Révisions

exercices

101 Autour des matrices de permutation

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$, càd l'ensemble des bijections de $[\![1,n]\!]$ sur lui-même.
Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note f_σ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall j \in [\![1,n]\!], \quad f_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$$

On note M_σ la matrice de f_σ dans la base $\mathcal{B}$.
On dit que M_σ est la matrice de permutation associée à σ.

1. Quel est le cardinal de $\mathcal{S}_n$?
2. Donner tous les éléments σ de $\mathcal{S}_3$. Ne pas hésiter à faire un dessin avec des flèches.
   Pour chaque élément σ de $\mathcal{S}_3$, donner M_σ.
3. Si $\sigma = \mathrm{id}$, que vaut f_σ ? Et M_σ ?
4. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Montrer que $M_\sigma^\top = M_{\sigma^{-1}}$.
5. (5a) Soit $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n$. Montrer que $f_\sigma \circ f_{\sigma'} = f_{\sigma \circ \sigma'}$.
   (5b) En déduire que pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, la matrice M_σ est inversible et donner $(M_\sigma)^{-1}$.
   (5c) *On dit qu'une matrice carrée est orthogonale lorsqu'elle est inversible et que son inverse est égale à sa transposée.*
   Pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, justifier que la matrice M_σ est orthogonale.

   Soit $p = \dfrac{1}{n!} \sum\limits_{\sigma \in \mathcal{S}_n} f_\sigma$. Bien sûr, p est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ (WHY ?).
6. Fixons $\tau \in \mathcal{S}_n$.
   (6a) Notons $\varphi_\tau : \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n,\ \sigma \mapsto \tau \circ \sigma$. Montrer que φ_τ est une bijection.
   (6b) Montrer **soigneusement** que $f_\tau \circ p = p$.
7. Déduire de la question précédente que p est un projecteur de $\mathbb{R}^n$.
8. (8a) Montrer que $\mathrm{Im}\, p = \big\{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall \sigma \in \mathcal{S}_n,\ f_\sigma(x) = x\big\}$.
   (8b) En déduire que $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Vect}(x_0)$, où $x_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i$.
9. Soit P la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$. Exprimer P en fonction des M_σ.
10. Montrer que P est une matrice symétrique.

102 Matrice et proba

Soit $p \in \,]0,1[$.
Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On y effectue une succession de tirages d'une boule selon le protocole suivant :

• si à un rang quelconque on obtient une boule blanche, on la remplace par une boule noire avant le tirage suivant ;
• si à un rang quelconque on tire une boule noire, on la remplace par une boule noire avec la probabilité p et on la remplace par une boule blanche avec la probabilité $q = 1 - p$ et on effectue alors le tirage suivant.

L'expérience est modélisée dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne demande pas d'expliciter.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire représentant le nombre de boules noires contenues dans l'urne à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage (c'est-à-dire juste avant le tirage de rang $n+1$).
On a donc $X_0 = 1$.

1. Donner la loi de X_1.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Donner les valeurs prises par la variable aléatoire X_n.
   (b) Déterminer pour tout $j \in [\![0,2]\!]$, la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant que $(X_n = j)$ est réalisé.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = AU_n$.
   En déduire U_n en fonction de U_0.

   (b) Déterminer une base des espaces suivants

   $$\operatorname{Ker}(A - \lambda I) \qquad \text{où } \lambda \in \left\{1,\ -q,\ \frac{p}{2}\right\}$$

   et montrer qu'il existe une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \operatorname{diag}(1, -q, \frac{p}{2})$.

   (c) Pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$, déterminer la limite de $\mathbb{P}(X_n = k)$ quand $n \to +\infty$.

103 Polynômes et séries

On considère la suite de polynômes $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$S_0 = 1, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad S_k(X) = \prod_{i=0}^{k-1}(X - i)$$

1. (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\big(S_k\big)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.

   (b) Soit $m \in \mathbb{N}$.
   Prouver que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_m[X]$, il existe un unique $(m+1)$-uplet de réels $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant m}$ tel que $P = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k S_k$.

2. (a) Pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, calculer $S_k(n)$.

   (b) Soit $P \in \mathbb{R}_m[X]$ écrit dans la base $\big(S_k\big)_{0\leqslant k\leqslant m}$ sous la forme : $P = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k S_k$.

      i. Démontrer que pour tout entier $N \geqslant m$:

      $$\sum_{n=0}^{N} \frac{P(n)}{n!} = \sum_{k=0}^{m} \left(a_k \sum_{n=k}^{N} \frac{1}{(n-k)!} \right)$$

      ii. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{P(n)}{n!}$ converge et calculer sa somme en fonction des a_k.

   (c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
   Justifier la convergence de la série

   $$\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{n!}$$

   et calculer sa somme.

Révisions
corrigés

101

1. Il est bien connu que card $\mathcal{S}_n = n!$ Au fait, pourquoi ?
2. Il y a 6 applications à écrire. En voici une et sa matrice associée

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & [\![1,3]\!] & \longrightarrow & [\![1,3]\!] \\ & 1 & \mapsto & 3 \\ & 2 & \mapsto & 1 \\ & 3 & \mapsto & 2 \end{array} \qquad M_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Si $\sigma = \mathrm{id}$, alors pour tout i, on a $f_\sigma(e_i) = e_i$ donc $f_\sigma = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ et alors $M_\sigma = I_n$.
4. • D'une part, on a $\forall\, j,\ f_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$.
D'autre part, les coefficients $(M_\sigma)_{i,j}$ de M_σ (matrice de f_σ dans $\mathcal{B}$) vérifient, par définition,

$$\forall\, j, \quad f_\sigma(e_j) = \sum_{i=1}^{n} (M_\sigma)_{i,j}\, e_i$$

En comparant les deux égalités précédentes, on en déduit que

$$\forall\, i, j, \qquad (M_\sigma)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'où $\boxed{\forall\, i, j, \quad (M_\sigma)_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}}$.
• On a $(M_\sigma^\top)_{k,\ell} = (M_\sigma)_{\ell,k} = \delta_{\ell,\sigma(k)}$
On a $(M_{\sigma^{-1}})_{k,\ell} = \delta_{k,\sigma^{-1}(\ell)}$.
On a

$$\forall\, k, \ell, \quad (M_\sigma^\top)_{k,\ell} = \delta_{\ell,\sigma(k)} \overset{\text{why}}{=} \delta_{k,\sigma^{-1}(\ell)} = (M_{\sigma^{-1}})_{k,\ell}$$

On en déduit que $M_\sigma^\top = M_{\sigma^{-1}}$.

5. (a) Pour tout j, on a

$$f_\sigma \circ f_{\sigma'}(e_j) = f_\sigma(e_{\sigma'(j)}) = e_{\sigma\circ\sigma'(j)} = f_{\sigma\circ\sigma'}(e_j)$$

(b) Prenons $\sigma' = \sigma^{-1}$ dans l'égalité 5a). On a alors

$$f_\sigma \circ f_{\sigma^{-1}} \;=\; f_{\sigma\circ\sigma^{-1}} \;=\; f_{\mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}} \overset{3}{=} \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$$

Cette dernière égalité s'écrit matriciellement :

$$M_\sigma M_{\sigma^{-1}} \;=\; I_n$$

Donc M_σ est inversible et $(M_\sigma)^{-1} = M_{\sigma^{-1}}$.

(c) Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. D'après la question 5b), la matrice M_σ est inversible. De plus :

$$(M_\sigma)^{-1} \overset{5b}{=} M_{\sigma^{-1}} \overset{4d}{=} M_\sigma^\top$$

Soit $p = \dfrac{1}{n!} \sum\limits_{\sigma\in\mathcal{S}_n} f_\sigma$.

6. Fixons $\tau \in \mathcal{S}_n$.

(a) Comme τ est un élément de $\mathcal{S}_n$, l'application τ^{-1} existe. On vérifie aisément que

$$\varphi_\tau \circ \varphi_{\tau^{-1}} = \mathrm{id}_{\mathcal{S}_n} \quad \text{et} \quad \varphi_{\tau^{-1}} \circ \varphi_\tau = \mathrm{id}_{\mathcal{S}_n}$$

Ainsi φ_τ est bijectif et on a $(\varphi_\tau)^{-1} = \varphi_{\tau^{-1}}$.

(b) On a :

$$\begin{aligned} f_\tau \circ p \;&=\; f_\tau \circ \Big(\frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} f_\sigma\Big) \;=\; \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} f_\tau \circ f_\sigma \\ &=\; \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} f_{\varphi_\tau(\sigma)} \overset{6a}{=} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma'\in\mathcal{S}_n} f_{\sigma'} = p \end{aligned}$$

7. On a $p \circ p = p$; en effet :

$$p \circ p \;=\; \Big(\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} f_\sigma\Big) \circ p \;=\; \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \underbrace{f_\sigma \circ p}_{\overset{7c)}{=} p} \;=\; \frac{1}{n!} \operatorname{card}(\mathcal{S}_n) p \;=\; p$$

8. (a) Montrer que $\operatorname{Im} p = \big\{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall \sigma \in \mathcal{S}_n, f_\sigma(x) = x\big\}$.

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, f_\sigma(x) = x$

Mq $x \in \operatorname{Im} p$, càd (comme p est un projecteur), mq $p(x) = x$.

$$p(x) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} f_\sigma(x) \overset{\text{hyp}}{=} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} x \;=\; \frac{1}{n!} \operatorname{card}(\mathcal{S}_n) x \;=\; x$$

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in \operatorname{Im} p$ donc $p(x) \overset{\star}{=} x$ (car p projecteur).

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Mq $f_\sigma(x) = x$.

$$f_\sigma(x) \;\overset{\star}{=}\; f_\sigma\big(p(x)\big) \;=\; \underbrace{f_\sigma \circ p}_{\overset{7c}{=}\ p}(x) \;=\; p(x) \;\overset{\star}{=}\; x$$

(b) Montrons que $\operatorname{Im} p = \operatorname{Vect}(x_0)$, où $x_0 = \sum_{i=1}^{n} e_i$.

$\boxed{\supset}$ Il suffit de montrer que $x_0 \in \operatorname{Im} p$ (WHY ?).

D'après 8a, il suffit de mq $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n,\ f_\sigma(x_0) = x_0$. Allons-y :

$$f_\sigma(x_0) \;=\; f_\sigma\Big(\sum_{i=1}^{n} e_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f_\sigma(e_i)}_{e_{\sigma(i)}} \overset{\text{why}}{=} \sum_{j=1}^{n} e_j \overset{\text{def}}{=} x_0$$

$\boxed{\subset}$ Soit $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \in \mathbb{R}^n$.

Supposons que $y \in \operatorname{Im} p$, càd (d'après 9a) supposons que $f_\sigma(y) = y$ pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

Montrons que $y \in \operatorname{Vect}(x_0)$, càd mq $\forall i,\ y_i = y_1$.

Fixons $i \in [\![1, n]\!]$.

Considérons la permutation τ de $\mathcal{S}_n$ qui permute 1 et i et qui laisse fixe les autres entiers.

On a alors par définition de τ :

$$f_\tau(y) = y_1 e_i + \cdots + y_i e_1 + \ldots$$

et

$$y = y_1 e_1 + \cdots + y_i e_i + \ldots$$

Ces deux vecteurs sont égaux par hypothèse.

En identifiant sur la base $\mathcal{B}$, on a alors $y_1 = y_i$. CQFD.

9. On a $p = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} f_\sigma$. En utilisant le caractère linéaire du procédé : « endomorphisme $\mapsto$ matrice dans une base fixée », on obtient

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(p) \;=\; \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f_\sigma) \text{ càd } P \;=\; \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} M_\sigma$$

10. Comme l'application « matrice $\mapsto$ transposée de la matrice » est linéaire (c'est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), on obtient

$$P^\top \;=\; \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} M_\sigma^\top \overset{4d}{=} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} M_{\sigma^{-1}} \overset{\text{why}}{=} \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} M_\tau \;=\; P$$

1. L'état initial de l'urne est 1 boule noire et 1 boule blanche.
Notons $T_{k,N}$ l'événement « tirer une noire au $k$ème tirage » et $A_{k,N}$ l'événement « ajouter une noire après le $k$ème tirage ».

→ On a
$$[X_1 = 0] = T_{1,N} \cap A_{1,B}$$
Ainsi $P(X_1 = 0) = \frac{1}{2}q$.

→ On a
$$[X_1 = 1] \; = \; T_{1,B} \cap A_{1,B} \bigsqcup T_{1,N} \; \cap A_{1,N}$$
Ainsi $P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}p$.

→ On a
$$[X_1 = 2] \; = \; T_{1,B} \cap A_{1,N}$$
Ainsi $P(X_1 = 2) = \frac{1}{2}$.

2. a) La variable aléatoire X_n est à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$.

b)

⋆ Si $[X_n = 0]$ est réalisé, l'urne contient deux boules blanches juste avant le tirage de rang $n+1$. Donc :
$$P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) = 0, \qquad P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) = 1, \qquad P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2) = 0$$

⋆ Si $[X_n = 1]$ est réalisé, l'état de l'urne avant le tirage suivant est $\{B, N\}$.
Ainsi :

$P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{2}q$, (on tire la boule noire et on la remplace par une blanche).

$P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}p$, (on tire la boule noire qui est remplacée par une noire)

$P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{2}$, (on tire la boule blanche)

⋆ Si $[X_n = 2]$ est réalisé, l'urne contient deux boules noires juste avant le tirage suivant et on est sûr de tirer une boule noire, que l'on remplace par une boule noire ou une boule blanche. Ainsi

$P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0) = 0$.

$P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) = q$ (on tire une boule noire qui est remplacée par une blanche)

$P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) = p$ (on tire une boule noire qui est remplacée par une noire).

3. a) En utilisant la formule des probabilités totales, on a $U_{n+1} = AU_n$ où
$$A = \begin{pmatrix} 0 & q/2 & 0 \\ 1 & p/2 & q \\ 0 & 1/2 & p \end{pmatrix}$$
Donc $U_n = A^n U_0$.

b) On obtient :

⋆ $\lambda = 1$. Une base de $\mathrm{Ker}(A - \lambda I)$ est $\begin{bmatrix} q^2 \\ 2q \\ 1 \end{bmatrix}$;

⋆ $\lambda = -q$. Une base de $\mathrm{Ker}(A - \lambda I)$ est $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$;

⋆ $\lambda = p/2$. Une base de $\mathrm{Ker}(A - \lambda I)$ est $\begin{bmatrix} -q \\ -p \\ 1 \end{bmatrix}$

La matrice A est donc semblable à la matrice $D = \mathrm{diag}(1, -q, \frac{p}{2})$.

Précisément, on a $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{bmatrix} q^2 & 1 & -q \\ 2q & -2 & -p \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ainsi, $A^n = PD^nP^{-1}$, donc $A^n = P\mathrm{diag}(1,\ (-q)^n,\ (\dfrac{p}{2})^n)P^{-1}$.
Comme $(-q)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $(\frac{p}{2})^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, chaque coefficient de A^n admet une limite, ce que l'on peut résumer :

$$A^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\mathrm{diag}(1,0,0)P^{-1}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $U_n = A^nU_0$. Donc $U_n = PD^nP^{-1}U_0$.

$$U_n = PD^nP^{-1}U_0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\mathrm{diag}(1,0,0)P^{-1}U_0$$

Donc la limite de chaque coeff de U_n existe.
Pour tout $k \in [\![0,2]\!]$, notons $\ell_k = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k)$.
Par ailleurs, on a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad U_{n+1} = AU_n$$

En passant à la limite dans chaque coefficient, on a

$$\begin{bmatrix} \ell_0 \\ \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \ell_0 \\ \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix}$$

Donc

$$\begin{bmatrix} \ell_0 \\ \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix} \text{ appartient à } \mathrm{Ker}(A - I)$$

Comme on connaît une base de $\mathrm{Ker}(A-I)$, on a donc

$$\begin{bmatrix} \ell_0 \\ \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} q^2 \\ 2q \\ 1 \end{bmatrix}$$

Comme $\ell_0 + \ell_1 + \ell_2 = 1$, on a $\mu = \dfrac{1}{(q+1)^2}$.
On a donc

$$U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{(q+1)^2}\begin{bmatrix} q^2 \\ 2q \\ 1 \end{bmatrix}$$

On a donc

$$\mathbb{P}(X_n = 0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{q^2}{(q+1)^2}$$

$$\mathbb{P}(X_n = 1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2q}{(q+1)^2}$$

$$\mathbb{P}(X_n = 2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{(q+1)^2}$$

1. (a) La famille $(S_0, S_1, \dots, S_n)$ est une famille de polynômes non nuls échelonnée en degré, donc c'est une famille libre.

   (b) La famille $(S_0, S_1, \dots, S_m)$ est une famille libre constituée de $m+1$ polynômes de $\mathbb{R}_m[X]$. Comme $\dim \mathbb{R}_m[X] = m+1$, cette famille est une base de $\mathbb{R}_m[X]$.
   Donc P s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des polynômes de cette famille.

2. (a) Fixons $k, n \in \mathbb{N}$.
   $\star$ Si $n \geqslant k$, alors $S_k(n) = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.
   $\star$ Si $n < k$, alors n est une racine de S_k, donc $S_k(n) = 0$.

   (b) (i) On a :
   $$\sum_{n=0}^{N} \frac{P(n)}{n!} = \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{m} a_k \frac{S_k(n)}{n!} = \sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{n=0}^{N} \frac{S_k(n)}{n!} \qquad (1)$$
   Or $S_k(n) = 0$ si $n \leqslant k-1$, on en déduit :
   $$\sum_{n=0}^{N} \frac{P(n)}{n!} = \sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{n=k}^{N} \frac{S_k(n)}{n!} = \sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{n=k}^{N} \frac{n!}{(n-k)!n!} = \sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{n=k}^{N} \frac{1}{(n-k)!}$$

   (ii) On a $\displaystyle\sum_{n=k}^{N} \frac{1}{(n-k)!} = \sum_{i=0}^{N-k} \frac{1}{i!} \xrightarrow[N\to\infty]{} \mathrm{e}$
   On déduit alors (m est fixé) la convergence de la série proposée, avec :
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} = \mathrm{e}\sum_{k=0}^{m} a_k$$

   (c) On pose $P(X) = X^2(X-1)\cdots(X-p+1)$.
   On a
   $$P(X) = XS_p = (X-p)S_p + pS_p = S_{p+1} + pS_p$$
   Les coordonnées de P dans la base $(S_k)_{0\leqslant k\leqslant p+1}$ de $\mathbb{R}_{p+1}[X]$ sont $(0, 0, \dots, 0, p, 1)$.
   Donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{n!}$ est convergente et :
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{n!} = (p+1)\mathrm{e}$$