

Déterminants

exercices



101 Un endomorphisme

Calculer le déterminant de l'endomorphisme

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_3[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P &\longmapsto XP'(X+2) + P(1)(X^3 - 1). \end{aligned}$$

102 Des endomorphismes

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $u \circ v + v \circ u = 0$, u est injectif et v surjectif. Montrer que n est pair.

103 Un cas particulier du déterminant a,b,c du 109

Calculer le déterminant suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

104 Tridiagonal (cas particulier du 110)

Soit $a \in \mathbb{C}$. Considérons le déterminant suivant (de taille n) :

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a \end{vmatrix}.$$

En exhibant une relation de récurrence vérifiée par D_n , montrer que $D_n = \begin{cases} \frac{r^{n+1} - s^{n+1}}{r - s} & \text{si } a^2 \neq 4 \\ (1+n)r^n & \text{sinon} \end{cases}$

où r et s sont des complexes à cerner.

105 Imbriqué

Soit $(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{K}^n$. Calculer le déterminant suivant :

$$D = \begin{vmatrix} s_1 & \dots & \dots & s_1 \\ \vdots & s_2 & \dots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{vmatrix}.$$

106 Avec des coefficients binomiaux

Soit $p, n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le déterminant $D_{n,p} = \begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p-1} \\ 1 & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+1}{p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \binom{n+p-1}{1} & \dots & \binom{n+p-1}{p-1} \end{vmatrix}.$

107 Par blocs

Calculer le déterminant de la matrice $A = \left[\begin{array}{c|c} 0_n & I_n \\ \hline -I_n & 0_n \end{array} \right] \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et le déterminant de taille $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \cos \theta & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 \cos \theta & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \cos \theta \end{vmatrix}$$

1. Déterminer Δ_1 et Δ_2 .
2. Soit $n \geq 3$. Montrer que $\Delta_n = 2 \cos \theta \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$.
3. En déduire alors Δ_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $n \geq 2$. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

On note $D(a, b, c)$ le déterminant de taille n suivant :

$$D(a, b, c) = \begin{vmatrix} a & c & \dots & c \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix}.$$

1. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto D(a+x, b+x, c+x).$$

Montrer que f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 1.
2. En déduire la valeur de $D(a, b, c)$ pour $b \neq c$.

Soient a, b, c des réels et Δ_n le déterminant de la matrice $n \times n$ suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \dots & 0 & c & a \end{vmatrix}.$$

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\Delta_{n+2} = a\Delta_{n+1} - bc\Delta_n$.
2. On suppose que $a^2 = 4bc$. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\Delta_n = \frac{(n+1)a^n}{2^n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $P_k = (X + z_k)^n$.

Calculer le déterminant de la famille $(P_0, \dots, P_n)$ dans la base canonique de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.

Déterminants classiques

112 Matrice compagnon

Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$.

On considère la matrice $C_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$ appelée matrice compagnon de P .

On fixe $x \in \mathbb{K}$.

Calculer le déterminant $\det(xI - C_P)$.

113 Déterminant de Vandermonde

Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$. On considère le déterminant de Vandermonde :

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

On veut montrer, de différentes façons, que

$$(\star) \quad V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

1. Que fournit cette formule pour $n = 2$ et $n = 3$?
2. En louchant sur la formule donner une condition nécessaire et suffisante d'annulation de ce déterminant. Faire une preuve (sans utiliser la formule).

On pourra penser à l'interpolation de Lagrange, c'est-à-dire à une certaine application linéaire $\Phi : \mathbb{K}_{n-1}[X] \rightarrow \mathbb{K}^n$.

3. En exploitant la relation :

$$(\diamond) \quad V(x_1, \dots, x_n) = V(x_1, \dots, x_{n-1}) \prod_{k=1}^{n-1} (x_n - x_k)$$

prouver la formule $(\star)$ par récurrence sur n .

4. Montrer $(\star)$ en faisant apparaître des 0 sur la première colonne.
5. Calculer $V(x_1, \dots, x_n)$ en considérant la fonction polynomiale $x \mapsto V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x)$ dont on déterminera les racines et son coefficient en x^{n-1} .

114 Déterminant circulant

Soient $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et $\omega = e^{2i\pi/n}$. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & & \alpha_{n-2} \\ & \alpha_{n-1} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ \alpha_2 & & & \ddots & \ddots & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_{n-1} & \alpha_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \dots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que Ω est inversible.
2. Calculer $A\Omega$ en fonction de ω et de $P = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$.
3. En déduire que $\det A = P(1)P(\omega) \dots P(\omega^{n-1})$.

4. Application : calculer pour $a \in \mathbb{C}$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ a^{n-1} & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ a^{n-2} & a^{n-1} & 1 & \dots & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & a^2 & \dots & a^{n-1} & 1 \end{vmatrix}.$$

115 Trois endomorphismes classiques

Soit E un espace vectoriel et u un endomorphisme de E .

Calculer $\det u$ et $\operatorname{tr} u$ dans chacun des cas suivants :

- i) $E = \mathbb{C}_n[X]$ et $u : P \mapsto P(X+1) - P(X)$.
- ii) $E = \mathbb{C}_n[X]$ et $u : P \mapsto P(X+1)$.
- iii) $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $u : M \mapsto M^\top$.

116 Matrice pleine de 1

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pleine de 1 en taille $n = 3$.

Pour $x \in \mathbb{K}$, calculer $\det(J - xI)$.

En déduire les $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $J - \lambda I$ soit non inversible.

117 Matrice de Gram

Soit E un espace préhilbertien réel et $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$. On pose $G \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad G_{i,j} = \langle e_i | e_j \rangle.$$

- 1. Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre si et seulement si G est inversible.
- 2. On suppose que $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et on note $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ la base orthonormée obtenue à partir de $\mathcal{B}$ par l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

On pose $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}$.

Montrer que P est triangulaire supérieure et que $G = P^\top P$.

- 3. En déduire que $0 < \det(G) \leq \prod_{i=1}^n \|e_i\|^2$.

118 Un peu de proba

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire ne prenant que $n \in \mathbb{N}^*$ valeurs différentes $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

Montrer que la connaissance des moments d'ordre i de X pour $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, à savoir $(\mathbf{E}(X^i))_{i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket}$ permet d'accéder à la loi de X .

Expliciter le cas $n = 2$.

Plus difficile

119 Déterminant d'une somme

Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$(\star) \quad \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \det(A + M) = \det A + \det M$$

120 Exotique

Soit $n \geq 2$ et $P \in \mathbb{C}_{n-2}[X]$. Montrer que le déterminant d'ordre n :

$$D = \begin{vmatrix} P(1) & P(2) & \dots & P(n) \\ P(2) & P(3) & \dots & P(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P(n) & P(n+1) & \dots & P(2n-1) \end{vmatrix}$$

est nul.

121 Densité des matrices inversibles

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients complexes. Montrer :

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad 0 < |\varepsilon| < \alpha, \quad A + \varepsilon I_n \text{ est inversible.}$$

On considèrera la fonction $x \mapsto \det(A + xI)$.

122 Avec des fonctions

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, stable par multiplication et de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Le but de l'exercice est de montrer que $F = \text{Vect}(\mathbf{1})$ où $\mathbf{1}$ est l'application constante égale à 1.

1. Montrer que $\text{Vect}(\mathbf{1}) \subset F$.
2. Soit $f \in F$. On suppose que f est une application non constante.
 - (a) Justifier qu'il existe deux réels α et β tels que $\alpha < \beta$ et $f([0, 1]) = [\alpha, \beta]$.
 - (b) Justifier qu'il existe des réels $x_1, \dots, x_{n+1} \in [0, 1]$ tels que $\alpha < f(x_1) < \dots < f(x_{n+1}) < \beta$.
 - (c) Montrer qu'il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ tel que $\lambda_0 \mathbf{1} + \lambda_1 f + \dots + \lambda_n f^n = 0$.
 - (d) Conclure.

Famille presque orthogonale

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.

Toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un même espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$.

I – Une loi de probabilité

On dit qu'une variable réelle X suit la loi $\mathcal{R}$ si

$$X(\Omega) = \{-1, 1\}, \quad \mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}.$$

1. Si X suit la loi $\mathcal{R}$, préciser la loi de la variable aléatoire $\frac{1}{2}(X + 1)$.
2. Calculer l'espérance et la variance d'une variable suivant la loi $\mathcal{R}$.
3. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, suivant chacune la loi $\mathcal{R}$. Déterminer la loi de leur produit XY .

II – Paramètre de cohérence

On considère $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de sa structure euclidienne usuelle, c'est-à-dire muni du produit scalaire défini par

$$\forall (u, v) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2, \quad \langle u | v \rangle = u^\top v.$$

On désigne par I un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ ayant au moins deux éléments et par $u = (u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs unitaires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

4. Montrer que le nombre réel

$$C(u) = \sup \{ |\langle u_i | u_j \rangle|, (i, j) \in I^2, i \neq j \}$$

existe et appartient à l'intervalle $[0, 1]$.

Le réel $C(u)$ s'appelle le *paramètre de cohérence* de la famille $(u_i)_{i \in I}$.

5. Montrer que si $C(u) = 0$, alors l'ensemble $\{u_i, i \in I\}$ est fini et donner un majorant de son cardinal.

III – Vecteurs aléatoires unitaires

Soient $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi $\mathcal{R}$.

On définit les vecteurs aléatoires, $X = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1, \dots, X_n)^\top$ et $Y = \frac{1}{\sqrt{n}}(Y_1, \dots, Y_n)^\top$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

6. Démontrer que, pour tout nombre réel t ,

$$\mathbb{E}(\exp(t\langle X | Y \rangle)) = \left(\text{ch} \left(\frac{t}{n} \right) \right)^n.$$

7. Montrer que, pour tout nombre réel t , $\ln(\text{ch}(t)) \leq \frac{t^2}{2}$.
8. En déduire que, pour tout nombre réel t ,

$$\mathbb{E}(\exp(t\langle X | Y \rangle)) \leq \exp \left(\frac{t^2}{2n} \right).$$

Soient σ et λ deux nombres réels strictement positifs et Z une variable aléatoire réelle telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}(\exp(tZ)) \leq \exp \left(\frac{\sigma^2 t^2}{2} \right).$$

9. En appliquant l'inégalité de Markov à une variable aléatoire bien choisie, montrer

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \mathbb{P}(Z \geq \lambda) \leq \exp \left(\frac{\sigma^2 t^2}{2} - \lambda t \right).$$

10. En déduire

$$\mathbb{P}(|Z| \geq \lambda) \leq 2 \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\right).$$

11. Soit $\varepsilon \in [0, 1]$. Montrer

$$\mathbb{P}(|\langle X | Y \rangle| \geq \varepsilon) \leq 2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{2}\right).$$

IV – Famille presque orthogonale

Soit $\varepsilon \in [0, 1]$. On se propose de démontrer que, pour tout entier naturel $N \leq \exp\left(\frac{\varepsilon^2 n}{4}\right)$, il existe une famille u de N vecteurs unitaires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $C(u) \leq \varepsilon$. On dit alors que u est une famille *presque orthogonale*.

Soient N un entier naturel non nul et $(X_j^i)_{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq n}$ une famille de $n \times N$ variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes de même loi $\mathcal{R}$.

Pour tout $i \in [1, N]$, on pose $X^i = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1^i, \dots, X_n^i)^\top$.

12. Déduire des questions précédentes que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{1 \leq i < j \leq N} |\langle X^i | X^j \rangle| \geq \varepsilon\right) \leq N(N-1) \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{2}\right).$$

13. En déduire que, pour tout entier naturel $N \leq \exp\left(\frac{\varepsilon^2 n}{4}\right)$, il existe une famille de N vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$ dont le paramètre de cohérence est majoré par ε .

Déterminants

corrigés

En ajoutant à la première colonne les autres colonnes et en factorisant, on obtient :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Puis, en retranchant la première colonne aux autres, on obtient :

$$D_n = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (n-1)(-1)^{n-1}$$

puisque le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des termes diagonaux.

Fixons $n \geq 3$ (confer plus loin pour comprendre).

En développant par rapport à la première ligne, on obtient :

$$D_n = aD_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a \end{vmatrix}.$$

En développant le second déterminant par rapport à la première colonne, on a :

$$D_n = aD_{n-1} - D_{n-2}.$$

De plus :

$$D_1 = a \text{ et } D_2 = a^2 - 1.$$

Résumons. On a donc

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, & D_{n+2} = aD_{n+1} - D_n \\ D_1 = a \\ D_2 = a^2 - 1 \end{cases}$$

Remarque anecdotique. Si l'on veut, on peut introduire D_0 , de sorte que la relation de récurrence soit vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, il faut poser $D_0 = 1$.

L'équation caractéristique $x^2 - ax + 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = a^2 - 4$.

Notons r et s les racines, éventuellement confondues, du polynôme $X^2 - aX + 1$.

• Cas $\Delta \neq 0$.

Alors $(D_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \text{Vect}((r^n)_{n \in \mathbb{N}^*}, (s^n)_{n \in \mathbb{N}^*})$.

Autrement dit, il existe λ, μ (ils sont même uniques) tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad D_n = \lambda r^n + \mu s^n$$

Déterminons λ et μ à l'aide des conditions initiales.

On a le petit système

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & s \\ r^2 & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} a \\ a^2 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & s \\ r^2 & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix}$$

La matrice ci-dessus est inversible (son déterminant est non nul car $r \neq s$!!) et on a

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \frac{1}{rs(s-r)} \begin{bmatrix} s^2 & -s \\ -r^2 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ a^2 - 1 \end{bmatrix}$$

Simplifions l'expression de λ et μ .

En regardant la solution fournie, on doit trouver

$$\lambda = \frac{r}{r-s} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{-s}{r-s}$$

Occupons-nous de λ (calcul similaire pour μ).

Il s'agit donc de montrer que $\frac{1}{rs}(s^2a - s(a^2 - 1)) = r$.

Les relations coefficients-racines fournissent $rs = 1$ et $r + s = a$.

En les exploitant, on obtient bien l'égalité annoncée.

Bilan dans ce cas. On a $D_n = \frac{r^{n+1} - s^{n+1}}{r - s}$.

• Cas $\Delta = 0$.

Je vous laisse montrer que, dans ce cas, $D_n = (1+n)r^n$.

Remarque. Les calculs ont été pénibles. Ceci est dû au fait que l'on a pris $n = 1$ et $n = 2$ comme valeurs initiales.

Essayons de voir ce que deviennent les calculs avec $n = 0$ et $n = 1$.

Déterminons λ et μ à l'aide des conditions initiales.

On a le petit système

$$\begin{bmatrix} D_0 \\ D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & s \\ r^2 & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix}$$

La matrice ci-dessus est inversible (son déterminant est non nul car $r \neq s$!!) et on a

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \frac{1}{s-r} \begin{bmatrix} s & -1 \\ -r & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$$

D'où

$$\lambda = \frac{1}{s-r}(s-a) \quad \text{et} \quad \mu = \frac{1}{s-r}(-r+a)$$

Comme $r+s=a$ (relation coefficients-racines), on a

$$\lambda = \frac{1}{s-r}(-r) \quad \text{et} \quad \mu = \frac{1}{s-r}s$$

On effectue successivement les opérations :

$$L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}, L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}, \dots, L_2 \leftarrow L_2 - L_1.$$

On obtient le déterminant triangulaire suivant :

$$D = \begin{pmatrix} s_1 & & & \\ & s_2 - s_1 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & s_n - s_{n-1} \end{pmatrix} = s_1 \prod_{k=2}^n (s_k - s_{k-1}).$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si l'on retranche la première colonne à chacune des autres colonnes, on obtient :

$$f(x) = \begin{vmatrix} a+x & c-a & \cdots & \cdots & c-a \\ b+x & a-b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c-a \\ b+x & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix}.$$

En utilisant la linéarité par rapport à la première colonne, on obtient :

$$f(x) = \begin{vmatrix} a & c-a & \cdots & \cdots & c-a \\ b & a-b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c-a \\ b & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & c-a & \cdots & \cdots & c-a \\ x & a-b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c-a \\ x & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix}.$$

Le premier déterminant ne dépend pas de x , notons-le α .

Le deuxième peut se réécrire, en utilisant la linéarité par rapport à la première colonne, sous la forme :

$$x \begin{vmatrix} 1 & c-a & \cdots & \cdots & c-a \\ 1 & a-b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c-a \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix}.$$

Il est donc de la forme βx où β est un réel indépendant de x .

On en déduit que $f(x) = D(a+x, b+x, c+x) = \alpha + x\beta$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Donc, f est bien une fonction polynomiale de degré au plus 1.

2. Ainsi, $D(a, b, c) = f(0)$. On va donc chercher à déterminer les valeurs de α et β définis précédemment. Remarquons que :

$$f(-c) = \begin{vmatrix} a-c & 0 & \cdots & 0 \\ b-c & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ b-c & \cdots & b-c & a-c \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant étant celui d'une matrice triangulaire, il est égal au produit des termes de la diagonale :

$$f(-c) = (a-c)^n.$$

De la même manière, $f(-b) = (a-b)^n$.

Il ne reste plus qu'à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha - \beta c = (a-c)^n \\ \alpha - \beta b = (a-b)^n. \end{cases}$$

On obtient, après résolution, comme $b \neq c$:

$$\alpha = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{(a-c)^n - (a-b)^n}{b-c}.$$

Cela nous donne finalement :

$$D(a, b, c) = f(0) = \alpha = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}.$$

Notons D le déterminant que l'on cherche à calculer. Par développement de P_k selon la formule du binôme de Newton, on obtient :

On notera que dans le cas où $z_0, \dots, z_n$ sont distincts deux à deux, $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

1. **Sens direct** Supposons que $(e_1, \dots, e_n)$ est libre.

Vérifions que G est inversible en montrant que la famille de ses colonnes $(C_1, \dots, C_n)$ est une famille libre.

Soit donc $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels tels que $\sum_{j=1}^n \lambda_j C_j = 0$.

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, en examinant le $i^{\text{ème}}$ coefficient des colonnes qui vaut $G_{i,j} = \langle e_i | e_j \rangle$, on a

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \langle e_i | e_j \rangle = 0$$

puis par bilinéarité du produit scalaire, $\langle e_i | \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \rangle = 0$.

On en déduit que :

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n) \cap \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)^\perp,$$

Or cette intersection est réduite au vecteur nul, d'où $\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j = 0$.

Par liberté de la famille $(e_1, \dots, e_n)$, on obtient $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Sens réciproque Supposons que G est inversible.

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels tels que $\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j = 0$.

En remontant les calculs précédents, on obtient $\sum_{j=1}^n \lambda_j C_j = 0$,

ce qui constitue une combinaison linéaire nulle de la famille des colonnes de la matrice inversible G .

On en déduit que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

2. — Par construction, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $e_j \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_j) = \text{Vect}(f_1, \dots, f_j)$, ce qui justifie que P est une matrice triangulaire supérieure.
- Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.

Que vaut le coefficient $p_{i,j}$ de P ?

Réponse : la coordonnée sur f_i du vecteur e_j .

Comme la famille $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ est orthonormée, on sait que cette coordonnée vaut $\langle e_j | f_i \rangle$.

Ainsi, $p_{i,j} = \langle e_j | f_i \rangle$.

On a alors

$$\text{coeff}_{i,j}(P^\top P) = \sum_{k=1}^n p_{k,i} p_{k,j} = \sum_{k=1}^n \langle e_i | f_k \rangle \langle e_j | f_k \rangle.$$

Or, pour deux vecteurs x et y , on a

$$\langle x | y \rangle = \sum_{k=1}^n \langle x | f_k \rangle \langle y | f_k \rangle$$

car la base orthonormée $(f_1, \dots, f_n)$.

En appliquant cette remarque à $x = e_i$ et $y = e_j$, on obtient

$$\text{coeff}_{i,j}(P^\top P) = \langle e_i | e_j \rangle.$$

On a donc montré que $\text{coeff}_{i,j}(P^\top P) = \text{coeff}_{i,j}(G)$.

D'où $P^\top P = G$.

3. Montrons l'inégalité de gauche.

D'après la question précédente, on a

$$\det(G) = \det(P^\top P) = \det(P^\top) \det(P) = \det(P)^2 \geq 0$$

La matrice G est inversible donc de déterminant non nul.

On a donc $\det(G) > 0$.

Montrons l'inégalité de droite.

Comme P est une matrice triangulaire, on a $\det(P)^2 = \prod_{j=1}^n (p_{j,j})^2 = \prod_{j=1}^n \langle e_j \mid f_j \rangle^2$.
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le caractère unitaire des vecteurs f_j , on a :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \langle e_j \mid f_j \rangle^2 \leq \|e_j\|^2.$$

Par produit d'inégalités dont les termes sont positifs, on en déduit :

$$\det(G) \leq \prod_{j=1}^n \|e_j\|^2.$$

Soit la fonction $P(x) = \det(A + xI)$.

P est un polynôme, il ne possède donc qu'un nombre fini de racines.

En particulier, il existe $\alpha > 0$ tel que P ne s'annule pas en x , pour $|x| < \alpha, x \neq 0$.

La caractérisation de l'inversibilité des matrices en fonction de la non-nullité des déterminants donne le résultat.

I – Une loi de probabilité

1. La variable $\frac{1}{2}(X + 1)$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
2. On peut faire un calcul direct.

D'après la définition de l'espérance, on a :

$$E(X) = -1 \cdot \mathbb{P}(X = -1) + 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) = 0$$

Avec le théorème de transfert, on a :

$$E(X^2) = (-1)^2 \cdot \mathbb{P}(X = -1) + 1^2 \cdot \mathbb{P}(X = 1) = 1$$

Donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1$.

Donc $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$.

Meilleure solution. En utilisant la question précédente.

Posons $Y = \frac{1}{2}(X + 1)$. On a donc $X = 2Y - 1$.

Par linéarité de l'espérance, on a $E(X) = 2E(Y) - 1$.

La variable aléatoire Y suit une loi de Bernoulli, donc on connaît son espérance, elle vaut $\frac{1}{2}$.

Ainsi, $E(X) = 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 0$.

Pour le calcul de $V(X)$, on utilise que $V(aY + b) = a^2V(Y)$, et le fait que $V(Y) = \frac{1}{4}$.

On trouve $V(X) = 1$.

3. Notons $Z = XY$. Alors Z prend les valeurs 1 et -1 . Calculons $\mathbb{P}(Z = 1)$.

On a l'égalité d'événements

$$(Z = 1) = (X = 1) \cap (Y = 1) \sqcup (X = -1) \cap (Y = -1)$$

Par additivité de $\mathbb{P}$, on obtient

$$\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) + \mathbb{P}(X = -1, Y = -1)$$

Puis par indépendance de X et Y , on a

$$\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(X = -1)\mathbb{P}(Y = -1) = \frac{1}{2}$$

Enfin, $\mathbb{P}(Z = -1) = 1 - \mathbb{P}(Z = 1) = \frac{1}{2}$.

Donc Z suit aussi la loi $\mathcal{B}$.

II – Paramètre de cohérence

4. Notons $E = \{|\langle u_i | u_j \rangle|, (i, j) \in I^2, i \neq j\}$.

Comme I a au moins deux éléments, E est non vide.

Soit $(i, j) \in I^2$ avec $i \neq j$.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en utilisant le fait que les vecteurs sont unitaires, on a :

$$|\langle u_i | u_j \rangle| \leq \|u_i\| \|u_j\| = 1.$$

Ainsi, E une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$.

Donc E admet une borne supérieure.

Comme $E \subset [0, 1]$, sa borne supérieure est dans $[0, 1]$.

5. Supposons que $C(u) = 0$.

Montrons que la famille u est orthogonale.

Pour tout $(i, j) \in I^2$ avec $i \neq j$, on a $|\langle u_i | u_j \rangle| \leq 0$, donc $\langle u_i | u_j \rangle = 0$.

La famille u est donc orthogonale et formée de vecteurs unitaires, donc elle est orthonormée.

Donc elle est libre.

C'est une famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie, en l'occurrence $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc cette famille est finie et de cardinal $\leq n$.

III – Vecteurs aléatoires unitaires

6. Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$\exp(t\langle X | Y \rangle) = \exp\left(\sum_{k=1}^n \frac{t}{n} X_k Y_k\right) = \prod_{k=1}^n \exp\left(\frac{t}{n} X_k Y_k\right).$$

Or, d'après le lemme des coalitions, les variables aléatoires $\exp\left(\frac{t}{n} X_1 Y_1\right)$ et $\prod_{k=2}^n \exp\left(\frac{t}{n} X_k Y_k\right)$ sont indépendantes donc :

$$E(\exp(t\langle X | Y \rangle)) = E\left(\exp\left(\frac{t}{n} X_1 Y_1\right)\right) E\left(\prod_{k=2}^n \exp\left(\frac{t}{n} X_k Y_k\right)\right)$$

Explication. Les variables $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \dots, X_n, Y_n$ sont mutuellement indépendantes.

Posons $f : (x_1, y_1) \mapsto \exp\left(\frac{t}{n} x_1 y_1\right)$ et $g : (x_2, y_2, \dots, x_n, y_n) \mapsto \prod_{k=2}^n \exp\left(\frac{t}{n} x_k y_k\right)$.

Le lemme des coalitions fournit que les variables $f(X_1, Y_1)$ et $g(X_2, Y_2, \dots, X_n, Y_n)$ sont indépendantes.

Or pour **deux** variables aléatoires indépendantes, l'espérance du produit est le produit des espérances.

Donc $E(f(X_1, Y_1) \times g(X_2, Y_2, \dots, X_n, Y_n)) = E(f(X_1, Y_1)) \times E(g(X_2, Y_2, \dots, X_n, Y_n))$.

Cela s'écrit encore

$$\prod_{k=1}^n \exp\left(\frac{t}{n} X_k Y_k\right) = E\left(\exp\left(\frac{t}{n} X_1 Y_1\right)\right) E\left(\prod_{k=2}^n \exp\left(\frac{t}{n} X_k Y_k\right)\right)$$

Par une récurrence immédiate, on obtient

$$E(\exp(t\langle X | Y \rangle)) = \prod_{k=1}^n E\left(\exp\left(\frac{t}{n} X_k Y_k\right)\right).$$

• Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Calculons $E\left(\exp\left(\frac{t}{n} X_k Y_k\right)\right)$.

La variable $X_k Y_k$ suit la loi $\mathcal{R}$ d'après 3, donc d'après le théorème de transfert, on a :

$$\begin{aligned} E\left(\exp\left(\frac{t}{n} X_k Y_k\right)\right) &= \mathbb{P}(X_k Y_k = 1) \exp\left(\frac{t}{n} \times 1\right) + \mathbb{P}(X_k Y_k = -1) \exp\left(\frac{t}{n} \times (-1)\right) \\ &= \frac{1}{2} \exp\left(\frac{t}{n}\right) + \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{t}{n}\right) \\ &= \text{ch}\left(\frac{t}{n}\right). \end{aligned}$$

• Revenons au calcul de $E(\exp(t\langle X | Y \rangle))$. Par produit, on a donc :

$$E(\exp(t\langle X | Y \rangle)) = \prod_{k=1}^n \text{ch}\left(\frac{t}{n}\right) = \left(\text{ch}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$$

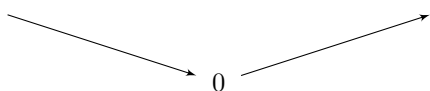
7. Posons $h : t \mapsto \frac{t^2}{2} - \ln(\text{ch}(t))$ et montrons que h est positive sur $\mathbb{R}$.

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$h' : t \mapsto t - \frac{\text{sh}(t)}{\text{ch}(t)}$$

Par inégalité de convexité (hum... à détailler, éventuellement mettre au même dénominateur et étudier le signe du numérateur), on obtient que h' est positive sur $\mathbb{R}^+$.

Et par imparité, h' est négative sur $\mathbb{R}^-$. D'où le tableau :

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(t)$	-	0	+
h			

Ainsi h est positive sur $\mathbb{R}$. On a donc montré

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \ln(\text{ch}(t)) \leq \frac{t^2}{2}$$

D'où par croissance de l'exponentielle,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

8. D'après la question 7, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\text{ch}\left(\frac{t}{n}\right) \leq \exp\left(\frac{(t/n)^2}{2}\right)$.

Comme les deux membres sont positifs, on obtient par croissance de la fonction puissance n sur $\mathbb{R}^+$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left(\text{ch}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \leq \left(\exp\left(\frac{t^2}{2n^2}\right)\right)^n = \exp\left(\frac{t^2}{2n}\right).$$

En appliquant la question 6, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}(\exp(t\langle X | Y \rangle)) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2n}\right).$$

9. L'inégalité est claire pour $t = 0$.

Supposons désormais $t > 0$.

Posons $T = \exp(tZ)$.

C'est une variable aléatoire positive, et qui admet une espérance finie par hypothèse.

On peut donc appliquer l'inégalité de Markov à T et au réel $\exp(\lambda t)$, on a :

$$\mathbb{P}(T \geq \exp(\lambda t)) \leq \frac{\mathbb{E}(T)}{\exp(\lambda t)}$$

En utilisant l'énoncé, à savoir $\mathbb{E}(T) \leq \exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$, on obtient

$$\mathbb{P}(T \geq \exp(\lambda t)) \leq \exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2} - \lambda t\right)$$

Or on a l'égalité d'événements :

$$(T \geq \exp(\lambda t)) = (tZ \geq \lambda t) = (Z \geq \lambda)$$

D'où

$$\mathbb{P}(Z \geq \lambda) \leq \exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2} - \lambda t\right).$$

10. Montrons

$$\mathbb{P}(|Z| \geq \lambda) \leq 2 \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\right).$$

On a

$$\mathbb{P}(|Z| \geq \lambda) = \mathbb{P}(Z \geq \lambda) + \mathbb{P}(-Z \geq \lambda)$$

Posons $U = -Z$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tU) = \exp((-t)Z)$ admet une espérance finie et

$$\mathbb{E}(\exp(tU)) = \mathbb{E}(\exp((-t)Z)) \leq \exp\left(\frac{\sigma^2 (-t)^2}{2}\right).$$

On peut donc appliquer la question 9 appliquée à la variable U , et on a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \mathbb{P}(U \geq \lambda) \leq \exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2} - \lambda t\right).$$

Puis,

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \mathbb{P}(|Z| \geq \lambda) = \mathbb{P}(Z \geq \lambda) + \mathbb{P}(U \geq \lambda) \leq 2 \exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2} - \lambda t\right).$$

On cherche alors t de sorte que : $\frac{\sigma^2 t^2}{2} - \lambda t = -\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}$

ou encore $0 = \frac{\sigma^2 t^2}{2} - \lambda t + \frac{\lambda^2}{2\sigma^2} = \left(\frac{\sigma t}{\sqrt{2}} - \frac{\lambda}{\sigma\sqrt{2}}\right)^2$.

On pose donc $t = \frac{\lambda}{\sigma^2} \in \mathbb{R}^+$ et on obtient :

$$\mathbb{P}(|Z| \geq \lambda) \leq 2 \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\right).$$

11. On pose $Z = \langle X \mid Y \rangle$.

C'est une variable aléatoire réelle et pour tout $t \in \mathbb{R}$, d'après la question 8, en posant $\sigma = \frac{1}{\sqrt{n}}$, on a bien

$$\mathbb{E}(\exp(tZ)) \leq \exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right).$$

On prend alors $\epsilon \in [0, 1]$.

Si $\epsilon = 0$, l'inégalité demandée est évidente, sinon on applique la question 10 en prenant $\lambda = \epsilon$:

$$\mathbb{P}(|\langle X \mid Y \rangle| \geq \epsilon) \leq 2 \exp\left(-\frac{\epsilon^2 n}{2}\right).$$

IV – Famille presque orthogonale

12. Par sous-additivité :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{1 \leq i < j \leq N} |\langle X^i \mid X^j \rangle| \geq \epsilon\right) \leq \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mathbb{P}(|\langle X^i \mid X^j \rangle| \geq \epsilon).$$

D'après la question 11, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$, comme $X_1^i, \dots, X_n^i, Y_1^j, \dots, Y_n^j$ sont mutuellement indépendantes et de même loi $\mathcal{R}$, on a

$$\mathbb{P}(|\langle X^i \mid X^j \rangle| \geq \epsilon) \leq 2 \exp\left(-\frac{\epsilon^2 n}{2}\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{1 \leq i < j \leq N} |\langle X^i \mid X^j \rangle| \geq \epsilon\right) &\leq \sum_{1 \leq i < j \leq N} 2 \exp\left(-\frac{\epsilon^2 n}{2}\right) = 2 \exp\left(-\frac{\epsilon^2 n}{2}\right) \sum_{j=2}^N \sum_{i=1}^{j-1} 1 \\ &= 2 \exp\left(-\frac{\epsilon^2 n}{2}\right) \sum_{j=1}^{N-1} j \\ &= 2 \exp\left(-\frac{\epsilon^2 n}{2}\right) \frac{N(N-1)}{2} \end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{1 \leq i < j \leq N} |\langle X^i \mid X^j \rangle| \geq \epsilon\right) \leq N(N-1) \exp\left(-\frac{\epsilon^2 n}{2}\right).$$

13. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \leq \exp\left(\frac{\epsilon^2 n}{4}\right)$. Alors $n \geq \frac{4 \ln(N)}{\epsilon^2}$ et ainsi $-\frac{\epsilon^2 n}{2} \leq -2 \ln(N)$.

Par croissance de l'exponentielle :

$$N(N-1) \exp\left(-\frac{\epsilon^2 n}{2}\right) \leq N(N-1) \exp(-2 \ln(N)) = \frac{N(N-1)}{N^2} < 1.$$

D'après la question précédente :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{1 \leq i < j \leq N} |\langle X^i \mid X^j \rangle| \geq \epsilon\right) \leq N(N-1) \exp\left(-\frac{\epsilon^2 n}{2}\right) < 1.$$

On en déduit

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leq i < j \leq N} |\langle X^i \mid X^j \rangle| < \epsilon\right) > 0.$$

Ainsi, $\bigcap_{1 \leq i < j \leq N} |\langle X^i \mid X^j \rangle| < \epsilon$ est non vide :

il existe au moins un $\omega \in \bigcap_{1 \leq i < j \leq N} |\langle X^i \mid X^j \rangle| < \epsilon$.

Posons $u_i = X^i(\omega)$ pour tout $1 \leq i \leq N$. Alors par définition, $\boxed{C(u) < \epsilon}$.