Déterminants

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. De plus, n est un entier naturel non nul et E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

I. Déterminant d'une famille de vecteurs

1 **Définition.**
Soit $\varphi : E^n \to \mathbb{K}$ une application.
On dit que φ est une *forme n-linéaire* lorsque φ est linéaire par rapport à chacune de ses variables, c'est-à-dire lorsque pour toute famille $(u_1,\dots,u_n)\in E^n$ et pour tout $i\in [\![1,n]\!]$, l'application :

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \varphi(u_1,\dots,u_{i-1},x,u_{i+1},\dots,u_n) \end{array}$$

est une forme linéaire.

2 **Définition.** Soit $\varphi : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire sur E.
On dit que φ est *alternée* lorsque

$$\forall (u_1,\dots,u_n)\in E^n,\quad \forall i\neq j,\quad \Big(u_i=u_j \implies \varphi(u_1,\dots,u_n)=0.\Big)$$

3 **Proposition.**
Soit $\varphi : E^n \to \mathbb{K}$ est une forme n-linéaire.
Si φ est alternée, alors elle est *antisymétrique* c'est-à-dire

$$\forall (u_1,\dots,u_n)\in E^n,\quad \forall i\neq j,\quad \varphi(u_1,\dots,u_i,\dots,u_j,\dots,u_n) = -\varphi(u_1,\dots,u_j,\dots,u_i,\dots,u_n)$$

Le théorème suivant est un résultat théorique fondamental. Il est **admis**.

4 **Théorème.** Soit $\mathscr{B}$ une base de E.

— Il existe une unique forme n-linéaire alternée $\det_{\mathscr{B}} : E^n \to \mathbb{K}$ vérifiant $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B})=1$.

— Toute forme n-linéaire alternée φ est proportionnelle à $\det_{\mathscr{B}}$.

- On a alors l'existence d'un $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $\varphi=\lambda\det_{\mathscr{B}}$.
  Que vaut λ ?

Dimensions 2 et 3

5 preuve

Proposition (dimension 2).
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ une base de E.
Soit $x = ae_1 + be_2$ et $y = ce_1 + de_2$ deux vecteurs de E.
Alors $\det_{\mathscr{B}}(x, y) = ad - bc$.

6 preuve

Proposition (dimension 3).
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
Soit $x_1, x_2, x_3 \in E$ que l'on décompose ainsi dans la base $\mathscr{B}$:

$$\forall j \in [\![1,3]\!], \quad x_j = \sum_{i=1}^{3} a_{i,j} e_i.$$

Alors on a :

$$\begin{aligned}\det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, x_3) = \quad & a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3} + a_{2,1}\, a_{3,2}\, a_{1,3} + a_{3,1}\, a_{1,2}\, a_{2,3} \\ & - a_{3,1}\, a_{2,2}\, a_{1,3} - a_{1,1}\, a_{3,2}\, a_{2,3} - a_{2,1}\, a_{1,2}\, a_{3,3}.\end{aligned}$$

Interprétation géométrique

- On considère un parallélogramme $ABCD$ du plan $\mathbb{R}^2$ que l'on munit de sa base canonique notée $\mathscr{B}$.
  On écrit sous forme trigonométrique les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$

  $$z_{\overrightarrow{AB}} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad \text{et} \quad z_{\overrightarrow{AD}} = r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'},$$

  de sorte que $\overrightarrow{AB} = r\cos(\theta)e_1 + r\sin(\theta)e_2$ et $\overrightarrow{AD} = r'\cos(\theta')e_1 + r'\sin(\theta')e_2$.
  L'aire **géométrique** du parallélogramme $ABCD$ est alors donnée par $rr'|\sin(\theta' - \theta)|$.

  De plus,

  $$\begin{aligned}\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) &= \begin{vmatrix} r\cos\theta & r'\cos\theta' \\ r\sin\theta & r'\sin\theta' \end{vmatrix} \\ &= rr'(\cos\theta\sin\theta' - \sin\theta\cos\theta') \\ &= rr'\sin(\theta' - \theta)\end{aligned}$$

  Ce réel est appelé *aire **orientée** du parallélogramme $ABCD$.*
- De même, si A, B, C, D sont quatre points de l'espace $\mathbb{R}^3$ que l'on munit de sa base canonique notée $\mathscr{B}$, alors

  $$\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$$

  est appelé *volume orienté du parallélépipède* construit sur les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

Propriétés

7
preuve

Proposition. Soit $\mathscr{B}$ une base de E et $u_1, \dots, u_n \in E$.
Le scalaire $\det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n)$ est inchangé si l'on ajoute à l'un des vecteurs une combinaison linéaire des autres.

8

Proposition. Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.
Les applications $\det_{\mathscr{B}}$ et $\det_{\mathscr{B}'}$ sont proportionnelles.
Plus précisément :

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, \qquad \det_{\mathscr{B}'}(u_1, \dots, u_n) = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n).$$

9

Proposition. Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.
On a

$$\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = 1$$

10
preuve

Proposition. Soit $\mathscr{B}$ une base de E et $u_1, \dots, u_n \in E$.
On a

$$(u_1, \dots, u_n) \text{ est une base de } E \qquad \Longleftrightarrow \qquad \det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0$$

- **Conséquence.** L'image par l'application $\det_{\mathscr{B}}$ d'une famille *liée* est nulle.

II. Déterminant d'un endomorphisme

11
preuve

Théorème. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
Il existe alors un unique scalaire λ, appelé *déterminant* de f, tel que :

$$\forall \mathscr{B} \text{ base de } E, \qquad \forall u_1,\dots,u_n \in E, \qquad \det_{\mathscr{B}}\big(f(u_1),\dots,f(u_n)\big) = \lambda \det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_n).$$

Ce scalaire λ s'appelle le déterminant de f, et se note $\det f$.

12

Proposition. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Soit $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base de E.
On a

$$\det f \;=\; \det_{\mathscr{B}}\big(f(e_1),\dots,f(e_n)\big).$$

- **Remarque.** Le point précédent peut se réécrire en abrégé :

$$\det f \;=\; \det_{\mathscr{B}}\big(f(\mathscr{B})\big)$$

13

Proposition.

— Le déterminant de l'endomorphisme identité vaut 1, c'est-à-dire $\det(\mathrm{id}_E) = 1$.

— Soit $h \in \mathscr{L}(E)$ une homothétie de rapport λ. Alors $\det h = \lambda^n$.
Autrement dit,

$$\det(\lambda \mathrm{id}_E) \;=\; \lambda^n$$

14
sol → 13

Question.

1. Soit F et G deux sous-espaces supplémentaires de E et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Montrer que $\det s = (-1)^{\dim G}$.
2. On note u l'endomorphisme transposition défini sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer $\det(u)$.

15

Proposition.
Soit $f, g \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\det(g \circ f) \;=\; \det g \det f \qquad \text{et} \qquad \det(\lambda f) = \lambda^n \det f.$$

- On a $\det(g \circ f) = \det(f \circ g)$, même si en général, $f \circ g \neq g \circ f$.

16
preuve

Proposition. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
On a

$$f \text{ automorphisme} \quad \Longleftrightarrow \quad \det f \neq 0$$

Dans ce cas, on a alors

$$\det\big(f^{-1}\big) \;=\; (\det f)^{-1}.$$

17

Question. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$.
Montrer que n est pair.

III. Déterminant d'une matrice carrée

Définition

18 **Définition.** Le *déterminant* d'une matrice carrée de taille n est le déterminant de la famille de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

- La définition dit donc que pour une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$\det A \overset{\text{def}}{=} \det_{\mathscr{B}_{\text{cano}}}(\mathrm{Col}_1(A), \ldots, \mathrm{Col}_n(A)) \qquad \text{où } \mathscr{B}_{\text{cano}} \text{ est la base canonique de } \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

- Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Le déterminant de A se note :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

- **Matrice de taille 2.**

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

- **Matrice de taille 3.**

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{1,1}\,a_{2,2}\,a_{3,3} + a_{2,1}\,a_{3,2}\,a_{1,3} + a_{3,1}\,a_{1,2}\,a_{2,3} \\ -a_{3,1}\,a_{2,2}\,a_{1,3} - a_{1,1}\,a_{3,2}\,a_{2,3} - a_{2,1}\,a_{1,2}\,a_{3,3}. \end{array}$$

- **Cas particuliers importants!** On a $\det(I_n) = 1$ et $\det(0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}) = 0$.

19 preuve **Proposition.** Soit $\mathscr{B}$ une base de E.
Soit $\mathscr{F}$ une famille de n vecteurs de E.
Alors le déterminant de la matrice exprimant $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{B}$ est égal à $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$:

$$\det\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})\Big) = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$$

- La proposition est donc du type $\quad \det A = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) \quad$ c'est-à-dire $\quad \det \text{Matrice} = \det_{\mathscr{B}}(\text{famille})$.

20 preuve **Proposition.**

— Soit D la matrice diagonale d'éléments diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
Alors

$$\det D = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

— Soit T une matrice de transvection, disons $T = I + \lambda E_{i,j}$ avec $i \neq j$.
Alors

$$\det T = 1$$

21 preuve **Proposition (endomorphisme et matrice).**
Le déterminant d'un endomorphisme est le déterminant de n'importe quelle de ses matrices.

- **En maths.** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Soit $\mathscr{B}$ une base de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Alors $\det f = \det A$.

Propriétés

22 preuve

Proposition. Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$, $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
On a :

- ⋆ $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$;
- ⋆ $\det(AB) = \det A \det B$;
- ⋆ $\det(P^{-1}AP) = \det A$.

23 preuve

Proposition (matrice inversible). Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On a

$$A \text{ inversible} \quad \Longleftrightarrow \quad \det A \neq 0$$

Dans ce cas, on a alors

$$\det\left(A^{-1}\right) = (\det A)^{-1}.$$

24 preuve

Proposition. Une matrice et sa transposée ont même déterminant.

- **En maths.** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a
$$\det A = \det(A^\top)$$
- **Preuve.** Non-exigible. Cependant, on peut s'interroger sur une preuve dans le cas où A est une matrice d'opérations élémentaires.
- **Défi.** Change-t-on le déterminant en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice ?

25 sol → 15

Question. Soit $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ une matrice antisymétrique *de taille impaire*.
Montrer que $\det(A) = 0$.

IV. Calcul des déterminants

Opérations sur les lignes ou les colonnes

Les propriétés du déterminant permettent d'énoncer les règles suivantes.

- Si une matrice a deux colonnes (ou deux lignes) identiques, son déterminant est nul.
- Si l'on échange deux colonnes (ou deux lignes) d'une matrice, on change son déterminant en son opposé.
- Si l'une des colonnes (resp. lignes) d'une matrice est combinaison linéaire des **autres** colonnes (resp. des **autres** lignes), alors son déterminant est nul.
- Si une matrice a une colonne (ou une ligne) nulle, son déterminant est nul.
- Le déterminant d'une matrice est inchangé si l'on ajoute à une colonne (resp. à une ligne) une combinaison linéaire des **autres** colonnes (resp. des **autres** lignes).
- Si l'on multiplie une colonne (ou une ligne) d'une matrice par un scalaire λ, son déterminant est multiplié par λ.

  Par conséquent, si l'on multiplie par λ tous les coefficients d'une matrice $n \times n$, son déterminant est multiplié par λ^n.

Ces règles de transformation d'un déterminant permettent :

— soit de prouver qu'il est nul;

— soit d'introduire dans une colonne (resp. une ligne) un maximum de 0 afin d'utiliser avec profit les résultats qui vont suivre, à savoir développer par rapport à une ligne ou une colonne.

26 **Question à l'oral!**

Sans les calculer explicitement, justifier que les déterminants suivants sont nuls :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Développement suivant une colonne ou une ligne

On suppose dans cette partie $n \geqslant 2$.

27 **Proposition.** Soit A une matrice carrée de la forme :

$$A = \left[\begin{array}{c|ccc} \alpha & \star & \cdots & \star \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \widetilde{A} & \\ 0 & & & \end{array}\right] \quad \text{ou encore} \quad A = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & \star \\ & \widetilde{A} & & \vdots \\ & & & \star \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{array}\right]$$

ou encore

$$A = \left[\begin{array}{c|ccc} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \star & & & \\ \vdots & & \widetilde{A} & \\ \star & & & \end{array}\right] \quad \text{ou encore} \quad A = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & \star \\ & \widetilde{A} & & \vdots \\ & & & \star \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{array}\right]$$

Alors $\det A = \alpha \det A'$.

28 preuve **Proposition.** Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

29 sol → 15 **Question.** Soit a, b et c trois scalaires. Donner une expression factorisée du déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

30 **Définition.** Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$.
On appelle :

— *mineur* d'indice (i,j) le déterminant $\Delta_{i,j}$ de la matrice extraite de A obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.

— *cofacteur* d'indice (i,j) le scalaire $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.

31 preuve **Proposition.** Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

— **Formule de développement suivant une colonne.**

$$\forall j\in[\![1,n]\!],\quad \det A=\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}.$$

— **Formule de développement suivant une ligne.**

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\quad \det A=\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}.$$

- **Exemple.** Soit $a\in\mathbb{K}$. Calculons le déterminant suivant en développant suivant la troisième colonne :

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1&a&2\\a&2&0\\a&1&3\end{vmatrix}&=2\begin{vmatrix}a&2\\a&1\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}1&a\\a&2\end{vmatrix}\\&=2(a-2a)+3(2-a^2)\\&=6-2a-3a^2\end{aligned}$$

- **Technique de calcul.** Dans la pratique, pour calculer un déterminant, on pourra combiner l'utilisation des opérations élémentaires pour faire apparaitre des coefficients nuls et la formule de développement suivant une ligne ou une colonne (qui contient beaucoup de coefficients nuls par exemple).

32 sol → 16 **Question.** Soit $A=\begin{bmatrix}0&0&a\\1&0&b\\0&1&c\end{bmatrix}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ et $x\in\mathbb{K}$.
Exprimer $\det(xI_3-A)$ sous la forme d'une expression polynomiale développée suivant les puissances de x.

33 sol → 17 **Question.** Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Exprimer sous forme factorisée les déterminants suivants :

$$A=\begin{vmatrix}2a&2a&a-b-c\\2b&b-c-a&2b\\c-a-b&2c&2c\end{vmatrix}\qquad B=\begin{vmatrix}a&c&c&b\\c&a&b&c\\c&b&a&c\\b&c&c&a\end{vmatrix}$$

$$C=\begin{vmatrix}a+b&b+c&c+a\\a^2+b^2&b^2+c^2&c^2+a^2\\a^3+b^3&b^3+c^3&c^3+a^3\end{vmatrix}\qquad D=\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&a^2&b^2\\1&a^2&0&c^2\\1&b^2&c^2&0\end{vmatrix}$$

Déterminants

preuve et éléments de correction

5

Par linéarité par rapport à la première variable, on a :

$$\begin{aligned}\det_{\mathscr{B}}(x,y) &= \det_{\mathscr{B}}(ae_1+be_2, ce_1+de_2)\\ &= a\det_{\mathscr{B}}(e_1, ce_1+de_2)+b\det_{\mathscr{B}}(e_2, ce_1+de_2).\end{aligned}$$

Par linéarité par rapport à la seconde variable, cela donne :

$$\det_{\mathscr{B}}(e_1, ce_1+de_2) = c\det_{\mathscr{B}}(e_1,e_1)+d\det_{\mathscr{B}}(e_1,e_2)$$

et de même :

$$\det_{\mathscr{B}}(e_2, ce_1+de_2) = c\det_{\mathscr{B}}(e_2,e_1)+d\det_{\mathscr{B}}(e_2,e_2).$$

Par caractère alterné et antisymétrique de l'application $\det_{\mathscr{B}}$ et le fait que $\det_{\mathscr{B}}(e_1,e_2)=1$, on en déduit :

$$\det_{\mathscr{B}}(x,y) = ad-bc.$$

6

— On développe par linéarité par rapport à chaque variable :

$$(\star)\qquad \det_{\mathscr{B}}(x_1,x_2,x_3) = \sum_{1\leqslant i,j,k\leqslant 3} a_{1,i}a_{2,j}a_{3,k}\det_{\mathscr{B}}(e_i,e_j,e_k).$$

— Par caractère alterné de l'application $\det_{\mathscr{B}}$, tous les termes dans la somme qui précède où dans la liste (e_i,e_j,e_k) figure (au moins) deux fois le même vecteur sont nuls. Il ne reste que 6 termes de la forme $\lambda_{i,j,k}f(e_i,e_j,e_k)$ avec i,j,k trois entiers distincts de $\{1,2,3\}$ et $\lambda_{i,j,k}$ un scalaire.

— Pour simplifier chacun des termes, on utilise la propriété d'antisymétrie et le fait que $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B})=1$. Ainsi : DESSIN

— Par conséquent, la relation $(\star)$ se réécrit :

$$\begin{aligned}\det_{\mathscr{B}}(x_1,x_2,x_3) = {} & a_{1,1}\,a_{2,2}\,a_{3,3}+a_{2,1}\,a_{3,2}\,a_{1,3}+a_{3,1}\,a_{1,2}\,a_{2,3}\\ & -a_{3,1}\,a_{2,2}\,a_{1,3}-a_{1,1}\,a_{3,2}\,a_{2,3}-a_{2,1}\,a_{1,2}\,a_{3,3},\end{aligned}$$

ce qui conclut.

7

Traitons le cas particulier où l'on ajoute au vecteur u_1 la combinaison linéaire $x=\sum_{k=2}^{n}\lambda_k u_k$. Par linéarité par rapport à la première variable, on a :

$$\det_{\mathscr{B}}(u_1+x,u_2,\dots,u_n) = \det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_n)+\sum_{k=2}^{n}\lambda_k\det_{\mathscr{B}}(u_k,u_2,\dots,u_n).$$

On conclut par caractère alterné : $\det_{\mathscr{B}}(u_1+x,u_2,\dots,u_n)=\det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_n)$.

10

$(i)\Rightarrow(ii)$ ...

$(ii) \Rightarrow (i)$ Puisque E est de dimension n, si $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille libre de E, alors $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de E. Supposons donc que $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ ne soit pas une base de E. Alors c'est une famille liée. L'un des vecteurs est donc combinaison linéaire des autres. Supposons sans perte de généralité que $u_1 \in \mathrm{Vect}(u_2,\dots,u_n)$ et notons $(\lambda_2,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^{n-1}$ tel que $u_1 = \sum_{k=2}^n \lambda_k u_k$.

Par linéarité selon la première variable, on a :

$$\det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_n) = \sum_{k=2}^n \lambda_k \det_{\mathscr{B}}(u_k,u_2,\dots,u_n).$$

Par caractère alterné de l'application $\det_{\mathscr{B}}$, on conclut :

$$\det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_n) = 0.$$

11

Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de E.

Unicité. Si λ convient, alors on a :

$$\forall\,(u_1,\dots,u_n)\in E^n\ \det_{\mathscr{B}}\big(f(u_1),\dots,f(u_n)\big) = \lambda \det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_n)$$

et, en particulier, pour $(u_1,\dots,u_n)=\mathscr{B}$, on obtient $\lambda = \det_{\mathscr{B}}\big(f(e_1),\dots,f(e_n)\big)$.

Cela prouve l'unicité ainsi que le dernier résultat.

Existence.

— Par linéarité de f, l'application de E^n dans $\mathbb{K}$:

$$(u_1,\dots,u_n) \longmapsto \det_{\mathscr{B}}\big(f(u_1),\dots,f(u_n)\big)$$

est clairement linéaire par rapport à chaque variable et alternée ; elle est donc proportionnelle à $\det_{\mathscr{B}}$.

Par suite, il existe un scalaire λ tel que, pour tout $(u_1,\dots,u_n)\in E^n$, on ait :

$$\det_{\mathscr{B}}\big(f(u_1),\dots,f(u_n)\big) = \lambda \det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_n). \tag{$*$}$$

— Il reste à prouver que le scalaire λ ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ considérée.

Soit $\mathscr{B}'$ une base quelconque de E. L'application $\det_{\mathscr{B}'}$ est proportionnelle à $\det_{\mathscr{B}}$ et il existe donc un scalaire α tel que $\det_{\mathscr{B}'} = \alpha \det_{\mathscr{B}}$.

En multipliant la relation $(*)$ par α, on obtient, pour tout $(u_1,\dots,u_n)\in E^n$:

$$\det_{\mathscr{B}'}\big(f(u_1),\dots,f(u_n)\big) = \lambda \det_{\mathscr{B}'}(u_1,\dots,u_n),$$

ce qui prouve le résultat.

14

1. Notons $p = \dim(F)$. Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une base de F et $(e_{p+1},e_{p+2},\dots,e_n)$ une base de G. La famille $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ est une base de E et l'on a alors :

$$\begin{aligned}\det s &= \det_{\mathscr{B}}\big(s(e_1),\dots,s(e_n)\big)\\ &= \det_{\mathscr{B}}(e_1,\dots,e_p,-e_{p+1},\dots,-e_n) = (-1)^{n-p} = (-1)^{\dim G}.\end{aligned}$$

2. L'endomorphisme u est la symétrie de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ par rapport à $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et parallèlement à $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$. Comme $\dim \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$, la question précédente donne $\det(u) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

16

Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de E. On a :

$$\det f = \det_{\mathscr{B}}\big(f(e_1),\dots,f(e_n)\big).$$

Donc, d'après TRUC, le scalaire $\det f$ est non nul si et seulement si $\big(f(e_1),\dots,f(e_n)\big)$ est une base de E, c'est-à-dire si et seulement si f est un automorphisme de E.
TRUC permet alors d'écrire :

$$\det(f)\det\big(f^{-1}\big) = \det(\mathrm{Id}_E) = 1 \quad \text{et donc} \quad \det\big(f^{-1}\big) = (\det f)^{-1}.$$

19

Notons $(x_1,\dots,x_n)$ la famille $\mathscr{F}$.

— Tout d'abord, l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & \det\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n)\Big) \end{array}$ est bien définie.

— Ensuite, cette application est n-linéaire par

  — linéarité de l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ x & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \end{array}$

  — n-linéarité du déterminant.

— L'application φ est évidemment alternée : si deux vecteurs d'une famille $(x_1,\dots,x_n)$ sont égaux, les colonnes correspondantes de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n)$ sont égales et donc $\det \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n) = 0$.

— Enfin, $\varphi(\mathscr{B}) = \det I_n = 1$.

D'après...., $\varphi = \det_{\mathscr{B}}$, ce qui conclut.

20

En effet, si l'on note $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, D est la matrice de la famille $(\lambda_1 e_1,\dots,\lambda_n e_n)$ dans la base $\mathscr{B}$ et l'on a donc :

$$\det D = \det_{\mathscr{B}}(\lambda_1 e_1,\dots,\lambda_n e_n) = \Big(\prod_{i=1}^n \lambda_i\Big)\det_{\mathscr{B}}(e_1,\dots,e_n) = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

Supposons que M soit une matrice de transvection et fixons $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ distincts et $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $M = T_{i,j,\lambda}$. Notons $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
Alors, $\det M = \det_{\mathscr{B}}(e_1,\dots,e_j+\lambda e_i,\dots,e_n) = \det_{\mathscr{B}}(e_1,\dots,e_n)$.
Ainsi, $\det M = 1$.

21

Par définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base, on a :

$$\det A = \det \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \ = \ \det \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(e_1),\dots,f(e_n)\big) \ = \ \det_{\mathscr{B}}\big(f(e_1),\dots,f(e_n)\big) \ = \ \det f.$$

22

Soit f et g les endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associés à A et B.

— La matrice de λf dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est λA et l'on a :

$$\det(\lambda A) = \det(\lambda f) = \lambda^n \det f = \lambda^n \det A.$$

— La matrice de $f \circ g$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est AB et l'on a :

$$\det(AB) = \det(f \circ g) = \det f \det g = \det A \det B.$$

— On applique le résultat précédent :

$$\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}A)\det(P) = \det(P)\det(P^{-1}A) = \det(PP^{-1}A) = \det(A).$$

23

C'est une conséquence directe de ...... que l'on applique à l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à la matrice A.

24

— Si A n'est pas inversible, alors $A^\top$ n'est pas inversible et $\det A^\top = 0 = \det A$.

— Supposons A inversible. D'après ...., il existe $E_1, \dots, E_N$ des matrices d'opérations élémentaires telles que :

$$A = E_1 \cdots E_N$$

On a alors $A^\top = E_N^\top \cdots E_1^\top$ puis, par propriété multiplicative :

$$\det A = \det E_1 \cdots \det E_N \qquad \text{et} \qquad \det A^\top = \det E_N^\top \cdots \det E_1^\top$$

Pour conclure, il ne reste plus qu'à montrer le résultat sur les matrices d'opérations élémentaires. Fixons donc E une telle matrice :

  — si E est une matrice de dilatation ou d'échange, alors $E^T = E$ donc $\det E^T = \det E$;

  — si E est une matrice de transvection, alors $E^\top$ est aussi une matrice de transvection et d'après l'exemple ...., $\det E = 1 = \det E^\top$.

25

On a

$$\det(A) = \det(A^\top) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A),$$

28

— Comme le déterminant d'une matrice est égal au déterminant de sa transposée, il suffit de démontrer le résultat pour les matrices triangulaires supérieures.

— Si A est triangulaire supérieure, ...; nous donne :

$$\det A = a_{n,n} \det A',$$

où A' est la sous-matrice de A obtenue en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne. Le résultat est alors immédiat par récurrence.

29

On a :

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\
&= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix} && \text{(mise en facteur dans } L_2 \text{ et } L_3\text{)} \\
&= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & c-b \end{vmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\
&= (b-a)(c-a)(c-b). && \text{(déterminant d'une matrice triangulaire)}
\end{aligned}
$$

31

Notons $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de A. Fixons $j \in [\![1, n]\!]$.
Puisque $C_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, e_i$, la linéarité du déterminant par rapport à la $j^{\text{ème}}$ colonne donne :

$$
\begin{aligned}
\det A &= \det_{\mathscr{B}} \left(C_1, \ldots, C_{j-1}, \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, e_i, C_{j+1}, \ldots, C_n \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \underbrace{\det_{\mathscr{B}}(C_1, \ldots, C_{j-1}, e_i, C_{j+1}, \ldots, C_n)}_{:= D_{i,j}}.
\end{aligned}
$$

Pour conclure, prouvons que : $\forall\, i \in [\![1, n]\!]\, D_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$. Fixons $i \in [\![1, n]\!]$.
En effectuant les échanges suivants entre colonnes successives :

$$C_k \leftrightarrow C_{k+1} \quad \text{pour } k \text{ allant de } j \text{ à } n-1,$$

on obtient :

$$D_{i,j} = (-1)^{n-j} \det_{\mathscr{B}}(C_1, \ldots, C_{j-1}, C_{j+1}, \ldots, C_n, e_j).$$

En effectuant alors les échanges suivants entre lignes successives :

$$L_k \leftrightarrow L_{k+1} \quad \text{pour } k \text{ allant de } i \text{ à } n-1,$$

on obtient $D_{i,j} = (-1)^{n-j}(-1)^{n-i} \det(B) = (-1)^{i+j} \det(B)$, avec $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme :

$$dessin$$

où A' est la sous-matrice de A obtenue en supprimant sa $i^{\text{ème}}$ ligne et sa $j^{\text{ème}}$ colonne.
On a alors, d'après ......

$$\det(B) = \det(A') = \Delta_{i,j} \qquad \text{puis} \qquad D_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}.$$

D'où le résultat.

32

On développe par rapport à la colonne C_3 :

$$\begin{aligned}\det(xI_3 - A) &= \begin{vmatrix} x & 0 & -a \\ -1 & x & -b \\ 0 & -1 & x-c \end{vmatrix} \\ &= (x-c)\begin{vmatrix} x & 0 \\ -1 & x \end{vmatrix} - (-b)\begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + (-a)\begin{vmatrix} -1 & x \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= x^3 - cx^2 - bx - a.\end{aligned}$$

33

1. L'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1 + L_2$ puis la factorisation par $a+b+c$ dans L_3 donnent

$$A = (a+b+c)\begin{vmatrix} 2a & 2a & a-b-c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Les opérations $L_1 \leftarrow L_1 - 2aL_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - 2bL_3$ donnent :

$$A = (a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & -a-b-c \\ 0 & -a-b-c & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(a+b+c)^3 \text{ et (développement par rapport à } C_1).$$

2. Les opérations $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$, $C_1 \leftarrow C_1 - C_4$ puis la factorisation par $(a-b)$ dans C_1 et C_2 donnent :

$$\begin{aligned} B &= (a-b)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & c & b \\ 0 & 1 & b & c \\ 0 & -1 & a & c \\ -1 & 0 & c & a \end{vmatrix} \\ &= (a-b)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & c & b \\ 0 & 1 & b & c \\ 0 & 0 & a+b & 2c \\ 0 & 0 & 2c & a+b \end{vmatrix} \qquad \begin{aligned} &L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ &L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{aligned}\end{aligned}$$

En développant deux fois successivement par rapport à la première colonne, on obtient :

$$B = (a-b)^2\begin{vmatrix} a+b & 2c \\ 2c & a+b \end{vmatrix} = (a-b)^2(a+b+2c)(a+b-2c).$$

3. L'opération $C_1 \leftarrow C_1 - C_2 + C_3$ donne :

$$\begin{aligned} C &= 2\begin{vmatrix} a & b+c & c+a \\ a^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} && \begin{aligned}&C_1 \leftarrow C_1 - C_2 + C_3 \\ &\text{mise en facteur dans } C_1\end{aligned} \\ &= 2\begin{vmatrix} a & b+c & c \\ a^2 & b^2+c^2 & c^2 \\ a^3 & b^3+c^3 & c^3 \end{vmatrix} && C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ &= 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} && C_2 \leftarrow C_2 - C_3 \\ &= 2abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} && \text{factorisations par } a, b, c \text{ dans } C_1, C_2, C_3 \\ &= 2abc(b-a)(c-b)(c-a) \end{aligned}$$

4. Les opérations $L_3 \leftarrow L_3 - L_4$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_4$ donnent :

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -b^2 & a^2-c^2 & b^2 \\ 0 & a^2-b^2 & -c^2 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -b^2 & a^2-c^2 & b^2 \\ a^2-b^2 & -c^2 & c^2 \end{vmatrix} && \text{développement par rapport à } C_1 \\
&= -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2b^2 & a^2-c^2-b^2 & b^2 \\ a^2-b^2-c^2 & -2c^2 & c^2 \end{vmatrix} && \begin{array}{l} C_1 \leftarrow C_1 - C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_3 \end{array} \\
&= -\left(4b^2c^2 - (a^2-b^2-c^2)^2\right) && \text{développement par rapport à } L_1 \\
&= (a^2-b^2-c^2+2bc)(a^2-b^2-c^2-2bc) \\
&= (a^2-(b-c)^2)(a^2-(b+c)^2) \\
&= (a-b+c)(a+b-c)(a-b-c)(a+b+c).
\end{aligned}$$