Fonctions de deux variables

31c-Fonctions2Variables.pdf, 12 juin 2023, 8:05

I. Fonctions continues sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$

Ouverts de $\mathbb{R}^2$

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne canonique :

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\| : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & \sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}. \end{array}$$

1 **Définition (boule ouverte de $\mathbb{R}^n$).**
Soit $p \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. On appelle *boule ouverte* de *centre* p et de *rayon* r la partie :

$$B(p,r) = \left\{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \|\xi - p\| < r\right\}.$$

Ce chapitre considérera exclusivement le cas $n = 2$. Dans ce cas, la boule ouverte $B(p,r)$ est appelée *disque ouvert* de centre p et de rayon r, et notée $D(p,r)$.

2 **Définition (ouvert de $\mathbb{R}^2$).**
Soit U une partie de $\mathbb{R}^2$. On dit que U est un *ouvert* de $\mathbb{R}^2$ lorsque :

$$\forall\, p \in U, \quad \exists\, r > 0, \quad D(p,r) \subset U.$$

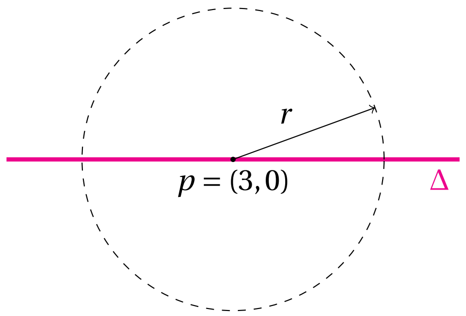
3 sol → 19
Exemples.

(i) Le demi-plan $H = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\right\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

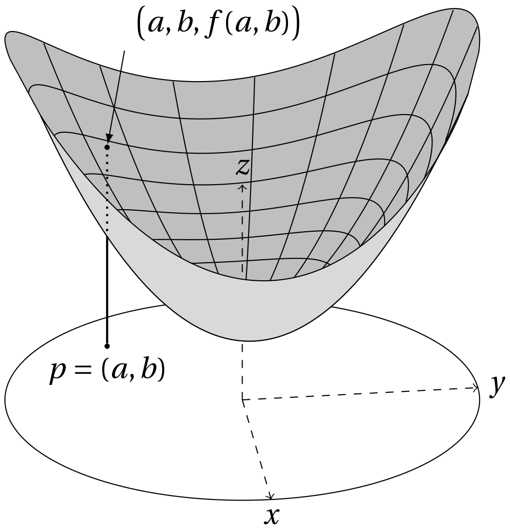
(ii) Le disque unité ouvert $D = D\left(0_{\mathbb{R}^2}, 1\right)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

(iii) La droite $\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\right\}$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

(iv) Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, disons $I =]\alpha,\beta[$ (avec $\alpha,\beta \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$).
Alors $U = I \times \mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.



Fonctions continues



Dans toute cette section, U désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$. Étant donné une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ et un point $p = (a,b) \in U$, on notera indifféremment $f(p)$ ou $f(a,b)$ la valeur de f en ce point.
On peut représenter graphiquement une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ par son *graphe* :

$$\Gamma_f \;=\; \Big\{ \big(x, y, f(x,y)\big) \mid (x,y) \in U \Big\},$$

qui est une partie de $U \times \mathbb{R}$, et donc de $\mathbb{R}^3$.

4 **Définition.** Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction et $p = (a,b) \in U$.

— On dit que la fonction f est *continue en p* lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall \xi \in U, \quad \Big(\|\xi - p\| \leqslant \eta \implies \big|f(\xi) - f(p)\big| \leqslant \varepsilon \Big).$$

— On dit que f est *continue* sur U lorsqu'elle est continue en tout point de U.

- On dit que la fonction f tend vers 0 quand ξ tend vers $p \in U$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall \xi \in U, \quad \Big(\|\xi - p\| \leqslant \eta \implies \big|f(\xi)\big| \leqslant \varepsilon \Big).$$

  On note $f(\xi) \xrightarrow[\xi \to p]{} 0$.
  Comme $p \in U$, on peut montrer (à vous) que cela impose $f(p) = 0$ (et donc la continuité de f en p).

5 sol → 19 **Exemples.**

1. Montrer à la main que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x - 2y. \end{array}$ est continue.
2. **From 1 to 2 variables!**
   Soit $\theta \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer à la main que $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \theta(x). \end{array}$ est continue.

Opérations

La définition de la continuité pour les fonctions de deux variables étant le calque de celle vue pour les fonctions d'une variable réelle, on obtient les mêmes théorèmes généraux concernant les opérations avec essentiellement les mêmes démonstrations. On montre notamment que la somme, le produit et, si le dénominateur ne s'annule pas, le quotient de deux fonctions continues définies sur U sont continus.

- Montrons que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^3 + y. \end{array}$ est continue.
  Les fonctions $(x,y) \mapsto x^3$ et $(x,y) \mapsto y$ sont continues (WHY).
  Par somme de ces deux fonctions, la fonction f est continue.
- Redémontrons efficacement que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x - 2y. \end{array}$ est continue.

Composition

Énonçons les résultats concernant les trois façons de composer une fonction de deux variables et une ou plusieurs fonction(s) d'une variable.
Ci-dessous, la lettre I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial, les lettres U et V des ouverts non vides de $\mathbb{R}^2$.

6 **Proposition (composition à gauche).**
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ à valeurs dans I.
Soit $\psi : I \to \mathbb{R}$.
On a :

$$\begin{cases} f \text{ continue en } p \in U \\ \psi \text{ continue en } f(p) \end{cases} \implies \psi \circ f \text{ continue en } p.$$

$$\text{où } \psi \circ f : \begin{array}{rcl} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \xi & \longmapsto & \psi\big(f(\xi)\big) \end{array}$$

7 **Proposition (composition à droite, 1 variable).**
Soit γ_1 et γ_2 deux fonctions définies sur I telles que $\Gamma : t \mapsto \big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big)$ soit à valeurs dans U.
Soit $f : U \to \mathbb{R}$.
On a :

$$\begin{cases} \gamma_1 \text{ et } \gamma_2 \text{ continues en } t_0 \in I \\ f \text{ continue en } \Gamma(t_0) \end{cases} \implies f \circ \Gamma \text{ continue en } t_0.$$

$$\text{où } f \circ \Gamma : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f\big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big) \end{array}$$

8 **Proposition (composition à droite, 2 variables).**
Soit φ_1 et φ_2 deux fonctions définies sur V telles que $\Phi : \xi \mapsto \big(\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi)\big)$ soit à valeurs dans U.
Soit $f : U \to \mathbb{R}$.
On a :

$$\begin{cases} \varphi_1 \text{ et } \varphi_2 \text{ continues en } p \in V \\ f \text{ continue en } \Phi(p) \end{cases} \implies f \circ \Phi \text{ continue en } p.$$

$$\text{où } f \circ \Phi : \begin{array}{rcl} V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \xi & \longmapsto & f\big(\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi)\big) \end{array}$$

9 **Exemples très importants.**
Soif $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Montrer que les fonctions suivantes sont continues.

$$f_0 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \exp\big(f(x,y)\big) \end{array} \qquad f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t^2, t^3) \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{rcl}]0,+\infty[\times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (r,\theta) & \longmapsto & f(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

La fonction de PCSI 3

10 **Proposition.** La fonction

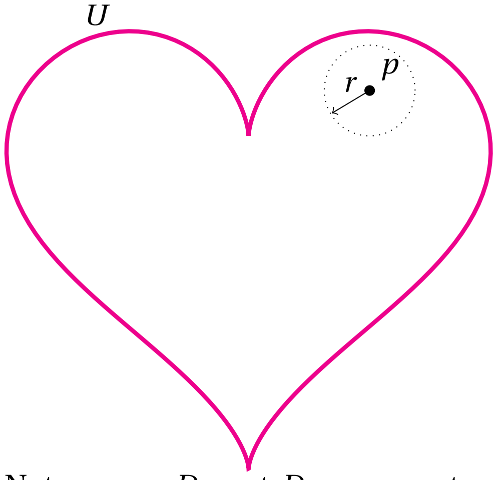
$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{array}$$

— est continue sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
— mais n'est pas continue en $(0,0)$

II. Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Dérivées partielles

Soit $p=(a,b)\in U$. Comme U est ouvert, on peut trouver $r>0$ tel que $D(p,r)\subset U$.



On considère les ensembles :

$$D_{1,p}=\{x\in\mathbb{R}\mid(x,b)\in U\}\qquad\text{et}\qquad D_{2,p}=\{y\in\mathbb{R}\mid(a,y)\in U\}$$

et les *applications partielles* :

$$f_{1,p}:\begin{array}{ccc}D_{1,p}&\longrightarrow&\mathbb{R}\\ x&\longmapsto&f(x,b)\end{array}\qquad\text{et}\qquad f_{2,p}:\begin{array}{ccc}D_{2,p}&\longrightarrow&\mathbb{R}\\ y&\longmapsto&f(a,y)\end{array}$$

On a alors les inclusions :

$$]a-r,a+r[\subset D_{1,p}\qquad\text{et}\qquad]b-r,b+r[\subset D_{2,p}.$$

Notons que $D_{1,p}$ et $D_{2,p}$ peuvent ne pas être des intervalles, mais que cela n'a guère d'importance puisque la discussion est ici locale : seul ce qui se passe au voisinage de $a\in D_{1,p}$ et $b\in D_{2,p}$ nous intéresse.

11 **Définition (dérivée partielle en un point).**
Soit $p=(a,b)\in U$.

— Si l'application partielle $f_{1,p}$ est dérivable en a, on dit que f admet une *première dérivée partielle* au point $p=(a,b)$ et l'on pose :

$$\partial_1 f(a,b)\;=\;f'_{1,p}(a).$$

— Si l'application partielle $f_{2,p}$ est dérivable en b, on dit que f admet une *deuxième dérivée partielle* au point $p=(a,b)$ et l'on pose :

$$\partial_2 f(a,b)\;=\;f'_{2,p}(b).$$

- **Notation.** On utilise en pratique une notation plus parlante.
  Pour une fonction f de deux variables dont on note (x,y) les variables,
  on note plutôt $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ le réel $\partial_1 f(a,b)$.
  On s'adapte aux noms des variables apparaissant dans la définition de f.
  Cette notation est potentiellement ambiguë, car les variables apparaissant dans la définition de f sont en fait des variables muettes, mais elle ne pose guère de problème à l'usage.
- **Exemple.** Soit $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2&\longrightarrow&\mathbb{R}\\ (r,\theta)&\longmapsto&r\cos\theta\end{array}$

  Montrons que f admet des dérivées partielles en tout $\boxed{\text{point}}$ de $\mathbb{R}^2$.

  Fixons un $\boxed{\text{point}}$ $p=(r_0,\theta_0)\in\mathbb{R}^2$.

  Considérons la première application partielle $\boxed{\text{en ce point } p=(r_0,\theta_0)}$, c'est-à-dire $f_{1,p}:r\mapsto r\cos\theta_0$.

  Cette fonction $f_{1,p}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'_{1,p}:r\mapsto\cos\theta_0$.

  Donc $f_{1,p}$ est dérivable $\boxed{\text{au point } r_0}$ et on a $f'_{1,p}(r_0)=\cos\theta_0$.

  Ainsi f admet une première dérivée partielle $\boxed{\text{au point } p=(r_0,\theta_0)}$ et on a $\dfrac{\partial f}{\partial r}(r_0,\theta_0)\;=\;\cos\theta_0$

  De même, f admet une seconde dérivée partielle au point $p=(r_0,\theta_0)$ et on a $\dfrac{\partial f}{\partial\theta}(r_0,\theta_0)\;=\;\ldots\ldots\ldots\ldots$

12 **Exemple.** On considère la fonction (affine) définie sur $U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\right\}$ par

$$f: \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 9x+8y+7. \end{array}$$

Montrons que f admet des dérivées partielles en tout point de U.
Soit $p=(x_0,y_0) \in U$.
Les applications partielles de f en ce point sont :

$$f_{1,p}: \begin{array}{ccc} \dots & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dots \end{array} \qquad \text{et} \qquad f_{2,p}: \begin{array}{ccc} \dots & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \dots \end{array}$$

Ces fonctions sont dérivables sur leur ensemble de définition et on a

$$f'_{1,p}: \begin{array}{ccc} \dots & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dots \end{array} \qquad \text{et} \qquad f'_{2,p}: \begin{array}{ccc} \dots & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \dots \end{array}$$

En particulier, au point $p=(x_0,y_0)$, on a

$$f'_{1,p}(x_0) = \dots \qquad \text{et} \qquad f'_{2,p}(y_0) = \dots$$

Cela signifie que f admet des dérivées partielles au point p et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \dots \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \dots$$

Bonus. Ceci étant vrai pour tout point $p=(x_0,y_0) \in U$, on en déduit que f admet des dérivées partielles sur U et qu'elles sont données par :

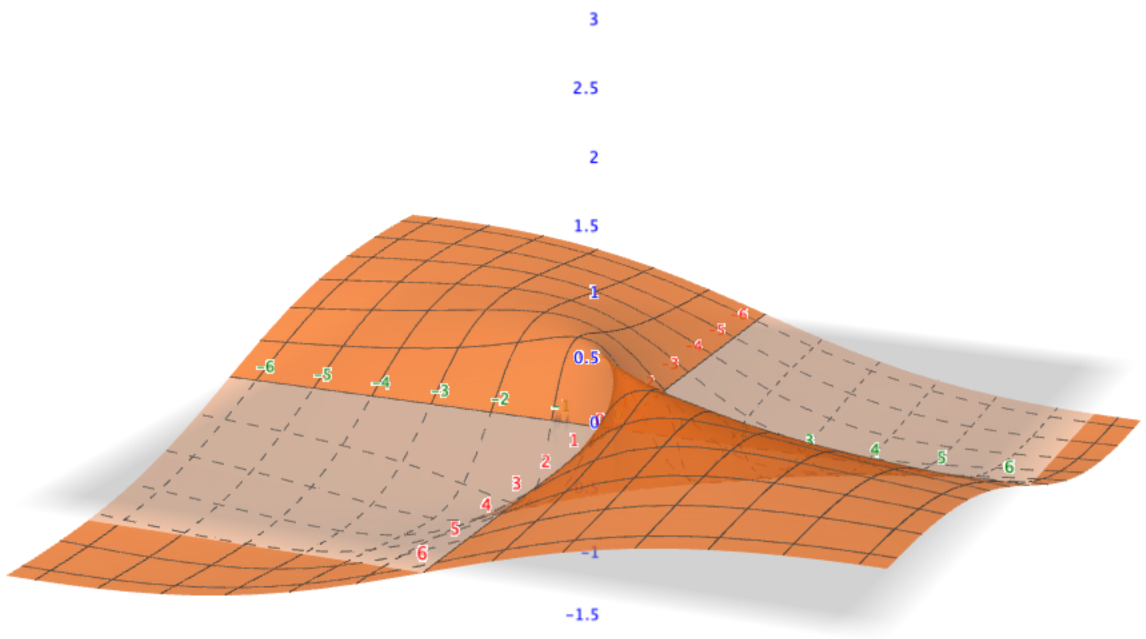
$$\frac{\partial f}{\partial x}: \begin{array}{ccc} \dots & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \dots & \longmapsto & \dots \end{array} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}: \begin{array}{ccc} \dots & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \dots & \longmapsto & \dots \end{array}$$

13 preuve

Proposition.
La fonction de PCSI 3

$$f: \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{array}$$

admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.



14 **Attention.** L'existence des dérivées partielles, même en tout point, n'entraîne pas la continuité.

15 preuve **Question.** Considérons l'ouvert $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ et la fonction $f: \begin{array}{ccl} H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^y \end{array}$

Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point de H.

16

Proposition (somme et produit).
Soit f et g deux fonctions de U dans $\mathbb{R}$, et $p \in U$.

— Si f et g admettent des dérivées partielles en p, alors $f+g$ également, et on a :

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial x}(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p) + \frac{\partial g}{\partial x}(p) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial(f+g)}{\partial y}(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p) + \frac{\partial g}{\partial y}(p).$$

— Si f et g admettent des dérivées partielles en p, alors fg également, et on a :

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x}(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p)\,g(p) + f(p)\,\frac{\partial g}{\partial x}(p) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial(fg)}{\partial y}(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p)\,g(p) + f(p)\,\frac{\partial g}{\partial y}(p).$$

Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Si la fonction f admet des dérivés partielles en tout point de U, on peut considérer ses dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ comme des fonctions définies sur U.

17 **Définition.** La fonction f est dite *de classe* $\mathscr{C}^1$ sur U lorsqu'elle admet des dérivées partielles en tout point de U et que les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur U.

On note $\mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ ou, plus simplement, $\mathscr{C}^1(U)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ définies sur U.

- **Exemple affine.**

  On considère la fonction (affine) définie sur $U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\right\}$ par

$$f : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 9x+8y+7. \end{array}$$

  La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

  Preuve. La fonction f admet des dérivées partielles en tout point de U (cf. exemple précédent).
  Ces fonctions dérivées partielles sont les suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \ldots\ldots \end{array} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \ldots\ldots \end{array}$$

  et elles sont continues (WHY ?).

- **From 1 to 2 variables!**

  Soit $\theta \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ où I est un intervalle ouvert. Soit J un autre intervalle ouvert.
  La fonction $g : \begin{array}{ccc} I \times J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \theta(x). \end{array}$ est de classe $\mathscr{C}^1$.

  Fixons $p = (x_0, y_0) \in I \times J$.
  Les applications partielles de g en ce point sont :

$$g_{1,p} : \begin{array}{ccc} \ldots\ldots & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ldots\ldots \end{array} \qquad \text{et} \qquad g_{2,p} : \begin{array}{ccc} \ldots\ldots & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \ldots\ldots \end{array}$$

  Ces fonctions sont dérivables sur leur ensemble de définition et on a

$$g'_{1,p} : \begin{array}{ccc} \ldots\ldots & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ldots\ldots \end{array} \qquad \text{et} \qquad g'_{2,p} : \begin{array}{ccc} \ldots\ldots & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \ldots\ldots \end{array}$$

  En particulier, au point $p = (x_0, y_0)$, on a

$$g'_{1,p}(x_0) = \ldots\ldots \qquad \text{et} \qquad g'_{2,p}(y_0) = \ldots\ldots$$

  Cela signifie que g admet des dérivées partielles au point p et on a :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = \ldots\ldots \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = \ldots\ldots$$

  Ceci étant vrai pour tout point $p = (x_0, y_0) \in I \times J$, on en déduit que g admet des dérivées partielles sur $I \times J$ et qu'elles sont données par :

$$\frac{\partial g}{\partial x} : \begin{array}{ccc} \ldots\ldots & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \ldots\ldots & \longmapsto & \ldots\ldots \end{array} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial g}{\partial y} : \begin{array}{ccc} \ldots\ldots & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \ldots\ldots & \longmapsto & \ldots\ldots \end{array}$$

  Ces fonctions $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$ sont continues sur .... (WHY ?).
  Donc $g \in \mathscr{C}^1(I \times J, \mathbb{R})$.

- **Exemple x^y.** Considérons l'ouvert $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ et la fonction $f : \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^y \end{array}$

  La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur H.

  On a montré que f admet en tout point de H des dérivées partielles.
  Ainsi, f possède des fonctions dérivées partielles définies sur H :

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \ldots\ldots \end{array} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} : \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \ldots\ldots \end{array}$$

  Ces fonctions sont continues sur H (WHY).
  Donc la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$.

- **La fonction de PCSI 3.** $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases} \end{array}$

  On a montré que f possède des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
  Ainsi, f possède des fonctions dérivées partielles définies sur $\mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \ldots\ldots \end{array} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \ldots\ldots \end{array}$$

  La dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$ (idem pour l'autre dérivée partielle).
  La fonction f n'est donc pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
  En revanche, on peut montrer (comment ?) qu'elle l'est sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (qui est bien un ouvert).

18 **Théorème (Développement limité à l'ordre 1).**
Soit $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ et $p=(a,b)\in U$.
Il existe alors une fonction $\varepsilon : U \to \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon(\xi) \xrightarrow[\xi\to p]{} 0$ et :

$$\forall (x,y)\in U, \qquad f(x,y) \;=\; f(a,b) \;+\; (x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \;+\; (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \;+\; \varepsilon(x,y)\,\|(x,y)-(a,b)\|.$$

- **Plan tangent.** Le théorème précédent affirme que la fonction affine :

$$(x,y) \longmapsto f(a,b) \;+\; \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,(x-a) \;+\; \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,(y-b)$$

approche au premier ordre la fonction f au voisinage du point (a,b).
En particulier, le plan d'équation :

$$z \;=\; f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,(y-b),$$

qui est le graphe de cette fonction affine, est le *plan tangent* du graphe de la fonction f en (a,b), c'est-à-dire de la surface d'équation $z=f(x,y)$.

- **Se ramener en** 0.
En notant $U_p=\{\xi-p \mid \xi\in U\}$, on peut réécrire l'égalité du théorème sous la forme :

$$\forall (h,k)\in U_p, \qquad f(a+h,b+k) \;=\; f(a,b) \;+\; \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,h \;+\; \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,k \;+\; \varepsilon(h,k)\,\|(h,k)\|,$$

où $\varepsilon : U_p \to \mathbb{R}$ est une fonction telle que $\varepsilon(\xi) \xrightarrow[\xi\to 0]{} 0$.

- **Avec petit o.** Au voisinage de (a,b) :

$$f(x,y) \;=\; f(a,b) \;+\; \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,(x-a) \;+\; \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,(y-b) \;+\; \mathrm{o}\big(\|(x,y)-(a,b)\|\big).$$

ou encore au voisinage de $(0,0)$:

$$f(a+h,b+k) \;=\; f(a,b) \;+\; \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,h \;+\; \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,k \;+\; \mathrm{o}\big(\|(h,k)\|\big).$$

à mettre en parallèle, pour une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ d'une seule variable :
au voisinage de a :

$$g(x) \;=\; g(a) \;+\; g'(a)(x-a) \;+\; \mathrm{o}\big(|x-a|\big)$$

ou encore au voisinage de 0 :

$$g(a+h) \;=\; g(a) \;+\; g'(a)h \;+\; \mathrm{o}\big(|h|\big)$$

19 preuve **Proposition.** Soit $f\in\mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$. Alors f est continue.

20 **Proposition.** Soit $f,g\in\mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$.
Alors la somme $f+g$ et le produit fg sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.

- L'ensemble $\mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^U$, qui est par ailleurs stable par multiplication.

Gradient

21 **Définition.** Soit $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$.
Le *gradient* de f est l'application :

$$\begin{array}{rccl} \nabla f : & U & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (a,b) & \longmapsto & \nabla f(a,b) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b),\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right). \end{array}$$

- **Champ de vecteurs.**
Géométriquement, $\nabla f(a,b) \in \mathbb{R}^2$ est le vecteur du plan dont les coordonnées sont $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$. Le gradient est alors un *champ de vecteurs*, c'est-à-dire une application dont les valeurs sont des vecteurs.
- **Exemple.** Considérons la fonction affine

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & 9x+8y+7. \end{array}$$

Son gradient est l'application :

On peut alors réécrire la fonction sous la forme

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \xi & \longmapsto & \langle \nabla f(0,0) \,|\, \xi \rangle \ + \ f(0,0) \end{array}$$

Le gradient (ou plutôt, son unique valeur) joue donc pour les fonctions affines $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ le rôle du coefficient directeur d'une fonction affine $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Disons que pour $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ affine, on a :

$$\begin{array}{rccl} g : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \xi & \longmapsto & g'(0)\xi \ + \ g(0) \end{array}$$

- **Réécriture du développement limité à l'ordre** 1.
Soit $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ et $p \in U$.
Il existe alors une fonction $\varepsilon : U \to \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon(\xi) \xrightarrow[\xi \to p]{} 0$ et

$$\forall \xi \in U, \qquad f(\xi) \ = \ f(p) \ + \ \langle \nabla f(p) \,|\, \xi - p \rangle \ + \ \mathrm{o}\big(\|\xi - p\|\big)$$

ou encore, avec d'autres notations, en écrivant $p = (x_0, y_0)$, on a :

$$\forall (x,y) \in U, \qquad f(x,y) \ = \ f(x_0,y_0) \ + \ \Big\langle \nabla f(x_0,y_0) \ \Big| \ (x-x_0, y-y_0) \Big\rangle \ + \ \mathrm{o}\big(\|(x-x_0, y-y_0)\|\big)$$

à mettre en parallèle, pour une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ d'une seule variable :

$$\forall x \in I, \quad g(x) \ = \ g(x_0) \ + \ g'(x_0)(x-x_0) \ + \ \mathrm{o}\big(|x-x_0|\big)$$

III. Dérivation des fonctions composées

- **Rappel important.** Pour des fonctions d'une variable :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ à valeurs dans J.
Soit $g : J \to \mathbb{R}$.

Si $\begin{cases} f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } I \text{ à valeurs dans } J \\ g \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } J \end{cases}$ *alors $g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et*

$$\forall a \in I, \quad (g \circ f)'(a) = g'\big(f(a)\big)\, f'(a)$$

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$$

Composition avec une fonction d'une variable

22 preuve

Proposition.
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ à valeurs dans I.
Soit $\psi : I \to \mathbb{R}$.

Si $\begin{cases} f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } U \text{ à valeurs dans } I \\ \psi \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } I \end{cases}$ alors $\psi \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et

$$\forall p \in U, \quad \frac{\partial(\psi \circ f)}{\partial x}(p) = \psi'\big(f(p)\big)\frac{\partial f}{\partial x}(p) \quad \text{et} \quad \frac{\partial(\psi \circ f)}{\partial y}(p) = \psi'\big(f(p)\big)\frac{\partial f}{\partial y}(p).$$

- En utilisant pour ψ la fonction inverse, on obtient par exemple que l'inverse d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ qui ne s'annule pas est encore de classe $\mathscr{C}^1$.
- D'après la propriété 20 pour le produit, on en déduit que si f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ et si g ne s'annule pas, alors le quotient f/g est encore de classe $\mathscr{C}^1$.

23 sol → 21

Question. Montrer que la norme $N : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \sqrt{x^2 + y^2} \end{array}$ n'admet pas de dérivées partielles en $(0,0)$, mais que sa restriction à $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est de classe $\mathscr{C}^1$.
Donner ses dérivées partielles.

24
preuve

Proposition (composition à droite, 1 variable).
Soit γ_1 et γ_2 deux fonctions définies sur I telles que $\Gamma : t \mapsto \big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big)$ soit à valeurs dans U.
Soit $f : U \to \mathbb{R}$.
On a :

$$\begin{cases} \gamma_1 \text{ et } \gamma_2 \text{ de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } I \\ f \text{ de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } U \end{cases} \implies f \circ \Gamma \text{ de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } I$$

et dans ce cas :

$$\forall\, t \in I, \quad (f \circ \Gamma)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\Gamma(t)\big)\,\gamma_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\Gamma(t)\big)\,\gamma_2'(t).$$

c'est-à-dire

$$(f \circ \Gamma)' = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \circ \Gamma\right) \times \gamma_1' + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \circ \Gamma\right) \times \gamma_2'$$

- On peut écrire de façon concise la dérivée de $f \circ \Gamma$ à l'aide du gradient de f :

$$\forall\, t \in I, \quad (f \circ \Gamma)'(t) = \Big\langle \nabla f\big(\Gamma(t)\big) \,\Big|\, \Gamma'(t) \Big\rangle$$

où l'on a noté $\Gamma'(t) = \big(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)\big)$.

- **Remarque.** On appelle *ligne de niveau* d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, une partie de $\mathbb{R}^2$ d'équation $f(x, y) = c$, pour un certain $c \in \mathbb{R}$.
Si la fonction $\Gamma : I \to \mathbb{R}^2$ paramètre une ligne de niveau, c'est-à-dire si la composée $f \circ \Gamma$ est constante, on obtient pour tout $t \in I$, l'égalité $\langle \nabla f\big(\Gamma(t)\big) \mid \Gamma'(t)\rangle = 0$, c'est-à-dire que le gradient $\nabla f\big(\Gamma(t)\big)$ est orthogonal au vecteur dérivé $\Gamma'(t)$ qui dirige la tangente de la ligne de niveau au point $\Gamma(t)$.
Le gradient ∇f est *orthogonal aux lignes de niveau.*

- **Exemple.** Considérons la fonction $f : (x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^2$ définie sur $U = \mathbb{R}^2$.
Cette fonction f possède des fonctions dérivées partielles définies sur U, et le gradient de f est donné par :

$$\nabla f : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a, b) & \longmapsto & \big(4a(a^2 + b^2),\ 4b(a^2 + b^2)\big) \end{array}$$

Considérons une ligne de niveau $\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\big\}$ où $c \in \mathbb{R}^+$.
Considérons un point (a, b) de cette ligne de niveau de sorte que $(a^2 + b^2)^2 = c$.
On a alors $\nabla f(a, b) = 4\sqrt{c}(a, b)$, qui est donc colinéaire à (a, b), lui-même orthogonal au vecteur tangent à la courbe de niveau.
Ainsi, $\nabla f(a, b)$ est orthogonal à la ligne de niveau.

Prouvons cette affirmation.
Considérons une fonction Γ qui paramètre cette ligne de niveau, c'est-à-dire une fonction $\Gamma : I \to \mathbb{R}^2$ à valeurs dans U telle que $f \circ \Gamma = c$ (la composée est constante égale à c).
Ici, on peut prendre

$$\Gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

Un point (a, b) de la courbe de niveau s'écrit donc $\Gamma(t_0)$ pour un certain t_0 (non nécessairement unique).
Il s'agit de montrer que $\Big\langle \nabla f\big(\Gamma(t_0)\big) \,\Big|\, \Gamma'(t_0) \Big\rangle = 0$.
Or

$$\nabla f\big(\Gamma(t_0)\big) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad \text{et} \qquad \Gamma'(t_0) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Le produit scalaire de ces deux vecteurs est donc nul.

25
sol → 23

Question. Soit $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, avec u à valeurs dans $]0, +\infty[$.
Considérons $w : t \mapsto u(t)^{v(t)}$.
À l'aide de la règle de la chaîne, montrer que w est de classe $\mathscr{C}^1$ et déterminer sa dérivée.
On considérera la fonction $f : \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^y \end{array}$ définie sur l'ouvert $H = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0\right\}$.

Dérivée selon un vecteur (en un point)

26
preuve

Proposition. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}^2$, une fonction et un vecteur.
Soit $p \in U$ un point.
Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, alors la fonction $f_{v,p} : t \mapsto f(p+tv)$ est définie au voisinage de 0, dérivable en 0 et :

$$f'_{v,p}(0) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}(p)x_v \;+\; \frac{\partial f}{\partial y}(p)y_v$$

On note $D_v f(p) = f'_{v,p}(0)$ ce nombre dérivé que l'on appelle *dérivée de f en p selon le vecteur v*.
On a

$$D_v f(p) \;=\; \langle \nabla f(p) \,|\, v \rangle.$$

- **Cas particulier.** Si on prend $v = (1,0)$ le premier vecteur de la base canonique, alors $D_v f(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p)$.
- **Remarque à comprendre !** La fonction $f_{v,p}$ correspond, lorsque $v \neq 0$, à la fonction f « le long de la droite » passant par p et dirigée par v.
  La notion de dérivée selon un vecteur généralise donc celle de dérivée partielle, en ne faisant plus jouer de rôle particulier aux droites parallèles aux axes de coordonnées.
- **Pour la culture.** Si v est un vecteur unitaire, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$|D_v f(p)| \;=\; |\langle \nabla f(p) \,|\, v \rangle| \;\leqslant\; \|\nabla f(p)\|.$$

  En outre, la dérivée $D_v f(p)$ est alors maximale (resp. minimale) si $\nabla f(p)$ est positivement (resp. négativement) colinéaire à v : elle vaut dans ce cas $\pm\|\nabla f(p)\|$.
  Le gradient de f en p pointe donc dans la direction dans laquelle f croît le plus vite (qui est aussi, en sens inverse, celle où elle décroît le plus vite). Cela correspond à la direction de plus grande pente sur le graphe Γ_f.

Deuxième règle de la chaîne

27 preuve

Proposition (composition à droite, 2 variables).
Soit φ et ψ deux fonctions définies sur V telles que $\Phi : \xi \mapsto \big(\varphi(\xi), \psi(\xi)\big)$ soit à valeurs dans U.
Soit $f : U \to \mathbb{R}$.
On a :

$$\begin{cases} \varphi \text{ et } \psi \text{ de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } V \\ f \text{ de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } U \end{cases} \implies f \circ \Phi \text{ de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } V$$

et on a

$$\forall\, p \in V, \qquad \partial_1(f\circ\Phi)(p) = \partial_1 f\big(\Phi(p)\big)\partial_1\varphi(p) + \partial_2 f\big(\Phi(p)\big)\partial_1\psi(p)$$

et

$$\forall\, p \in V, \qquad \partial_2(f\circ\Phi)(p) = \partial_1 f\big(\Phi(p)\big)\partial_2\varphi(p) + \partial_2 f\big(\Phi(p)\big)\partial_2\psi(p).$$

- Si l'on note $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ et $\Phi : (u,v) \mapsto \big(\varphi(u,v), \psi(u,v)\big)$, ces formules deviennent, selon la notation usuelle :

$$\forall\, p \in V, \qquad \frac{\partial(f\circ\Phi)}{\partial u}(p) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\Phi(p)\big)\frac{\partial\varphi}{\partial u}(p) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\Phi(p)\big)\frac{\partial\psi}{\partial u}(p)$$

et

$$\forall\, p \in V, \qquad \frac{\partial(f\circ\Phi)}{\partial v}(p) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\Phi(p)\big)\frac{\partial\varphi}{\partial v}(p) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\Phi(p)\big)\frac{\partial\psi}{\partial v}(p).$$

28 sol → 24

Question. Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. Montrer que $F : (u,v) \mapsto f(u+uv, u-uv^2)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et déterminer ses dérivées partielles en tout point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

29

Exemples récapitulatifs.
Soif $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
Les fonctions g suivantes sont de classe $\mathscr{C}^1$ (WHY ?).
Déterminer les dérivées (partielles) de g **en un point** p_0, en fonction des dérivées partielles de f.
Le point p_0 sera noté (x_0, y_0) ou t_0 ou (r_0, θ_0).

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \exp\big(f(x,y)\big) \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t^2, t^3) \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (r,\theta) & \longmapsto & f(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

IV. Extrema

Dans toute cette section, U désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$.

30 **Définition.**
Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}^2$, et soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction et $p \in X$.

— On dit que f admet un *maximum* en p lorsque $\forall \xi \in X, \quad f(\xi) \leqslant f(p)$.

— On dit que f admet un *maximum local* en p lorsque :

$$\exists \eta > 0, \qquad \forall \xi \in X \cap D(p, \eta), \qquad f(\xi) \leqslant f(p).$$

— On définit de même les notions de *minimum* et de *minimum local*.

— On dit que f admet un *extremum* en p si f admet un maximum ou un minimum en p.
On définit de même la notion d'*extremum local*.

- La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2 \end{array}$ est positive, et nulle en $(0,0)$.
  Elle admet un minimum en $(0,0)$.
  En revanche, elle n'est pas majorée, donc n'admet pas de maximum.
- Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (x^2+y^2)^2 - (x^2+y^2). \end{array}$
  Montrons que f admet en $(0,0)$ un maximum local.
  Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; notons $r = \|(x,y)\|$.
  On a alors $f(x,y) = r^4 - r^2 = r^2(r^2-1)$.
  Si on suppose que $(x,y) \in D\big((0,0),1\big)$, alors $r^2 \leqslant 1$. Donc $r^2(r^2-1) \leqslant 0$.
  D'où $f(x,y) \leqslant 0 = f(0,0)$.
  Ce qui montre que f admet en $(0,0)$ un maximum local.
  En revanche, comme $r^4 - r^2 \xrightarrow[r \to +\infty]{} +\infty$, la fonction f n'est pas majorée, donc elle n'admet en particulier pas de maximum global.
- Soit $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \exp(x) \end{array}$
  Cette fonction est minorée (par 0) mais n'admet pas de minimum : si h admettait un minimum en (a,b), on en déduirait que la fonction d'une variable $x \mapsto \exp(x)$ admettrait un minimum en a, ce qui est impossible.

31 **Définition.** Soit $f \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $p \in U$.
On dit que p est un *point critique* pour f lorsque $\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0$,
c'est-à-dire lorsque $\nabla f(p) = (0,0)$.

32 preuve **Proposition.** Soit $f \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $p \in U$.
Si p admet un extremum local en p, alors p est un point critique de f.

- **Point intérieur ?** Le théorème concernant les fonctions d'une variable, à avoir le lemme de l'extremum local, exigeait une hypothèse supplémentaire : le point était supposé intérieur à l'intervalle.
  Dans le théorème précédent, cette hypothèse est rendue superflue par le fait que U soit un ouvert de $\mathbb{R}^2$: le point p est pour ainsi dire automatiquement dans l'intérieur de U.
- **Pour la culture.** On voit que, même si le théorème est énoncé dans le cadre d'une fonction globalement de classe $\mathscr{C}^1$, la démonstration n'utilise en fait que l'existence des dérivées partielles en p.

- **Attention.** Comme dans le cas des fonctions d'une variable, la réciproque du théorème est fausse : une fonction n'admet pas nécessairement d'extremum local en chacun de ses points critiques.
- **Exemple.** Considérons la fonction :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^3+y^3. \end{array}$$

On vérifie directement que f admet des dérivées partielles :

$$\forall\,(a,b)\in\mathbb{R}^2,\quad \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=3a^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=3b^2.$$

En particulier, l'origine $(0,0)$ est un point critique.
Comme $f(x,0)$ est strictement positif dès que $x\in\mathbb{R}_+^*$, on voit que $(0,0)$ n'est pas un maximum local. De même, $f(x,0)$ est strictement négatif dès que $x\in\mathbb{R}_-^*$, donc $(0,0)$ n'est pas un minimum local.
- **Méthode.** Pour étudier les extrema (locaux ou globaux) d'une fonction $f\in\mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$,
  — on trouve ses points critiques en résolvant les équations $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$;
  — pour chaque point critique (a,b), on cherche à déterminer (soit au voisinage de (a,b), soit globalement) le signe de $f(x,y)-f(a,b)$.
- **Exemple 1.** La fonction $f:(x,y)\mapsto x^2+y^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ par opérations.
Ses dérivées partielles sont données par :

$$\forall\,(a,b)\in\mathbb{R}^2,\quad \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=2a \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=2b.$$

Ainsi, un point $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ est critique si et seulement si $2a=2b=0$: le seul point critique est l'origine $(0,0)$.
Il ne peut donc y avoir aucun extremum local à l'exception de $(0,0)$, dont on a déjà vu qu'il s'agissait d'un minimum (global).
- **Exemple 2.** Soit $h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2-y^2. \end{array}$
La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ par opérations, et ses dérivées partielles sont données par :

$$\forall\,(a,b)\in\mathbb{R}^2,\quad \frac{\partial h}{\partial x}(a,b)=2a \text{ et } \frac{\partial h}{\partial y}(a,b)=-2b,$$

donc l'origine $(0,0)$ est l'unique point critique de la fonction h.
Or, pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $h(x,0)=x^2>0$ et pour tout $y\in\mathbb{R}^*$, $h(0,y)=-y^2<0$.
Donc le point critique $(0,0)$ n'est ni un maximum local, ni un minimum local.
La fonction h ne possède donc aucun extremum local.

33 **Question.** Déterminer les extrema (locaux et globaux) des fonctions appartenant à $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ suivantes :

1. $f:(x,y)\mapsto\cos(x)+y^2$;
2. $f:(x,y)\mapsto e^{3x}y^2+e^x y$;
3. $f:(x,y)\mapsto 3x^2-2xy+3y^2-8x+8y$;
4. $f:(x,y)\mapsto\exp(x\,\mathrm{Arctan}(y))$.

Fonctions de deux variables

preuve et éléments de correction

3

(i) Soit $p=(a,b)\in H$. On a donc $a>0$.
Montrons $D(p,a)\subset H$, ce qui conclura. Soit $\xi=(x,y)\in D(p,a)$.
On a $(x-a)^2\leqslant(x-a)^2+(y-b)^2=\|\xi-p\|^2<a^2$, d'où l'encadrement $-a<x-a<a$.
Il s'ensuit $x>0$, donc $\xi\in H$.

(ii) Soit $p\in D\big((0,0),1\big)$. On a donc $\|p\|<1$.
Posons $r=1-\|p\|$. On a bien $r>0$, et l'on va montrer l'inclusion $D(p,r)\subset D(0,1)$, ce qui conclura.
Soit $\xi\in D(p,r)$.
On a $\|\xi\|\leqslant\|p\|+\|\xi-p\|$ d'après l'inégalité triangulaire, d'où $\|\xi\|<\|p\|+1-\|p\|=1$, ce qui prouve $\xi\in D(0,1)$.
On montrerait de la même façon que tout disque ouvert est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

(iii) Soit $r>0$. Le disque ouvert $D\big((0,0),r\big)$ contient le point $(0,r/2)$, qui n'appartient pas à Δ.
On en déduit qu'aucun disque ouvert de centre $(0,0)$ n'est inclus dans Δ, ce qui montre que Δ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

5

1. Soit $p=(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Montrons que g est continue en p.
Soit $\varepsilon>0$.
Posons $\eta=\varepsilon/3$.
Soit $\xi=(x,y)\in U\cap D(p,\eta)$, c'est-à-dire $\xi\in U$ tel que $\|\xi-p\|<\eta$.
On a alors $|x-a|\leqslant\|\xi-p\|<\eta$. De même, $|y-b|\leqslant\eta$.
Par l'inégalité triangulaire, on en déduit que :
$$|f(\xi)-f(p)|\;\leqslant\;|x-a|+2|y-b|\;\leqslant\;3\eta\leqslant\varepsilon,$$
ce qui montre la continuité de f en p.

2. Soit $p=(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Montrons que g est continue en p.
Soit $\varepsilon>0$.
Par continuité de θ, on peut trouver $\delta>0$ tel que
$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad |x-a|\leqslant\delta\implies\big|\theta(x)-\theta(a)\big|\leqslant\varepsilon$$
Posons $\eta=\delta$.
Soit $\xi=(x,y)\in\mathbb{R}^2\cap D(p,\eta)$.
Comme $|x-a|\leqslant\|\xi-p\|<\eta$, on a :
$$\big|g(\xi)-g(p)\big|\;=\;\big|g(x,y)-g(a,b)\big|\;=\;\big|\theta(x)-\theta(a)\big|\;\leqslant\;\varepsilon$$

13

Fixons $p=(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

— Montrons que f admet une première dérivée partielle en p.

  — Si $b\neq0$, l'application partielle $f_{1,p}:x\mapsto f(x,b)=\dfrac{xb}{x^2+b^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et l'on obtient :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\frac{b(b^2-a^2)}{(a^2+b^2)^2}.$$

— Si $b=0$, l'application partielle $f_{1,p} : x \mapsto f(x,0)=0$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,0)=0.$$

Bilan. La fonction f admet une première dérivée partielle en p et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\begin{cases}\dfrac{b(b^2-a^2)}{(a^2+b^2)^2} & \text{si } b\neq 0\\ 0 & \text{si } b=0.\end{cases}$$

— Par symétrie, on obtient que f admet une deuxième dérivée partielle en p et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=\begin{cases}\dfrac{a(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^2} & \text{si } a\neq 0\\ 0 & \text{si } a=0.\end{cases}$$

15

— Pour tout $b\in\mathbb{R}$, l'application partielle $\varphi_1 : x\mapsto x^b$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $\varphi_1' : x\mapsto b\,x^{b-1}$, donc f admet une première dérivée partielle en tout point de H :

$$\forall\,(a,b)\in H\,\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=b\,a^{b-1}.$$

— Pour tout $a>0$, l'application partielle $\varphi_2 : y\mapsto a^y=\exp\big(y\ln(a)\big)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\varphi_2' : y\mapsto \ln(a)\,\exp\big(y\ln(a)\big)=\ln(a)\,a^y$, donc f admet une deuxième dérivée partielle en tout point de H :

$$\forall\,(a,b)\in H\,\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=\ln(a)\,a^b.$$

19

Fixons $p=(a,b)\in U$. Montrons que f est continue en p, c'est-à-dire montrons que

$$f(a+h,b+k)\xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} f(a,b)$$

Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, on peut écrire un DL_1 au point (a,b) :

$$f(a+h,b+k)\;=\;f(a,b)\;+\;h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\;+\;k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\;+\;\varepsilon(h,k)\,\|(h,k)\|,$$

Or

$$h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\;+\;k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\;+\;\varepsilon(h,k)\,\|(h,k)\|\;\xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{}\;0$$

D'où le résultat.

22

Montrons que $\psi \circ f$ admet une fonction première dérivée partielle et que cette fonction est continue.
Pour cela, on montre que $\psi \circ f$ admet une première dérivée partielle en un point $p = (a, b) \in U$ fixé.
• **Première dérivée partielle en p.** Notons

$$\begin{array}{rccl} \kappa_{1,p} : & D_{1,p} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (\psi \circ f)(x, b) \end{array}$$

de telle sorte que $\kappa_{1,p} = \psi \circ f_{1,p}$ où $f_{1,p}$ est la première dérivée partielle de f en p.
D'après le théorème pour la composée de fonctions de 1 variable, on en déduit que κ_1 est dérivable en a et l'on obtient :

$$\kappa'_{1,p}(a) = \psi'\big(f_{1,p}(a)\big)\, f'_{1,p}(a)$$

Ainsi, $\psi \circ f$ admet une première dérivée partielle en p et on a :

$$\frac{\partial(\psi \circ f)}{\partial x}(p) = \psi'\big(f(p)\big)\frac{\partial f}{\partial x}(p)$$

• **Première dérivée partielle sur U.**
Ceci étant vrai pour tout point $p \in U$, on en déduit que $\psi \circ f$ admet une fonction première dérivée partielle qui vaut :

$$\frac{\partial(\psi \circ f)}{\partial x} = (\psi' \circ f) \times \frac{\partial f}{\partial x}$$

• **Aspect $\mathscr{C}^1$ sur U**

— La dérivée ψ' est continue (car ψ est de classe $\mathscr{C}^1$)

— La fonction f est continue (car f de classe $\mathscr{C}^1$).

— La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue (car f de classe $\mathscr{C}^1$).

Par produit, on en déduit que $\frac{\partial(\psi \circ f)}{\partial x}$ est continue.
On procède alors exactement de même pour la deuxième dérivée partielle.

23

— Considérons la première application partielle de N en $p = (0,0)$

$$x \longmapsto N(x,0) = |x|$$

Cette fonction n'est pas dérivable en 0.
Donc la fonction N n'admet pas de première dérivée partielle en $(0,0)$.

— Idem pour la deuxième dérivée partielle.

— Sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$.
Par opérations, l'application $N^2 : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, et

$$\frac{\partial(N^2)}{\partial x} : (x, y) \longmapsto 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial(N^2)}{\partial y} : (x, y) \longmapsto 2y$$

Cette application N^2 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
La fonction racine carrée est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par composition, la fonction $N = \sqrt{N^2}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et :

$$\frac{\partial N}{\partial x} : (x, y) \longmapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial N}{\partial y} : (x, y) \longmapsto \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

24

Soit $t_0 \in I$.
Montrons que $f \circ \Gamma$ est dérivable en t_0 en exhibant un $\mathrm{DL}_1(t_0)$.
Posons $p = \Gamma(t_0) = \big(\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0)\big)$, qui appartient à U.
Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, il existe une fonction $\varepsilon : U \to \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to p]{} 0$ et :

$$\forall\,(x,y) \in U, \quad f(x,y) \;=\; f(p) \;+\; \frac{\partial f}{\partial x}(p)\,\big(x-\gamma_1(t_0)\big) \;+\; \frac{\partial f}{\partial y}(p)\,\big(y-\gamma_2(t_0)\big) \;+\; \varepsilon(x,y)\,\|(x,y)-p\|.$$

Comme $(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \in U$ pour tout $t \in I$, on a

$$\forall\, t \in I, \quad \underbrace{f\big(\gamma_1(t),\gamma_2(t)\big)}_{f\circ\Gamma(t)} \;=\; f(p) \;+\; \frac{\partial f}{\partial x}(p)\;\underbrace{\big(\gamma_1(t)-\gamma_1(t_0)\big)}_{\gamma_1'(t_0)(t-t_0)+\mathrm{o}(t-t_0)} \;+\; \frac{\partial f}{\partial y}(p)\;\underbrace{\big(\gamma_2(t)-\gamma_2(t_0)\big)}_{\gamma_2'(t_0)(t-t_0)+\mathrm{o}(t-t_0)} \;+\varepsilon(\Gamma(t))\,\|\Gamma(t)-p\|.$$

Écrivons les petits o avec des fonctions ε_1 et ε_2.

$$\forall\, t \in I, \quad f\circ\Gamma(t) \;=\; f(p) + \frac{\partial f}{\partial x}(p)\,\big(\gamma_1'(t_0)(t-t_0)+\varepsilon_1(t)(t-t_0)\big) + \frac{\partial f}{\partial y}(p)\,\big(\gamma_2'(t_0)(t-t_0)+\varepsilon_2(t)(t-t_0)\big) + \varepsilon(\Gamma(t))\,\|\Gamma(t)-p\|$$

d'où

$$\forall\, t \in I, \quad f\circ\Gamma(t) \;=\; f(p) \;+\; \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p)\,\gamma_1'(t_0) \;+\; \frac{\partial f}{\partial y}(p)\,\gamma_2'(t_0)\right)(t-t_0) \;+\; \theta(t)(t-t_0)$$

où on a posé :

$$\theta :\; \begin{array}{ccl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(p)\,\varepsilon_1(t) \;+\; \dfrac{\partial f}{\partial x}(p)\,\varepsilon_2(t) \;+\; \varepsilon(\Gamma(t))\,\frac{\|\Gamma(t)-p\|}{t-a} & \text{si } t \neq t_0 \\ 0 & \text{si } t = t_0 \end{cases} \end{array}$$

Montrons que $\theta(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} 0$.
Comme $\varepsilon_1(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} 0$ et $\varepsilon_2(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} 0$, il suffit de montrer que $\varepsilon\big(\Gamma(t)\big)\,\frac{\|\Gamma(t)-p\|}{t-t_0} \xrightarrow[t\to t_0]{} 0$.

— Par l'inégalité triangulaire, on a

$$\left|\frac{\|\Gamma(t)-p\|}{t-t_0}\right| \;\leqslant\; \left|\frac{\gamma_1(t)-\gamma_1(t_0)}{t-t_0}\right| + \left|\frac{\gamma_2(t)-\gamma_2(t_0)}{t-t_0}\right|.$$

Explication. Pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, on a $\|(h,k)\| \leqslant \|(h,0)\| + \|(0,k)\| \leqslant |h|+|k|$

Comme le terme de droite converge vers $\left|\gamma_1'(t_0)\right| + \left|\gamma_2'(t_0)\right|$, il est borné au voisinage de t_0, et il en va alors de même du terme de gauche.

— De plus, on a $\varepsilon\big(\Gamma(t)\big) \xrightarrow[t\to t_0]{} 0$ par continuité de γ_1 et γ_2 en t_0 et le fait que $\varepsilon(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to p]{} 0$.

La fonction $f \circ \Gamma$ admet un $\mathrm{DL}_1(t_0)$, donc est dérivable en t_0 et on a

$$(f\circ\Gamma)'(t_0) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}(p)\,\gamma_1'(t_0) \;+\; \frac{\partial f}{\partial y}(p)\,\gamma_2'(t_0).$$

ce qui se réécrit :

$$(f\circ\Gamma)'(t_0) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}\big(\Gamma(t_0)\big)\,\gamma_1'(t_0) \;+\; \frac{\partial f}{\partial y}\big(\Gamma(t_0)\big)\,\gamma_2'(t_0).$$

On a donc montré l'égalité de fonctions :

$$(f\circ\Gamma)'(t_0) \;=\; \left(\frac{\partial f}{\partial x}\circ\Gamma\right)\times\gamma_1' \;+\; \left(\frac{\partial f}{\partial y}\circ\Gamma\right)\times\gamma_2'$$

25

Considérons la fonction $f : \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^y \end{array}$ définie sur l'ouvert $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0\}$.

On a $w(t) = f(u(t), v(t))$.

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur H.

Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I = \mathbb{R}$.

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ et ses dérivées partielles sont données par :

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (a,b) \longmapsto b\,a^{b-1} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} : (a,b) \longmapsto \ln(a)\,a^b.$$

D'après la première règle de la chaîne, on en déduit que la fonction $w = f \circ \Gamma$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et

$$\begin{aligned} \forall\, t \in I, \qquad w'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(u(t), v(t)\big)\,u'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(u(t), v(t)\big)\,v'(t) \\ &= u'(t)\,v(t)\,u(t)^{v(t)-1} + v'(t)\,\ln\big(u(t)\big)\,u(t)^{v(t)} \\ &= \left(\frac{u'(t)\,v(t)}{u(t)} + v'(t)\,\ln\big(u(t)\big)\right)u(t)^{v(t)}. \end{aligned}$$

26

• Montrons que $f_{v,p}$ est bien définie au voisinage de 0.

— Cas $v \neq 0$.
Comme U est ouvert, on peut trouver $r > 0$ tel que $D(p,r) \subset U$.
On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $|t| < \frac{r}{\|v\|}$, l'inégalité $\|tv\| < r$.
D'où $p + tv \in D(p,r)$.
Ainsi, $f_{v,p}$ est bien définie sur $\left]-\frac{r}{\|v\|}, \frac{r}{\|v\|}\right[$.

— Si $v = 0$, la fonction $t \mapsto p + tv$ est constante égale à p.
Ainsi, $f_{v,p}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Dans tous les cas, la fonction $t \mapsto p + tv$ envoie un intervalle d'intérieur non vide centré en 0, dans U.
Ce qui montre que φ_v est définie au voisinage de 0. Notons I un tel voisinage.

• Montrons que $f_{v,p}$ est dérivable en 0.
Notons $p = (a,b)$.
On pose $\Gamma = \Gamma_{v,p} : t \mapsto (a + tx_v, b + ty_v)$ qui est définie sur I à valeurs dans U.
On a $\Gamma(0) = p$.

— γ_1 et γ_2 sont $\mathscr{C}^1$ sur I

— f est $\mathscr{C}^1$ sur U

D'après la première règle de la chaîne, la composée $f \circ \Gamma$ est $\mathscr{C}^1$ sur I, a fortiori dérivable en 0, et on a

$$(f \circ \Gamma)'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}\Big(\Gamma(0)\Big)\gamma_1'(0) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big(\Gamma(0)\Big)\gamma_2'(0)$$

$$f_{v,p}'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(p)x_v + \frac{\partial f}{\partial y}(p)y_v$$

27

On pose $F = f \circ \Phi$.
On veut montrer que cette fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$.
Autrement dit, que F admet des dérivées partielles en tout point $p \in V$, et que les fonctions dérivées partielles sont continues.
On fixe $p \in V$.
On étudie les applications partielles de F.
Soit $p = (a, b) \in V$ et $D_{1,p} = \{x \in \mathbb{R} \mid (x, b) \in V\}$.
Les fonctions φ et ψ définissent des applications partielles :

$$\gamma_{1,p} : \begin{array}{ccc} D_{1,p} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \varphi(x,b) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \gamma_{2,p} \begin{array}{ccc} D_{1,p} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \psi(x,b) \end{array}$$

telles que l'application $\Gamma : x \mapsto \big(\gamma_{1,p}(x), \gamma_{2,p}(x)\big) = \big(\varphi(x,b), \psi(x,b)\big) = \Phi(x,b)$ soit à valeurs dans U.
On a $\Gamma(a) = \Phi(p)$.
La première application partielle de $F = f \circ \Phi : V \to \mathbb{R}$ en p est alors :

$$F_{1,p} : \begin{array}{ccc} D_{1,p} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f\big(\gamma_{1,p}(x), \gamma_{2,p}(x)\big), \end{array}$$

c'est-à-dire que l'on a $F_{1,p} = f \circ \Gamma$.
D'après la première règle de la chaîne, cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$, de dérivée :

$$\begin{aligned} \partial_1(f \circ \Phi)(p) \;=\; F'_{1,p}(a) \;=\; (f \circ \Gamma)'(a) \;&=\; \partial_1 f\big(\Gamma(a)\big)\,\gamma'_{1,p}(a) \;+\; \partial_2 f\big(\Gamma(a)\big)\,\gamma'_{2,p}(a) \\ &=\; \partial_1 f\big(\Phi(p)\big)\,\partial_1\varphi(p) \;+\; \partial_2 f\big(\Phi(p)\big)\,\partial_1\psi(p). \end{aligned}$$

On a donc montré l'égalité de fonctions :

$$\partial_1(f \circ \Phi) \;=\; \big(\partial_1 f \circ \Phi\big)\,\partial_1\varphi \;+\; \big(\partial_2 f \circ \Phi\big)\,\partial_1\psi.$$

Les dérivées partielles étant continues, les composées $\partial_1 f \circ \Phi$ et $\partial_2 f \circ \Phi$ sont continues.
D'où la continuité de $\partial_1(f \circ \Phi)$.
On procède de même pour la deuxième dérivée partielle, ce qui montre la deuxième formule et la continuité de $\partial_2(f \circ \Phi)$.
Ainsi, la fonction $f \circ \Phi$ est de classe $\mathscr{C}^1$.

28

— La fonction $\varphi : (u, v) \mapsto u + uv$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et vérifie :

$$\forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^2, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial u}(a,b) = 1 + b \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial v}(a,b) = a.$$

— La fonction $\psi : (u, v) \mapsto u - uv^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et vérifie :

$$\forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^2, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial u}(a,b) = 1 - b^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial\psi}{\partial v}(a,b) = -2ab.$$

D'après la deuxième règle de la chaîne, on en déduit que $F \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u}(a,b) \;&=\; (1+b)\,\frac{\partial f}{\partial x}(a+ab, a-ab^2) + (1-b^2)\,\frac{\partial f}{\partial y}(a+ab, a-ab^2) \\ \frac{\partial F}{\partial v}(a,b) \;&=\; a\,\frac{\partial f}{\partial x}(a+ab, a-ab^2) - 2ab\,\frac{\partial f}{\partial y}(a+ab, a-ab^2). \end{aligned}$$

32

IDEE : Via les applications partielles, on se ramène au théorème correspondant pour les fonctions d'une variable.

Supposons que $p=(a,b)$ admette un extremum local en p.
L'application partielle $f_{1,p} : t \mapsto f(t,b)$ admet donc un extremum local en a.
On a vu que le domaine de définition de $f_{1,p}$ contient un intervalle $]a-r, a+r[$ centré en a sur lequel la restriction de $f_{1,p}$ admet donc aussi un extremum local.
Le point a étant intérieur à cet intervalle, le lemme de l'extremum local nous donne $f_{1,p}'(a)=0$, c'est-à-dire $\frac{\partial f}{\partial x}(p)=0$.
En procédant de même avec la deuxième dérivée partielle, on obtient $\frac{\partial f}{\partial y}(p)=0$.
Ainsi, $p=(a,b)$ est un point critique de f.