Des petits problèmes

exercices

1000 Équation fonctionnelle et dérivabilité en 0

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et dérivable en 0. On suppose que

★ $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = \frac{2f(x)}{1+(f(x))^2}.$$

1. Montrer que $f(0) \in \{0, 1, -1\}$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) \in [-1, 1]$.
2. Dans cette question, on suppose que $f(0) = 1$ et on veut montrer que $f = 1$.
   Pour cela, on fixe $a \in \mathbb{R}^*$ et on pose $u_n = f\left(\frac{a}{2^n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Étudier la limite, le signe et la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire que $f(a) = 1$.
3. On suppose que $f(0) = -1$. Que peut-on en déduire ?
   Remarquer que $-f$ vérifie ★.
4. Dans cette question, on suppose que $f(0) = 0$.
   (4a) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) \in]-1, 1[$.
   (4b) Déterminer le domaine de définition de $y \mapsto \ln\left(\frac{1-y}{1+y}\right)$.
   Dans la suite, on pose
   $$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \ln\left(\frac{1-f(t)}{1+f(t)}\right) \end{array}$$
   (4c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ g(2x) = 2g(x)$.
   (4d) Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{g(u)}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} \ell$.
   (4e) Soit $a \in \mathbb{R}$. En considérant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 2^n g\left(\frac{a}{2^n}\right),$$
   montrer que $g(a) = \ell a$ et exprimer $f(a)$ en fonction de ℓ et de a.

1001 Équation fonctionnelle et continuité

On pose $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

★ $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

1. Déterminer les fonctions constantes de $\mathcal{E}$.

Dans les questions suivantes, on désigne par f une fonction non constante de l'ensemble $\mathcal{E}$.

2. Montrer que $f(0) = 1$ et que f est paire.
3. Montrer qu'il existe $h > 0$ tel que $\forall x \in [-h, h],\ f(x) \geqslant 0$.
4. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^{n_0}} \leqslant h$.
   On suppose que $f\left(\frac{1}{2^{n_0}}\right) \leqslant 1$.
   (4a) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f\left(\frac{1}{2^{n_0}}\right) = \cos\left(\frac{a}{2^{n_0}}\right)$ et $\frac{a}{2^{n_0}} \in [0, \frac{\pi}{2}]$
   (4b) Montrer que $\forall n \geqslant n_0,\ f\left(\frac{1}{2^n}\right) = \cos\left(\frac{a}{2^n}\right)$.
   (4c) Montrer que $\forall n \geqslant n_0,\ \forall p \in \mathbb{Z},\ f\left(\frac{p}{2^n}\right) = \cos\left(a\frac{p}{2^n}\right)$.
   (4d) On considère $Y = \left\{y \in \mathbb{R} \mid \exists (p, n) \in \mathbb{Z} \times [\![n_0, +\infty[\![,\ y = \frac{p}{2^n}\right\}$.
   Pour la culture, Y est un sous-ensemble des nombres dyadiques.
   (i) Que peut-on dire de f restreinte à Y ?
   (ii) Montrer que tout réel $x \in \mathbb{R}$ est la limite d'une suite $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Y.
   On dit que Y est une partie dense de $\mathbb{R}$.
   (4e) En déduire l'expression de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
5. Sans vouloir écrire tous les détails, expliquer comment traiter le cas $f\left(\frac{1}{2^{n_0}}\right) > 1$.
   On pourra commencer par justifier l'existence de $a \in \mathbb{R}$ tel que $f\left(\frac{1}{2^{n_0}}\right) = \operatorname{ch}\left(\frac{a}{2^{n_0}}\right)$.
   A-t-on besoin d'ajouter une condition sur $\frac{a}{2^{n_0}}$ comme précédemment ?
6. Déterminer $\mathcal{E}$.

1000

1. Dans ★, prenons $x = 0$.
   En posant $y = f(0)$, on obtient
   $$y = \frac{2y}{1+y^2} \quad \text{donc} \quad y(1+y^2) - 2y = 0.$$
   D'où $y \in \{-1, 0, 1\}$.

   Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrons que $|f(t)| \leqslant 1$.
   Dans ★, prenons $x = \frac{t}{2}$. En posant $a = f(\frac{t}{2})$, on obtient :
   $$f(t) = \frac{2a}{1+a^2} \quad \text{d'où} \quad |f(t)| = \frac{2|a|}{1+a^2}$$
   L'inégalité à montrer $|f(t)| \leqslant 1$ est équivalente à $2|a| \leqslant 1 + a^2$, car $1 + a^2 > 0$. Et cette dernière inégalité est équivalente à $(1 - |a|)^2 \geqslant 0$, qui est vérifiée !
2. — Étude de la limite.
   On a $\dfrac{a}{2^n} \to 0$ et f continue en 0 donc $u_n \to f(0) = 1$.
   — Étude du signe. Montrons que la suite u est strictement positive.
   Dans ★, prenons $x = \dfrac{a}{2^{n+1}}$, on obtient
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2}$$
   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les réels u_n et u_{n+1} ont le même signe.
   Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \leqslant 0$.
   Alors par une récurrence immédiate, on obtiendrait
   $$\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant 0.$$
   Puis par passage à la limite, on obtiendrait $1 \leqslant 0$, ce qui est absurde.
   Donc $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.
   — Étude de la monotonie.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
   $$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{2}{1+u_{n+1}^2}$$
   D'après la première question, on a $u_{n+1} \in [-1, 1]$, donc $u_{n+1}^2 \leqslant 1$, donc $\frac{2}{1+u_{n+1}^2} \geqslant 1$.
   En multipliant par $u_n \geqslant 0$, on obtient
   $$u_n \geqslant u_{n+1}.$$
   Donc la suite (u_n) est décroissante.
   — Récoltons toutes les informations. On a :
   $$\begin{cases} (u_n) \text{ converge vers } 1 \\ (u_n) \text{ est à valeurs dans } [-1,1] \\ (u_n) \text{ est décroissante} \end{cases}$$
   Il ne doit pas être difficile de montrer que (u_n) est constante égale à 1 ! Pour cela, il suffit d'écrire, que pour n fixé, on a
   $$\forall\, p \geqslant n, \quad u_p \leqslant u_n \leqslant 1$$
   Et en passant à la limite sur p (licite), on obtient $1 \leqslant u_n \leqslant 1$ d'où $u_n = 1$.
   Bref, la suite (u_n) est constante égale à 1, donc $u_0 = 1$, donc $f(a) = 1$.
3. L'hypothèse $f(0) = -1$ s'écrit $(-f)(0) = 1$.
   On est donc ramené à la question précédente pourvu que l'on arrive à montrer que $-f$ satisfait les mêmes conditions que f.
   Tout d'abord, la fonction $-f$ est continue et dérivable en 0 (par héritage), et comme f vérifie ★, on a
   $$-f(2x) = \frac{-2f(x)}{1+\big(-f(x)\big)^2} \qquad \text{d'où} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},\ (-f)(2x) = \frac{2(-f)(x)}{1+\big((-f)(x)\big)^2}$$
   Bilan : on en déduit que $-f$ est constante égale à 1, donc f est constante égale à -1.

4. (4a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on rappelle que $f(t) \in [-1,1]$.
Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \in \{-1,1\}$.
Définissons une suite (u_n) comme précédemment par $u_n = f\Big(\dfrac{a}{2^n}\Big)$.
Montrons ensuite par récurrence

$\diamondsuit$ $\qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_n| = 1$

— Initialisation. On a $u_0 = f(a)$, donc $|u_0| = 1$.
— Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n| = 1$. On a

$$u_n = \frac{2u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2} \quad \text{donc} \quad |u_n| = \left|\frac{2u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2}\right| \quad \text{donc} \quad 1 = \frac{2|u_{n+1}|}{1+u_{n+1}^2}$$

Donc $(|u_{n+1}|-1)^2 = 0$, d'où $|u_{n+1}| = 1$, ce qui clôt la récurrence.

Par le même argument qu'à la question précédente, on obtient $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0) = 0$.
Donc par passage à la limite dans $\diamondsuit$ (on utilise la continuité de la fonction valeur absolue en 0), on obtient $|0| = 1$, ce qui est absurde.
Donc $\forall\, t \in \mathbb{R},\ f(t) \in \,]-1,1[$.

(4b) Soit $y \in \mathbb{R}$. La fonction est définie en y si et seulement si $\begin{cases} 1+y \neq 0 \\ \dfrac{1-y}{1+y} > 0 \end{cases}$
En réalisant un tableau de signes, on obtient que le système équivaut à $y \in \,]-1,1[$.
Cela légitime la définition de la fonction g.

(4c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$g(2x) = \ln\left(\frac{1-\frac{2f(x)}{1+f(x)^2}}{1+\frac{2f(x)}{1+f(x)^2}}\right) = \ln\left(\frac{(1-f(x))^2}{(1+f(x))^2}\right) = 2g(x)$$

(4d) On sait que :
$\begin{cases} \text{la fonction } f \text{ est dérivable en 0 et } f(0) = 0 \\ \text{la fonction } y \mapsto \ln\Big(\dfrac{1-y}{1+y}\Big) \text{ est dérivable en } 0. \text{ WHY ?} \end{cases}$
Donc la fonction g qui est la composée de ces deux fonctions est dérivable en 0.
Ainsi, $\dfrac{g(u)}{u} = \dfrac{g(u)-g(0)}{u-0}$ admet une limite finie quand $u \to 0$

(4e)
- Pour commencer, notons que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 2^n g\left(\frac{2a}{2^{n+1}}\right) = 2^{n+1} g\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) = v_{n+1}.$$

Ainsi, la suite (v_n) est constante égale à $v_0 = g(a)$.
- Montrons maintenant que $g(a) = \ell a$.
Si $a = 0$ c'est évident.
Supposons donc que $a \neq 0$. On a

$\diamondsuit$ $\qquad \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = a \times \dfrac{g(\frac{a}{2^n})}{\frac{a}{2^n}}$

On a

$$\begin{cases} \dfrac{a}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ \dfrac{g(u)}{u} \xrightarrow[t\to 0]{} \ell \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad \frac{g(\frac{a}{2^n})}{\frac{a}{2^n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

En passant à la limite dans $\diamondsuit$, on obtient $g(a) = a\ell$.
- Pour finir. Comme $g(a) = a\ell$, on obtient

$$\frac{1-f(a)}{1+f(a)} = \mathrm{e}^{\ell a} \quad \text{donc} \quad 1-f(a) = \mathrm{e}^{\ell a} + \mathrm{e}^{\ell a} f(a) \quad \text{donc} \quad \underbrace{(1+\mathrm{e}^{\ell a})}_{>0} f(a) = 1-\mathrm{e}^{\ell a}.$$

Finalement, on a $f(a) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{\ell a}}{1+\mathrm{e}^{\ell a}}$.

1. Soit $f \in \mathcal{E}$ que l'on suppose constante égale à C.
Avec la relation ★, on a $C + C = 2C \times C$ donc $C = 0$ ou $C = 1$.
Réciproquement, les fonctions constantes égales à 0 et à 1 sont continues et vérifient ★.
2. • En prenant $x = y = 0$ dans ★, on obtient $f(0) = 0$ ou 1.
Supposons par l'absurde que $f(0) = 0$.
D'après ★ avec $y = 0$, on obtient alors $\forall\, x \in \mathbb{R},\ 2f(x) = 0$.
Donc f est constante égale à 0 ce qui n'est pas le cas.
Donc $f(0) = 1$.
• Prenons ★ avec $x = 0$. On obtient $\forall\, y \in \mathbb{R},\ f(y) + f(-y) = 2f(y)$ donc $f(y) = f(-y)$.
Ainsi, f est paire.
3. Comme f est continue en 0, il existe $h > 0$ tel que $\forall\, x \in [-h, h],\ |f(x) - f(0)| \leqslant \frac{1}{2}$.
Or $f(0) = 1$. Donc pour tout $x \in [-h, h]$, on a $-\frac{1}{2} + 1 \leqslant f(x)$ donc $f(x) \geqslant 0$.
4. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{2^{n_0}} \leqslant h$. On suppose que $f\Big(\dfrac{1}{2^{n_0}}\Big) \leqslant 1$

(4a) On a $f\Big(\dfrac{1}{2^{n_0}}\Big) \in [0, 1]$.

Posons $a = 2^{n_0} \operatorname{Arccos}\Big(f\Big(\dfrac{1}{2^{n_0}}\Big)\Big)$ (licite car la fonction Arccos est définie sur $[-1, 1]$).

⋆ On a $\cos\Big(\dfrac{a}{2^{n_0}}\Big) = f\Big(\dfrac{1}{2^{n_0}}\Big)$

⋆ On a $\dfrac{a}{2^{n_0}} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ car pour tout $t \in [0, 1]$, on a $\operatorname{Arccos} t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Donc ce candidat pour a convient.

(4b) Avec $y = x$ dans ★, on obtient

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) + 1 = 2f(x)^2$$

D'où

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f\Big(\frac{1}{2^n}\Big) + 1 \ = \ 2f\Big(\frac{1}{2^{n+1}}\Big)^2.$$

Montrons par récurrence

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad f\Big(\frac{1}{2^n}\Big) \ = \ \cos\Big(\frac{a}{2^n}\Big)$$

Initialisation.
La propriété est évidente pour $n = n_0$, par définition de a.

Hérédité. Soit $n \geqslant n_0$ tel que $\mathcal{H}_n$.
D'après la remarque précédente, on a

$$f\Big(\frac{1}{2^n}\Big) + 1 \ = \ 2f\Big(\frac{1}{2^{n+1}}\Big)^2.$$

D'après $\mathcal{H}_n$, on a donc

$$\cos\Big(\frac{a}{2^n}\Big) + 1 \ = \ 2f\Big(\frac{1}{2^{n+1}}\Big)^2.$$

Or $1 + \cos u = 2\cos^2\Big(\dfrac{u}{2}\Big)$, d'où

$$2\cos^2\Big(\frac{a}{2^{n+1}}\Big) \ = \ 2\, f\Big(\frac{1}{2^{n+1}}\Big)^2.$$

Ainsi (attention au « plus ou moins 1 ») :

$$\cos\Big(\frac{a}{2^{n+1}}\Big) = \pm f\Big(\frac{1}{2^{n+1}}\Big)$$

Comme $0 \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{2^{n_0}} \leqslant h$, on a $f\Big(\dfrac{1}{2^{n+1}}\Big) \ \geqslant 0$
Comme $0 \leqslant \dfrac{a}{2^{n+1}} \leqslant \dfrac{a}{2^{n_0}} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, on a $\cos\Big(\dfrac{a}{2^{n+1}}\Big) \geqslant 0$.
D'où $\cos\Big(\dfrac{a}{2^{n+1}}\Big) = f\Big(\dfrac{1}{2^{n+1}}\Big)$.
D'où $\mathcal{H}_{n+1}$.

(4c) On fixe $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant n_0$.
Montrons
$$\forall\, p \in \mathbb{Z}, \quad f\Big(\frac{p}{2^n}\Big) = \cos\Big(a\frac{p}{2^n}\Big)$$

• Commençons par le cas $p \in \mathbb{N}$. Le cas $p = 0$ est immédiat.
Procédons par récurrence forte, et notons pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,
$$\mathcal{H}_p : \text{« } f\Big(\frac{p}{2^n}\Big) = \cos\Big(a\frac{p}{2^n}\Big) \text{ ».}$$

— La question précédente fournit $\mathcal{H}_1$.

— Soit $p \geqslant 1$ tel que $\mathcal{H}_0, \dots, \mathcal{H}_p$.
Montrons $\mathcal{H}_{p+1}$.
En prenant $x = \dfrac{p}{2^n}$ et $y = \dfrac{1}{2^n}$, il vient
$$f\Big(\frac{p+1}{2^n}\Big) + f\Big(\frac{p-1}{2^n}\Big) \;=\; 2f\Big(\frac{p}{2^n}\Big)f\Big(\frac{1}{2^n}\Big)$$
En utilisant la relation de la question (4b), on a
$$f\Big(\frac{p+1}{2^n}\Big) + f\Big(\frac{p-1}{2^n}\Big) \;=\; 2f\Big(\frac{p}{2^n}\Big)\cos\Big(\frac{a}{2^n}\Big)$$
D'après $\mathcal{H}_p$ et $\mathcal{H}_{p-1}$, on a $f\Big(\dfrac{p}{2^n}\Big) = \cos\Big(a\dfrac{p}{2^n}\Big)$ et $f\Big(\dfrac{p-1}{2^n}\Big) = \cos\Big(a\dfrac{p-1}{2^n}\Big)$.
On remplace, il vient
$$f\Big(\frac{p+1}{2^n}\Big) \;=\; 2\cos\Big(a\frac{p}{2^n}\Big)\cos\Big(\frac{a}{2^n}\Big) - \cos\Big(a\frac{p-1}{2^n}\Big)$$
et on termine avec la formule de trigonométrie suivante :
$$2\cos(u)\cos(v) = \cos(u+v) + \cos(u-v)$$
D'où
$$f\Big(\frac{p+1}{2^n}\Big) \;=\; \cos\Big(a\frac{p+1}{2^n}\Big)$$

• On étend ensuite ce résultat à $p \in \mathbb{Z}$ grâce à la parité de f et de cos.

(4d) On considère $Y = \Big\{y \in \mathbb{R} \mid \exists\,(p,n) \in \mathbb{Z} \times [\![n_0, +\infty[\![,\ y = \dfrac{p}{2^n}\Big\}$.
Pour la culture, Y est un sous-ensemble des nombres dyadiques.

(i) Que peut-on dire de f restreinte à Y ?
D'après la question précédente, on a montré que
$$\forall\, y \in Y, \quad f(y) = \cos(ay)$$
Ainsi, f et $x \mapsto \cos(ax)$ coïncident sur Y.

(ii) Montrer que tout réel est la limite d'une suite $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Y.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
On considère la suite $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\forall\, m \in \mathbb{N},\ y_m = \frac{\lfloor 2^{m+n_0}x \rfloor}{2^{m+n_0}}$$
Par construction, la suite $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans Y.
De plus, comme $\lfloor t \rfloor \underset{t\to+\infty}{\sim} t$, on a $\lfloor 2^{m+n_0}x \rfloor \underset{m\to+\infty}{\sim} 2^{m+n_0}x$.
D'où $y_m \underset{m\to+\infty}{\sim} \dfrac{2^{m+n_0}x}{2^{m+n_0}} = x$. Autrement dit, $y_m \to x$.

(4e) Montrons que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \cos(ax)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe une suite $(y_m) \in Y^{\mathbb{N}}$ telle que $y_m \to x$.
Or f et $x \mapsto \cos(ax)$ coïncident sur Y, donc :

$\diamondsuit$ $$\forall\, m \in \mathbb{N},\ f(y_m) = \cos(ay_m)$$

On a $y_m \to x$ et f continue en x, d'où $f(y_m) \to f(x)$.
On a $ay_m \to ax$ et cos continue en ax, d'où $\cos(ay_m) \to \cos(ax)$.
Par passage à la limite dans $\diamondsuit$, on a $f(x) = \cos(ax)$.

5. On procède exactement de la même façon.

   On introduit a tel que $f\left(\frac{1}{2^{n_0}}\right) = \operatorname{ch}\left(\frac{a}{2^{n_0}}\right)$.

   L'existence d'un tel a provient du fait que $f\left(\frac{1}{2^{n_0}}\right) \geqslant 1$ et la fonction ch a pour image $[1, +\infty[$.

   Donc il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{ch}(b) = f\left(\frac{1}{2^{n_0}}\right)$. Il n'y a plus qu'à poser $a = 2^{n_0} b$.

   Remarque : un tel b n'est pas nécessairement unique ; il devient unique si on impose $b \in [0, +\infty[$ ou si on impose $b \in]-\infty, 0]$.

   On n'a pas besoin d'imposer une condition sur $\frac{a}{2^{n_0}}$, car cette condition était là pour forcer la positivité de $\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)$. Ici, la positivité de $\operatorname{ch}\left(\frac{a}{2^n}\right)$ est automatique (puisque ch est à valeurs dans $[1, +\infty[$) !

   On a précédemment utilisé les deux formules de trigonométrie circulaire

   $$1 + \cos u = 2\cos^2\left(\frac{u}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad 2\cos(u)\cos(v) = \cos(u+v) + \cos(u-v)$$

   Comme on a les pendants en trigonométrie hyperbolique :

   $$1 + \operatorname{ch} u = 2\operatorname{ch}^2\left(\frac{u}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad 2\operatorname{ch}(u)\operatorname{ch}(v) = \operatorname{ch}(u+v) + \operatorname{ch}(u-v)$$

   tout s'adapte à merveille !

   Et on montre dans ce cas (celui pour lequel $f\left(\frac{1}{2^{n_0}}\right) \geqslant 1$) que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \operatorname{ch}(ax)$.

   Remarque. On a même pu prendre une inégalité large dans $f\left(\frac{1}{2^{n_0}}\right) \geqslant 1$, alors que l'énoncé signale $f\left(\frac{1}{2^{n_0}}\right) > 1$. On pourrait trouver cela étonnant que dans le cas d'égalité $f\left(\frac{1}{2^{n_0}}\right) = 1$, on obtient que f est à la fois de la forme $x \mapsto \cos(a'x)$ et $x \mapsto \operatorname{ch}(a''x)$.
   Mais ce n'est pas contradictoire, car dans ce cas d'égalité, on trouve d'une part $a' = 0$ de sorte que $f : x \mapsto 1$; et on trouve d'autre part $a'' = 0$ de sorte que $f : x \mapsto 1$.

   Bref, lorsque $f\left(\frac{1}{2^{n_0}}\right) = 1$, on trouve que f est constante égale à 1.

6. Nous venons de rédiger la phase d'Analyse. Autrement dit, nous avons montré que $\mathcal{E}$ est inclus dans l'ensemble $\mathcal{F}$ constitué des fonctions de la forme $x \mapsto \cos(ax)$ avec $a \in \mathbb{R}$, et $x \mapsto \operatorname{ch}(ax)$ avec $a \in \mathbb{R}$ et de la fonction nulle.
   L'autre inclusion (qui constitue la phase de Synthèse) est facile à vérifier avec quelques calculs. Il ne faut pas oublier de préciser que toutes ces fonctions sont bien continues (ce sont des fonctions usuelles !).