

1. — La fonction f_n est continue (en tant que fonction polynomiale)
 — On a $f_n(0) = -1$ et $\lim_{+\infty} f_n = +\infty$, donc 0 est une valeur intermédiaire entre $f_n(0)$ et $\lim_{+\infty} f_n$.

Avec ces deux points et le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il **existe** un zéro dans $[0, +\infty[$ pour la fonction f_n .

- De plus, f_n est strictement croissante (en tant que somme de fonctions strictement croissantes et d'une fonction constante égale à -1).

Cette stricte monotonie prouve l'**unicité** du zéro.

Bilan : on a montré qu'il **existe un unique** $u_n \in \mathbb{R}^+$ tel que $f_n(u_n) = 0$.

2. $\triangleright$ On a $f_1 : x \mapsto x - 1$. L'unique zéro de f_1 est 1, donc $u_1 = 1$.

$\triangleright$ Montrons que $\forall n \geq 2, u_n \in]0, 1[$.

Soit $n \geq 2$. Pour bien comprendre la situation, voici ce que nous avons à notre disposition :

x	0	u_n	$+\infty$
Variations de f_n	-1	0	$+\infty$

Petit zoom sur $[0, 1]$ (on a $n - 1 > 0$, WHY ?)

x	0	u_n	1
Variations de f_n	-1	0	$n - 1$

Écrivons ce que nous voyons. On a

$$-1 < 0 < n - 1$$

ce qui s'écrit encore

$$f_n(0) < f_n(u_n) < f_n(1)$$

Par croissance (la stricte croissance n'est pas utile ici), on en déduit $0 < u_n < 1$ (en effet, si on avait $0 \geq u_n$, on aurait par croissance de f_n , l'inégalité $f_n(0) \geq f_n(u_n)$, ce qui n'est pas ; idem pour si on avait $u_n \geq 1$, etc.)

Si on avait eu la question suivante : montrer que $u_n \in [0, 1]$, voilà ce que nous aurions écrit.

On a

$$-1 \leq 0 \leq n - 1$$

ce qui s'écrit encore

$$f_n(0) \leq f_n(u_n) \leq f_n(1)$$

Par stricte croissance (la stricte croissance est utile ici), on en déduit $0 \leq u_n \leq 1$ (en effet, si on avait $0 > u_n$, on aurait par stricte croissance de f_n , l'inégalité $f_n(0) > f_n(u_n)$, ce qui n'est pas ; idem pour si on avait $u_n > 1$, etc.)

3. • Étudions la monotonie de u .

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$.

Deux solutions possibles : étudier $f_n(u_{n+1})$ ou $f_{n+1}(u_n)$. Je rédige la seconde solution.

à retenir : Pour comparer u_n et u_{n+1} , on va comparer leur image par f_{n+1} qui est strictement croissante.

$\triangleright$ Pour commencer, on cherche une relation entre f_{n+1} et f_n .

On a $f_n : x \mapsto x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1$, donc

$$\forall x, \quad f_{n+1}(x) = x^{n+1} + f_n(x)$$

▷ On évalue la relation précédente en u_n , en utilisant que $f_n(u_n) = 0$.

On obtient

$$f_{n+1}(u_n) = u_n^{n+1} + 0$$

▷ Cherchons à comparer $f_{n+1}(u_n)$ et $f_{n+1}(u_{n+1})$, autrement dit à comparer u_n^{n+1} et 0.

D'après la question précédente, on a $u_n \geq 0$, d'où $u_n^{n+1} \geq 0$, ce qui s'écrit encore $f_{n+1}(u_n) \geq f_{n+1}(u_{n+1})$.

Comme f_{n+1} est strictement croissante, on en déduit $u_n \geq u_{n+1}$ (en effet, si on avait $u_n < u_{n+1}$, on aurait, par stricte croissance de f_{n+1} , l'inégalité $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$, ce qui n'est pas).

Bilan : la suite u est décroissante.

• La suite u est décroissante et minorée (par 0), donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge.

4. ** D'après la question précédente, la suite u converge vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$ que l'on cherche à déterminer.

Pour cela, commençons par montrer que $\lim u_n^n$ existe.

On a

$$\forall x \neq 1, \quad f_n(x) = x \frac{1 - x^n}{1 - x} - 1$$

Comme $u_n \neq 1$ pour $n \geq 2$, on a, en prenant $x = u_n$:

$$\forall n \geq 2, \quad 0 = u_n \frac{1 - u_n^n}{1 - u_n} - 1$$

On a envie de passer à la limite dans cette égalité ; ce n'est pas encore licite, car on ne sait pas si $\lim u_n^n$ existe.

Prouvons-le.

On a (WHY ?)

$$\forall n \geq 2, \quad 0 \leq u_n^n \leq u_2^n$$

Or $u_2 \in]-1, 1[$, donc $u_2^n \rightarrow 0$.

D'après le théorème des Gendarmes, on en déduit que $u_n^n \rightarrow 0$.

Reprenons ce que l'on voulait faire, qui est maintenant licite. On obtient (car $1 - \ell \neq 0$, WHY ?) :

$$0 = \ell \frac{1 - 0}{1 - \ell} - 1$$

En résolvant cette équation d'inconnue ℓ , on trouve $\ell = \frac{1}{2}$.

1. On procède par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{H}_n$:

$$1 < x_n < y_n$$

- $\mathcal{H}_0$ est vraie : c'est immédiat d'après l'énoncé.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}_n$ est vraie. Montrons $\mathcal{H}_{n+1}$.

D'après $\mathcal{H}_n$, on a $x_n > 1$ et $y_n > 1$.

$$\star \text{ On a donc } x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\underbrace{x_n}_{>1} + \underbrace{\sqrt{y_n}}_{>1} \right) > 1$$

$\star$ On a

$$y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{1}{2} \left((y_n - x_n) - (\sqrt{y_n} - \sqrt{x_n}) \right) = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\sqrt{y_n} - \sqrt{x_n}}_{>0 \text{ cf. } \mathcal{H}_n} \left(\underbrace{(\sqrt{y_n} + \sqrt{x_n})}_{>1 \text{ cf. } \mathcal{H}_n} - 1 \right) \right) > 0$$

Autre solution.

Remarquer que $t \mapsto t - \sqrt{t}$ est strictement croissante sur $[\frac{1}{4}, +\infty[$, donc sur $]1, +\infty[$.

D'après $\mathcal{H}_n$, on a $1 < x_n < y_n$. Donc par stricte croissante, on a $x_n - \sqrt{x_n} < y_n - \sqrt{y_n}$. Et ainsi, $y_{n+1} - x_{n+1} > 0$.

BILAN : $1 < x_{n+1} < y_{n+1}$, donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- D'après le principe de récurrence, $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{2}(\sqrt{x_n} - y_n)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Comme } 1 < x_n, \text{ on a } \sqrt{x_n} < x_n. \\ \text{On a aussi } x_n < y_n. \end{array} \right\} \text{ Donc } \sqrt{x_n} < y_n$$

On a mq : $\forall n \in \mathbb{N}, y_{n+1} - y_n < 0$, donc (y_n) est strictement décroissante.

3. La suite y est décroissante et minorée par 1.

D'après le théorème de la limite monotone, la suite y converge.

4. Pour tout n , on a $\sqrt{x_n} = 2y_{n+1} - y_n$. La suite $(y_n)_{n \geq 0}$ converge (donc la suite $(y_{n+1})_{n \geq 0}$ aussi !). En tant que différence de deux suites convergentes, la suite $(\sqrt{x_n})_{n \geq 0}$ converge. Donc la suite (x_n) converge, par continuité de la fonction carré.
5. Les suites (x_n) et (y_n) convergent. On peut donc passer à la limite dans :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \sqrt{y_n}) \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n + \sqrt{x_n}) \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} \ell_x = \frac{1}{2}(\ell_x + \sqrt{\ell_y}) \\ \ell_y = \frac{1}{2}(\ell_y + \sqrt{\ell_x}) \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} \ell_x = \sqrt{\ell_y} \\ \ell_y = \sqrt{\ell_x} \end{cases}$$

6. Reprenons le résultat de la question précédente.

$$\begin{cases} \ell_x = \sqrt{\ell_y} \\ \ell_y = \sqrt{\ell_x} \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} \ell_x^2 = \ell_y \\ \ell_y^2 = \ell_x \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} \ell_x^4 = \ell_x \\ \ell_y^4 = \ell_y \end{cases}$$

Rappel : l'équation $t^4 = t$ a deux solutions dans $\mathbb{R}$, qui sont 1 et 0 (preuve?).

Pour tout n , on a $1 < x_n < y_n$.

Donc par passage à la limite dans les inégalités larges, on obtient $1 \leq \ell_x \leq \ell_y$.

Bilan : $\ell_x = 1$ et $\ell_y = 1$

Autre solution (très similaire).

On a $\ell_y = \sqrt{\ell_x}$.

En passant à la limite dans $1 < x_n < y_n$, on obtient alors $1 \leq \ell_x \leq \sqrt{\ell_x}$,

donc $1 \leq \sqrt{\ell_x} \leq \ell_x \leq \sqrt{\ell_x}$. Donc $\ell_x = \sqrt{\ell_x}$. Donc $\ell_x \in \{0; 1\}$.

Comme $1 \leq \ell_x$, on a forcément $\ell_x = 1$.

Il est clair que les suites u et v sont bien définies (on prend bien la racine-carrée d'un nombre positif ou nul).

- Commençons par prouver que $\forall n \geq 1, u_n \leq v_n$.

Soit $n \geq 1$.

En posant $x = u_{n-1}$ et $y = v_{n-1}$, on voit que u_n est de la forme $\sqrt{xy}$ et v_n est de la forme $\frac{x+y}{2}$.

D'après l'inégalité arithmético-géométrique, on a $u_n \leq v_n$.

- Montrons que $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

Soit $n \geq 1$. Étudions la différence $u_{n+1} - u_n$.

On a $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - u_n = \sqrt{u_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})$ qui est positif d'après le point précédent et le fait que la fonction racine-carrée est croissante.

- Montrons que $(v_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

Soit $n \geq 1$. Étudions la différence $v_{n+1} - v_n$.

On a $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2}$ qui est négatif d'après le premier point.

- On n'a pas encore montré que $\lim(u_n - v_n) = 0$, donc on ne peut pas encore dire que les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes.

Cependant, on peut reprendre les idées de la démonstration du théorème du cours qui dit que deux suites adjacentes convergent vers la même limite. Allons-y.

D'après les trois points précédents, on a

$$\forall n \geq 1, u_1 \leq u_n \leq v_n \leq v_1$$

La suite u est croissante majorée (par v_1) donc converge (d'après le th de la limite monotone).

La suite v est décroissante minorée (par u_1) donc converge (d'après le th de la limite monotone).

- Montrons maintenant que u et v convergent vers la **même limite**.

Il faut regarder où l'on voit du $u_n - v_n$ dans ce qui précède.

Et bien, par exemple, dans le troisième point. On voit $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2}$.

Ainsi $u_n - v_n = 2(v_{n+1} - v_n)$. On passe à la limite dans cette égalité en utilisant que v converge. On en déduit que $\lim(u_n - v_n) = 0$.

- On a vu que u et v convergent et que $\lim(u_n - v_n) = 0$, donc u et v convergent vers la même limite.