Et le membre droit donne bien 0.
2. Déterminons la loi de $Z = \min(X, Y)$.
   On a $Z(\Omega) = [\![1,n]\!]$.
   Fixons $k \in [\![1,n]\!]$.
   On a, par définition du minimum,
   $$[Z \geqslant k] \;=\; [X \geqslant k] \cap [Y \geqslant k]$$
   Par indépendance de X et Y, on a alors
   $$\mathbb{P}(Z \geqslant k) \;=\; \mathbb{P}(X \geqslant k)\mathbb{P}(Y \geqslant k) \;\overset{\text{WHY}}{=}\; \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^2$$
   Il s'agit maintenant de revenir à $\mathbb{P}(Z = k)$.
   Comme Z est à valeurs entières, on a :
   $$\forall \ell \in \mathbb{Z}, \qquad \mathbb{P}(Z = \ell) \;=\; \mathbb{P}(Z \geqslant \ell) - \mathbb{P}(Z \geqslant \ell+1)$$
   WARNING. La formule $\mathbb{P}(Z \geqslant k)$ trouvée précédemment n'est pas valable pour tous les $k \in \mathbb{Z}$. Elle ne fonctionne, **a priori**, que pour les $k \in [\![1,n]\!]$.
   Or, on constate que la formule fonctionne également pour $k = n+1$.

   On obtient donc
   $$\mathbb{P}(Z = k) \;=\; \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^2 - \left(\frac{n-(k+1)+1}{n}\right)^2 \;=\; \frac{(n-k+1)^2-(n-k)^2}{n^2} \;=\; \frac{2n+1-2k}{n^2}$$
   BILAN :
   $$\forall k \in [\![1,n]\!], \qquad \mathbb{P}(Z = k) \;=\; \frac{2n+1-2k}{n^2}$$
   • On peut maintenant déterminer l'espérance de Z. On a
   $$\mathrm{E}(Z) \;=\; \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(Z = k) \;=\; \quad \dots \quad \;=\; \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$$
3. Déterminons l'espérance de Z uniquement avec $\mathbb{P}(Z \geqslant k)$.
   D'après la formule rappelée (que l'on peut appliquer car Z est à valeurs dans $[\![1,n]\!]$, donc dans $[\![0,n]\!]$)
   $$\mathrm{E}(Z) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^2 \;=\; \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\Big(k^2-2(n+1)k+(n+1)^2\Big) \;=\; \quad \dots \quad \;=\; \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$$

1. (a) Comme $k \in [\![1, n-1]\!]$, le jeu s'arrête au premier pile obtenu, on a l'égalité d'événements :
$$[T_n = k] \;=\; F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap \overline{F_k}$$
En appliquant $\mathbb{P}$, on a :
$$\mathbb{P}(T_n = k) \;=\; \mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap \overline{F_k})$$
D'où par indépendance des F_i
$$\mathbb{P}(T_n = k) \;=\; \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(F_2)\cdots\mathbb{P}(F_{k-1})\mathbb{P}(\overline{F_k})$$
D'où
$$\mathbb{P}(T_n = k) = q^{k-1}p$$
(b) On a l'égalité d'événements
$$[T_n = n] \;=\; F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_{n-1}$$
En utilisant la même technique qu'à la question précédente, on trouve $\mathbb{P}(T_n = n) = q^{n-1}$.
(c) On a
$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T_n = k) \;=\; \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(T_n = k) + \mathbb{P}(T_n = n) \;=\; \sum_{k=1}^{n-1} q^{k-1}p + q^{n-1} \;=\; pq^{1-1}\frac{1-q^{n-1}}{1-q} + q^{n-1} \;=\; 1$$
(d) La VA T_n admet une espérance en tant que VA *finie*.
Après avoir écrit la définition de $\mathrm{E}(T_n)$, on constate que l'on ne peut pas faire grand chose dans le calcul.
Une idée est donc de montrer que $(1-q)\mathrm{E}(T_n) = 1 - q^n$.
$$\begin{aligned}
(1-q)\mathrm{E}(T_n) &= (1-q)\left(\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(T_n = k) \;+\; \mathbb{P}(T_n = n)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} k(1-q)\underbrace{\mathbb{P}(T_n = k)}_{q^{k-1}p} \;+\; n\,\underbrace{\mathbb{P}(T_n = n)}_{q^{n-1}}\underbrace{(1-q)}_{p} \\
&= p\sum_{k=1}^{n-1} k(q^{k-1} - q^k) \;+\; nq^{n-1}p
\end{aligned}$$
Or
$$\sum_{k=1}^{n-1} k(q^{k-1}-q^k) \;=\; \sum_{j=0}^{n-2}(j+1)q^j - \sum_{k=0}^{n-1} kq^k \;=\; \sum_{j=0}^{n-2}\underbrace{((j+1)-j)}_{1}q^j - (n-1)q^{n-1} \;=\; \frac{1-q^{n-1}}{1-q} - (n-1)q^{n-1}$$
Reprenons
$$\begin{aligned}
(1-q)\mathrm{E}(T_n) &= p\left(\frac{1-q^{n-1}}{1-q} \;-\; (n-1)q^{n-1}\right) \;+\; nq^{n-1}p \\
&= p\frac{1-q^{n-1}}{1-q} \;-\; (n-1)q^{n-1}p \;+\; nq^{n-1}p \\
&= 1 - q^{n-1} + q^{n-1}p \\
&= 1 - q^{n-1}(1-p) \\
&= 1 - q^{n-1}q \\
&= 1 - q^n
\end{aligned}$$

2. Le nombre de PILE obtenu est soit 0, soit 1. Donc $X_n(\Omega) = \{0, 1\}$. Ainsi, X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(X_n = 1)$.
On a l'égalité d'événements
$$[X_n = 0] \;=\; F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$$
Par indépendance, on a donc $\mathbb{P}(X_n = 0) = q^n$.
Ainsi,
$$X_n \sim \mathcal{B}(1 - q^n)$$
On a alors $\mathrm{E}(X_n) = 1 - q^n$.

3. Le nombre de FACE obtenu est 0, 1, ... ou n. Donc $Y_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
Fixons $k \in [\![0, n]\!]$.
• Pour $k = n$, on a $[Y_n = n] = F_1 \cap \cdots \cap F_n$. D'où $\mathbb{P}(Y_n = n) = q^n$.
• Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $[Y_n = k] = F_1 \cap \cdots \cap F_k \cap \overline{F_{k+1}})$. D'où

$$\mathbb{P}(Y_n = k) \;=\; \mathbb{P}(F_1 \cap \cdots \cap F_k \cap \overline{F_{k+1}}) \;=\; q^k p$$

BILAN. On a $Y_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et :

$$\forall\, k \in [\![0, n-1]\!],\ \mathbb{P}(Y_n = k) = q^k p \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(Y_n = n) = q^n$$

Solution se voulant savante, mais qui n'apporte rien. Je la laisse quand même car elle est instructive.
On a l'égalité de VA suivante : $X_n + Y_n = T_n$, qui traduit le fait que le nombre de PILE plus le nombre de FACE vaut le nombre de lancers. Ainsi, $Y_n = T_n - X_n$.
Comme $T_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et $X_n(\Omega) = \{0, 1\}$, on a

$$Y_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$$

Fixons $k \in [\![0, n]\!]$. On a l'égalité d'événements

$$[Y_n = k] \quad = \quad [T_n = k] \cap [X_n = 0] \quad \bigsqcup \quad [T_n = k+1] \cap [X_n = 1]$$

• Pour $k = n$, elle s'écrit

$$[Y_n = n] \quad = \quad \underbrace{[T_n = n] \cap [X_n = 0]}_{F_1 \cap \cdots \cap F_n} \quad \bigsqcup \quad \underbrace{[T_n = n+1]}_{\emptyset} \cap [X_n = 1]$$

D'où $\mathbb{P}(Y_n = n) = \mathbb{P}(F_1 \cap \cdots \cap F_n) = q^n$.
• Et pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a

$$[Y_n = k] \quad = \quad \underbrace{[T_n = k] \cap [X_n = 0]}_{\emptyset} \quad \bigsqcup \quad \underbrace{[T_n = k+1] \cap [X_n = 1]}_{F_1 \cap \cdots \cap F_k \cap \overline{F_{k+1}}}$$

On a donc

$$\mathbb{P}(Y_n = k) \;=\; \mathbb{P}(F_1 \cap \cdots \cap F_k \cap \overline{F_{k+1}}) \;=\; q^k p$$

109

On va noter A_i l'événement « tirer l'objet A au $i^{\text{ème}}$ tirage ». De même, on définit B_i et C_i.

1. • On peut raisonnablement penser que X_0 est la VA constante égale à 1 (avant de jouer, on dispose d'un gain égal à 0).

   • On a $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$.
   L'événement $[X_1 = 1]$ est « tirer A ». Donc $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{3}$.
   Bilan : $X_1 \sim \mathcal{B}(\frac{1}{3})$.

   • On a $X_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
   On a l'égalité d'événement $[X_2 = 2] = A_1 \cap A_2$. Ainsi, $\mathbb{P}(X_2 = 2) = \left(\frac{1}{3}\right)^2$.
   On a l'égalité d'événement $[X_2 = 1] \;=\; A_1 \cap B_2 \;\sqcup\; \overline{A_1} \cap A_2$.
   Ainsi, par additivité de $\mathbb{P}$, puis par indépendance de A_1 et B_2 d'une part et $\overline{A_1}$ et A_2 d'autre part, on a

   $$\mathbb{P}(X_2 = 1) \;=\; \mathbb{P}(A_1 \cap B_2) + \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap A_2) \;=\; \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}(A_2) \;=\; \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + (1 - \frac{1}{3}) \times \frac{1}{3} \;=\; \frac{1}{3}$$

   On a donc $\mathbb{P}(X_2 = 0) = 1 - \mathbb{P}(X_2 = 1) - \mathbb{P}(X_2 = 2) = 1 - \frac{3}{9} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$.

2. On a l'égalité d'événements

   $$[X_n = n] \;=\; A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

   Par indépendance des A_i, on a

   $$\mathbb{P}(X_n = n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{3} = \frac{1}{3^n}$$

3. On a l'égalité d'événements

   $$[X_{n+1} = 0] \;=\; [X_n = 0] \cap \overline{A_{n+1}} \;\sqcup\; \overline{[X_n = 0]} \cap C_{n+1}$$

   Par additivité de $\mathbb{P}$ et indépendance, on a

   $$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) \;=\; \mathbb{P}(X_n = 0)\Big(1 - \mathbb{P}(A_{n+1})\Big) \;+\; \Big(1 - \mathbb{P}(X_n = 0)\Big)\mathbb{P}(C_{n+1})$$

   Notons $u_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$. On a la relation de récurrence :

   $$u_{n+1} \;=\; u_n \times \frac{2}{3} \;+\; (1 - u_n) \times \frac{1}{3}$$

   D'où $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{1}{3}$.
   BILAN. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique de premier terme $u_0 = 1$.
   En posant $\gamma = \frac{1}{2}$, on a :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{1}{3} \\[2ex] \gamma &= \dfrac{1}{3}\gamma + \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

   Ainsi, par différence, on a :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - \gamma \;=\; \frac{1}{3}(u_n - \gamma)$$

   La suite $(u_n - \gamma)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique, d'où :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n - \gamma \;=\; \frac{1}{3^n}(u_0 - \gamma) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad u_n \;=\; \frac{1}{3^n}\Big(1 - \frac{1}{2}\Big) + \frac{1}{2} \;=\; \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3^n} + 1\Big)$$

   BILAN

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_n = 0) \;=\; \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3^n} + 1\Big)$$

4. Soit $a, n \in \mathbb{N}^*$. Comme $a \neq 0$, on a l'égalité d'événements

$$[X_{n+1} = a] \quad = \quad [X_n = a] \cap B_{n+1} \quad \sqcup \quad [X_n = a-1] \cap A_{n+1}$$

Par additivité de $\mathbb{P}$ et indépendance, on a

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = a) \; = \; \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n = a) \; + \; \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n = a-1)$$

5. On a

$$\mathrm{E}(X_{n+1}) \; = \sum_{a \in X_{n+1}(\Omega)} a\mathbb{P}(X_{n+1} = a) \; = \; \sum_{a=1}^{n+1} a\mathbb{P}(X_{n+1} = a)$$

car le terme de la somme pour $a = 0$ est nul.
Avec la relation de récurrence de la question précédente et en utilisant que X_n ne prend pas la valeur $n+1$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_{n+1}) \; &= \; \frac{1}{3}\sum_{a=1}^{n} a\mathbb{P}(X_n = a) \; + \; \frac{1}{3}\sum_{a=1}^{n+1} a\mathbb{P}(X_n = a-1) \\
&= \; \frac{1}{3}\sum_{a=1}^{n} a\mathbb{P}(X_n = a) \; + \; \frac{1}{3}\sum_{b=0}^{n} (b+1)\mathbb{P}(X_n = b) \\
&= \; \frac{1}{3}\sum_{a=1}^{n} a\mathbb{P}(X_n = a) \; + \; \frac{1}{3}\sum_{b=0}^{n} b\mathbb{P}(X_n = b) \; + \; \frac{1}{3}\underbrace{\sum_{b=0}^{n} \mathbb{P}(X_n = b)}_{=1} \\
&= \; \frac{2}{3}\sum_{a=1}^{n} a\mathbb{P}(X_n = a) \; + \; \frac{1}{3} \\
&= \; \frac{2}{3}\mathrm{E}(X_n) \; + \; \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

La suite $\Big(\mathrm{E}(X_n)\Big)$ est donc arithmético-géométrique.
En posant $e_n = \mathrm{E}(X_n)$ et $\gamma = 1$, on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} e_{n+1} & = & \frac{2}{3}e_n + \frac{1}{3} \\ \gamma & = & \frac{2}{3}\gamma + \frac{1}{3} \end{array} \right.$$

Ainsi, par différence, on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad e_{n+1} - \gamma \; = \; \frac{2}{3}(e_n - \gamma)$$

La suite $(e_n - \gamma)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc géométrique, et $e_0 = \mathrm{E}(X_0) = 0$, d'où

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad e_n - \gamma \; = \; \left(\frac{2}{3}\right)^n (e_0 - \gamma) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad e_n \; = \; \left(\frac{2}{3}\right)^n \Big(0 - 1\Big) + 1$$

BILAN

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{E}(X_n) \; = \; 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

1. On a $X_1(\Omega) = [\![0, 1]\!]$.
   Et $\mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$.

   On a $X_2(\Omega) = [\![0, 2]\!]$.
   Et
   $$\mathbb{P}(X_2 = 0) \;=\; \mathbb{P}(R_1 \cap R_2) \;=\; \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}_{R_1}(R_2) \;=\; \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$$
   Idem pour $\mathbb{P}(X_2 = 2)$ car les boules rouges et blanches jouent le même rôle.
   $$\mathbb{P}(X_2 = 1) \;=\; \mathbb{P}(B_1 \cap R_2) + \mathbb{P}(R_1 \cap B_2) \;=\; \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il est clair que $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et on conjecture que
   $$\forall\, k \in [\![0, n]\!], \quad \mathbb{P}(X_n = k) \;=\; \frac{1}{n+1}$$
   Prouvons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{H}_n$ est vraie où :
   $$\mathcal{H}_n : \qquad \text{« } \forall\, k \in [\![0, n]\!], \quad \mathbb{P}(X_n = k) \;=\; \frac{1}{n+1} \text{ »}$$
   Initialisation. À vous.
   Hérédité.
   Utilisons le système complet d'événements $\Big([X_n = i]\Big)_{0 \leqslant i \leqslant n}$.
   D'après la formule des probabilités totales, on a pour tout $k \in [\![0, n+1]\!]$.
   $$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) \;=\; \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X_n = i)\mathbb{P}_{X_n = i}(X_{n+1} = k)$$
   d'où
   $$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \mathbb{P}(X_n = k-1)\underbrace{\mathbb{P}_{X_n = k-1}(X_{n+1} = k)}_{\mathbb{P}_{X_n = k-1}(B_{n+1})} + \mathbb{P}(X_n = k)\underbrace{\mathbb{P}_{X_n = k}(X_{n+1} = k)}_{\mathbb{P}_{X_n = k}(R_{n+1})}$$
   Utilisons $\mathcal{H}_n$ pour $\mathbb{P}(X_n = k-1)$ et $\mathbb{P}(X_n = k)$.
   Pour cela, il faut que $k-1$ et k soient dans $[\![0, n]\!]$, càd $0 < k < n+1$.
   Distinguons donc plusieurs cas. Avant de commencer, examinons la composition de l'urne à un temps t donné.
   Après le $n^{\text{ème}}$ tirage (ou **avant** le $n+1^{\text{ème}}$ tirage), il y a $n+2$ boules dans l'urne. Si $X_n = j$ est réalisé, alors l'urne contient $j+1$ boules blanches, donc $n+2-(j+1) = n-j+1$ boules rouges.
   ▷ Si $k = 0$, alors
   $$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) \;=\; \underbrace{\mathbb{P}(X_n = 0)}_{\overset{\mathcal{H}_n}{=} \frac{1}{n+1}}\underbrace{\mathbb{P}_{X_n = 0}(R_{n+1})}_{\frac{n-0+1}{n+2}} \;=\; \frac{1}{n+2}$$
   ▷ Si $k = n+1$, alors
   $$\mathbb{P}(X_{n+1} = n+1) \;=\; \underbrace{\mathbb{P}(X_n = n)}_{\overset{\mathcal{H}_n}{=} \frac{1}{n+1}}\underbrace{\mathbb{P}_{X_n = n}(B_{n+1})}_{\frac{n+1}{n+2}} \;=\; \frac{1}{n+2}$$
   ▷ Si $0 < k < n+1$, alors
   $$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) \;=\; \underbrace{\mathbb{P}(X_n = k-1)}_{\overset{\mathcal{H}_n}{=} \frac{1}{n+1}}\mathbb{P}_{X_n = k-1}(B_{n+1}) \;+\; \underbrace{\mathbb{P}(X_n = k)}_{\overset{\mathcal{H}_n}{=} \frac{1}{n+1}}\mathbb{P}_{X_n = k}(R_{n+1})$$

Or

$$\mathbb{P}_{X_n=k-1}(B_{n+1}) \;=\; \frac{(k-1)+1}{n+2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}_{X_n=k}(R_{n+1}) \;=\; \frac{(n-k+1)}{n+2}$$

D'où

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=k) \;=\; \frac{1}{n+1}\frac{k}{n+2} \;+\; \frac{1}{n+1}\frac{(n-k+1)}{n+2} \;=\; \frac{1}{n+2}$$

Bilan : Les 3 cas montrent que

$$\forall\, k \in [\![0, n+1]\!], \quad \mathbb{P}(X_{n+1}=k) \;=\; \frac{1}{n+2}$$

càd $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

① La VA suit une loi binomiale de paramètres n, p.

② On a exactement $Z(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
Soit $k \in Z(\Omega)$.
Utilisons la formule des probabilités totales avec le SCÉ $\big([X = i]\big)_{0 \leqslant i \leqslant n}$.
D'où

$$\mathbb{P}(Z = k) \;=\; \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}([X = i] \cap [Z = k])$$

Or, on a l'égalité d'événements

$$[X = i] \cap [Z = k] \;=\; [X = i] \cap [X + Y = k] \;=\; [X = i] \cap [i + Y = k] \;=\; [X = i] \cap [Y = k - i]$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(Z = k) \;=\; \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = k - i]) \;=\; \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}([X = i])\mathbb{P}_{[X=i]}([Y = k - i])$$

Avec les données, on a :

$$\mathbb{P}(Z = k) \;=\; \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \binom{n-i}{k-i} p^{k-i} q^{n-i-(k-i)} \;=\; \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}}_{\binom{n}{k}\binom{k}{i}} p^k q^{2n-i-k}$$

On peut arrêter la somme à k (WHY ?)

$$\mathbb{P}(Z = k) \;=\; \binom{n}{k} p^k q^{2n-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} q^{-i}$$

D'où, avec le binôme de Newton,

$$\mathbb{P}(Z = k) \;=\; \binom{n}{k} p^k q^{2n-k} \left(1 + \frac{1}{q}\right)^k$$

Autre solution, légèrement différente.
On a l'égalité d'événements

$$[Z = k] \;=\; [X + Y = k] \;=\; \bigsqcup_{i=0}^{k} [X = i] \cap [Y = k - i]$$

Par additivité de $\mathbb{P}$, on a donc

$$\mathbb{P}(Z = k) \;=\; \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = k - i]) \;=\; \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}([X = i])\mathbb{P}_{[X=i]}([Y = k - i])$$

Et on termine comme précédemment.

Autre solution, légèrement différente.
On a l'égalité d'événements

$$[Z = k] \;=\; [X + Y = k] \;=\; \bigsqcup_{i+j=k} [X = i] \cap [Y = j]$$

Par additivité de $\mathbb{P}$, on a donc

$$\mathbb{P}(Z = k) \;=\; \sum_{i+j=k} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \;=\; \sum_{i+j=k} \mathbb{P}([X = i])\mathbb{P}_{[X=i]}([Y = j])$$

$$\mathbb{P}(Z = k) \;=\; \sum_{i+j=k} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \binom{n-i}{j} p^j q^{n-i-j}$$

Et on termine comme précédemment.

③ A la question précédente, on a montré que

$$\mathbb{P}(Z=k) \;=\; \binom{n}{k}\Big(p(1+q)\Big)^k (q^2)^{n-k}$$

Montrons que Z suit une loi binomiale de paramètre (n, p') où $p' = p(1+q)$.
Pour cela, il s'agit de montrer que $p' + q^2 = 1$.
Allons-y.
On a

$$p' + q^2 \;=\; p(1+q) = (1-q)(1+q) + q^2 = 1 - q^2 + q^2 = 1$$

Jeanne Delareux, CDmaths 2021-2022, me dit qu'il y a une interprétation de ce résultat, et elle a raison.

L'expérience peut être vue comme la répétition de manière identique et indépendante de n épreuves, où chaque épreuve est « tirer deux fois sur une cible » avec une probabilité d'échec égale à q^2, donc de succès égale à $1 - q^2$.

Compter le nombre de succès de cette expérience revient à compter le nombre de succès lors des deux séances de tirs de l'énoncé (en effet, lors de la deuxième séance de tirs, on peut laisser l'archer tenter sa chance sur les cibles déjà atteintes la première fois, et ne pas tenir compte du score de ces cibles).

Ainsi, il est normal que Z suive une loi binomiale de paramètres n et $1 - q^2$.

1. La fonction g_X est une fonction polynomiale dont les coefficients sont les $(\mathbb{P}(X=k))_{k\in X(\Omega)}$.

   La donnée de g_X détermine donc les $(\mathbb{P}(X=k))_{k\in X(\Omega)}$, c'est-à-dire la loi de X.
   Plus précisément, on a
$$\forall\, k\in\mathbb{N},\quad \mathbb{P}(X=k) \;=\; \frac{g^{(k)}(0)}{k!}$$

2. Soit $t\in\mathbb{R}$. On a
$$g_{X_1+X_2}(t)=\mathrm{E}(t^{X_1+X_2})=\mathrm{E}(t^{X_1}t^{X_2})$$
   Comme X_1 et X_2 sont indépendantes, il en est de même de t^{X_1} et t^{X_2} (transformées de variables indépendantes). Donc l'espérance du produit est le produit des espérances, et on a alors :
$$g_{X_1+X_2}(t) \;=\; \mathrm{E}(t^{X_1})\mathrm{E}(t^{X_2}) \;=\; g_{X_1}(t)g_{X_2}(t)$$
   D'où l'égalité de fonctions $g_{X_1+X_2}=g_{X_1}g_{X_2}$.

3. Soit $X\sim\mathcal{B}(n,p)$. D'après la formule du binôme de Newton, on a :
$$\forall\, t\in\mathbb{R},\quad g_X(t) \;=\; \sum_{k=0}^{n} t^k\mathbb{P}(X=k) \;=\; \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(pt)^k(1-p)^{n-k} \;=\; (pt+1-p)^n.$$
   Prenons X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois binomiales.
   Alors, on a
$$\forall\, t\in\mathbb{R},\quad g_{X_1+X_2}(t) \;=\; g_{X_1}(t)g_{X_2}(t) \;=\; (pt+1-p)^{n_1}(pt+1-p)^{n_2} \;=\; (pt+1-p)^{n_1+n_2}.$$
   On reconnaît la fonction génératrice de la loi binomiale de paramètres (n_1+n_2,p).
   D'après la question 1, on en déduit que X_1+X_2 suit la loi binomiale de paramètres (n_1+n_2,p).

4. $Y=X_1+X_2$, où X_1 et X_2 sont indépendants donc $g_Y=g_{X_1+X_2}=g_{X_1}g_{X_2}$ d'après la question 2.
   (a) i. Comme $Y\sim\mathcal{U}(\llbracket 1,12\rrbracket)$, on a
$$\forall\, t\in\mathbb{R},\quad g_Y(t) \;=\; \sum_{k=2}^{12} t^k\mathbb{P}(Y=k) \;=\; \sum_{k=2}^{12} t^k\frac{1}{11} \;=\; \frac{1}{11}t^2\sum_{j=0}^{10}t^j.$$
   La fonction génératrice de Y est donc une fonction polynomiale de degré 12.
   On voit que 0 est racine double de g_Y.
   Par ailleurs, comme $\displaystyle\sum_{j=0}^{10}t^j \;=\; \frac{t^{11}-1}{t-1}$, les autres racines de g_Y sont les racines onzièmes de l'unité différentes de 1.
   Les racines de g_Y sont donc
$$0 \text{ de multiplicité } 2 \qquad\text{et}\qquad \text{les éléments de } \mathbb{U}_{11}\setminus\{1\}$$
   Comme 11 est impair, l'ensemble $\mathbb{U}_{11}\setminus\{1\}$ ne contient aucun réel (rappel, en toute généralité $\mathbb{U}_m$ contient les réels ±1 si m est pair, et uniquement 1 si m est impair).
   ii. D'après la question 2, on a $g_Y=g_{X_1}g_{X_2}$.
   Comme $X_1(\Omega)=X_2(\Omega)\subset\llbracket 1,6\rrbracket$, les polynômes g_{X_1} et g_{X_2} sont de degré inférieurs ou égal à 6 et ont 0 comme racine.
   Comme g_Y est de degré 12, les polynômes g_{X_1} et g_{X_2} sont exactement de degré 6 et les racines de ces deux polynômes sont incluses dans les racines de g_Y.
   Les racines de g_{X_1} et g_{X_2} sont donc
$$0 \qquad\text{et}\qquad 5 \text{ éléments de } \mathbb{U}_{11}\setminus\{1\}$$
   Or un polynôme à coefficient *réel* (à savoir g_{X_1}) ne peut pas avoir un nombre impair de racines complexes non réelles.
   Ainsi, Y ne suit pas la loi uniforme sur $\llbracket 2,12\rrbracket$.

(b) i. Supposons que les dés soient équilibrés.

Alors X_1 et X_2 suivent la loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$g_{X_i}(t) \;=\; \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} t^k$$

Donc

$$P(t) \;=\; g_{X_1}(t)g_{X_2}(t) \;=\; \frac{t^2}{36}\Big(\sum_{j=0}^{5} t^j\Big)^2$$

$$\forall\, t \neq 1, \qquad P(t) = \frac{1}{36}t^2\Big(\frac{t^6-1}{t-1}\Big)^2$$

Les racines de P sont 0 et les racines sixièmes de l'unité différentes de 1 toutes doubles.

P a donc deux racines réelles 0 et -1 et quatre racines complexes non réelles (deux à deux conjuguées), toutes de multiplicité 2.

ii. On a toujours $g_{X_1}g_{X_2} = P$.

Comme $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) \subset [\![1,6]\!]$, les polynômes g_{X_1} et g_{X_2} sont de degré inférieurs ou égal à 6 et ont 0 comme racine.

Comme g_{X_1} est à coefficients réels, il ne peut pas avoir un nombre impair de racines complexes non réelles. Idem pour g_{X_2}.

Nécessairement, ils ont chacun -1 comme racine simple, leurs autres racines étant deux à deux conjuguées. Deux cas sont possibles.

— Soit chacun des polynômes a pour racines (simples) $e^{-i\pi/3}, e^{i\pi/3}, e^{-i2\pi/3}$ et $e^{i2\pi/3}$, alors g_{X_1} et g_{X_2} sont à une constante près égaux à $\sum_{k=1}^{6} t^k$.

Comme la somme des coefficients doit être égale à 1, on trouve $g_{X_1}(t) = g_{X_2}(t) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} t^k$ (*i.e.* la fonction génératrice d'une loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$, donc les dés sont équilibrés).

— Soit l'un des polynômes a pour racines doubles $e^{-i\pi/3}$ et $e^{i\pi/3}$, l'autre $e^{-i2\pi/3}$ et $e^{i2\pi/3}$.

On a alors par exemple, en notant α le coefficient dominant :

$$g_{X_1}(t) = \alpha t(t+1)(t-e^{-i\pi/3})^2(t-e^{i\pi/3})^2 = \alpha t(t+1)(t^2-t+1)^2 = \alpha(t^6-t^5+t^4+t^3-t^2+t).$$

g_{X_1} a donc des coefficients négatifs, ce qui est absurde car ce sont des probabilités (de la forme $\mathbb{P}(X_1 = k)$). Ainsi, ce deuxième cas est exclu.

On en déduit que les dés sont équilibrés.

1. Soit $\lambda > 0$. Comme exp et ln sont croissantes, on a :
$$\{S_n - np \geqslant nx\} = \{\lambda(S_n - np) \geqslant n\lambda x\} = \{e^{(S_n - np)} \geqslant e^{n\lambda x}\}.$$
La variable aléatoire $e^{(S_n-np)}$ étant positive, l'inégalité de Markov donne :
$$\mathbb{P}\Big(S_n - np \geqslant nx\Big) \;=\; \mathbb{P}\Big(e^{(S_n-np)} \geqslant e^{n\lambda x}\Big) \;\leqslant\; \frac{\mathrm{E}(e^{(S_n-np)})}{e^{n\lambda x}}$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. En appliquant la formule de transfert, on obtient :
$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(e^{(S_n-np)}) &= \sum_{k=0}^{n} e^{(k-np)}\binom{n}{k}p^k q^{n-k} \\
&= e^{-n\lambda p}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^{\lambda}p)^k q^{n-k} \\
&= e^{-n\lambda p}(ep+q)^n \\
&= (e^{-\lambda p}ep + qe^{-\lambda p})^n
\end{aligned}$$

3. (a) Une étude de fonction. A vous. $f' : t \mapsto (2t-1)e^{t^2-t} + (1-t)e^{-t}$.
   (b) — En appliquant l'inégalité 3.(a) à λq et $-\lambda p$, puis en majorant $\lambda^2 q^2$ et $\lambda^2 p^2$ par λ^2, on obtient :
$$\mathrm{E}(e^{\lambda(S_n-np)}) \leqslant \Big(p(e^{\lambda^2q^2}+\lambda q) + q(e^{\lambda^2p^2}-\lambda p)\Big)^n \;\leqslant\; \Big((p+q)e^{\lambda^2}\Big)^n \;\leqslant\; e^{n\lambda^2}.$$
   Ainsi,
$$\forall \lambda > 0,\ \mathbb{P}(S_n - np \geqslant nx) \;\leqslant\; \frac{\mathrm{E}(e^{\lambda(S_n-np)})}{e^{n\lambda x}} \;\leqslant\; e^{n(\lambda^2-\lambda x)}$$
   — On choisit le λ qui minimise le membre de droite de l'inégalité, c'est-à-dire $\frac{x}{2}$. On obtient alors
$$\mathbb{P}(S_n - np \geqslant nx) \leqslant e^{-\frac{nx^2}{4}}$$

4. (a) On montre de même que :
$$\forall \lambda > 0,\ \mathbb{P}(S_n - np \leqslant -nx) = \mathbb{P}((np - Sn) \geqslant n\lambda x) \leqslant \frac{\mathrm{E}(e^{(np-S_n)})}{e^{n\lambda x}}.$$
   Le calcul de l'espérance de la question 2. implique que
$$\mathrm{E}(e^{(np-S_n)}) = \mathrm{E}(e^{-(S_n-np)}) = (pe^{-\lambda q} + qe^{\lambda p})^n.$$
   En appliquant l'inégalité 3.(a) à $-\lambda q$ et λp, on obtient la même majoration :
$$\forall \lambda > 0,\ \mathbb{P}(S_n - np \leqslant -nx) \leqslant e^{n(\lambda^2-\lambda x)},$$
   qui pour $\lambda = \frac{x}{2}$ donne $\mathbb{P}(S_n - np \leqslant -nx) \leqslant e^{-\frac{nx^2}{4}}$.
   (b) On a
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant x\right) &= \mathbb{P}(|S_n - np| \geqslant nx) \\
&= \mathbb{P}(S_n - np \geqslant nx) + \mathbb{P}(S_n - np \leqslant -nx) \\
&\leqslant 2e^{-\frac{nx2}{4}}.
\end{aligned}$$
   On a donc démontré **l'inégalité de Bernstein** : $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant x\right) \leqslant 2e^{-\frac{nx2}{4}}$.
   (c) On a $\mathrm{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = p$ et $\mathrm{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \dfrac{p(1-p)}{n}$, donc **l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne**
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant x\right) \;\leqslant\; \frac{p(1-p)}{nx^2}$$
   Pour les grandes valeurs de n, l'inégalité de Bernstein fournit des inégalités nettement plus fines que l'inégalité de BT.