

Programme de colle n° 1

semaine du 25 septembre 2023

Le thème de la colle est « début de l'année : logique », la trigonométrie, et les connaissances de terminale sur les nombres complexes. Pour être plus précis, voir le programme dans les pages suivantes.

Remarque pour les colleurs.

J'ai mis en rouge pâle, dans le programme officiel (page suivante), les quelques points non encore traités.

Pas encore officiellement de symbole Σ et $\prod$.

Pas de formule du binôme de Newton,

Pas de $a^n - b^n$, pas de coefficients binomiaux etc.

Pas de calcul de $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$.

Pas de racine n -ème pour l'instant.

Pas de géométrie avec les nombres complexes pour l'instant.

Preuves et petits exercices à connaître (questions de difficulté inégale...)

Début de l'année

- Montrer $\forall x, y \in \mathbb{R}, x = y \iff (\forall t \in \mathbb{R}, xt = yt)$

- Montrer

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}^*, (1+x)^n \geq 1+nx$$

- Montrer l'égalité d'ensembles $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists t \in \mathbb{R}^+, x = t^2 + 1\} = [1, +\infty[$
- Toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se décompose de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire
- Montrer que l'implication suivante est fausse :

$$\forall u, v, u', v' \in \mathbb{R}, u + v\sqrt{3} = u' + v'\sqrt{3} \implies u = u' \text{ et } v = v'$$

et montrer que l'implication suivante est vraie :

$$\forall u, v, u', v' \in \mathbb{Z}, u + v\sqrt{3} = u' + v'\sqrt{3} \implies u = u' \text{ et } v = v'$$

- Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

- Soit $y \in \mathbb{R}$.

Déterminer, en fonction de y , l'ensemble des solutions de l'équation $-x + \sqrt{x^2 + 3} = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Nombres complexes et trigonométrie

- Formule de l'angle moitié et les formules du type $\cos p + \cos q$ qui s'en déduisent.
- Inégalité triangulaire (avec cas d'égalité).
- Linéariser $\sin^3 \theta$.
- Soit $\theta \in [0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$. Donner la forme trigonométrique de $z = 1 + e^{i\theta}$ en fonction de θ .
- Pour tout $a \in \mathbb{C}^*$, il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $e^z = a$.
- Tout complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposées.
- Déterminer sous forme algébrique les racines carrées de $21 - 20i$.
- Les racines cubiques de l'unité sont

$$1 \quad \text{et} \quad j = e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad \text{et} \quad j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \bar{j}$$

a) Rudiments de logique

Quantificateurs.	L'emploi de quantificateurs en guise d'abréviation est exclu.
Implication, contraposition, équivalence.	Les étudiants doivent savoir formuler la négation d'une proposition.
Modes de raisonnement : par disjonction des cas, par contraposition, par l'absurde, par analyse-synthèse.	Le raisonnement par analyse-synthèse est l'occasion de préciser les notions de condition nécessaire et condition suffisante.
Raisonnement par récurrence (simple, double, forte).	Toute construction et toute axiomatique de $\mathbb{N}$ sont hors programme.

b) Ensembles

Ensemble, appartenance. Ensemble vide.	
Inclusion. Partie (ou sous-ensemble).	
Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, complémentaire.	Notation $A \setminus B$ pour la différence et $E \setminus A$, $\bar{A}$ et A^c pour le complémentaire.
Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.	
Ensemble des parties d'un ensemble.	Notation $\mathcal{P}(E)$.
Recouvrement disjoint, partition	

d) Trigonométrie

Cercle trigonométrique. Paramétrisation par cosinus et sinus.	
Relation de congruence modulo 2π sur $\mathbb{R}$.	Notation $a \equiv b [2\pi]$.
Cosinus et sinus de $\pi \pm x$, de $\frac{\pi}{2} \pm x$.	Les étudiants doivent savoir retrouver ces résultats et résoudre des équations et inéquations trigonométriques simples en s'aidant du cercle trigonométrique.
Cosinus et sinus des angles usuels.	On présente une justification géométrique de l'une de ces formules. Les étudiants doivent savoir retrouver rapidement les formules donnant $\cos(a) \cos(b)$, $\cos(a) \sin(b)$, $\sin(a) \sin(b)$.
Formules d'addition $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$. Cas particulier des formules de duplication : $\cos(2a)$, $\sin(2a)$.	On justifie les formules donnant les fonctions dérivées de sinus et cosinus vues en classe de terminale.
Fonctions circulaires cosinus et sinus.	
Pour $x \in \mathbb{R}$, inégalité $ \sin(x) \leq x $.	
Fonction tangente.	Notation $\tan$. Dérivée, variations, représentation graphique.
Tangente de $\pi \pm x$. Tangente des angles usuels.	Interprétation sur le cercle trigonométrique.
Formule d'addition $\tan(a \pm b)$.	

Nombres complexes (le début)**a) Nombres complexes**

Parties réelle et imaginaire.	La construction de $\mathbb{C}$ est hors programme.
Opérations sur les nombres complexes.	
Brève extension du calcul de $\sum_{k=0}^n x^k$, de la factorisation de $a^n - b^n$, de la formule du binôme.	

Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.

On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère ortho-normé direct (« plan complexe »).

b) Conjugaison et module

Conjugaison, compatibilité avec les opérations.

Module.

Relation $|z|^2 = z\bar{z}$, module d'un produit, d'un quotient.

Inégalité triangulaire, cas d'égalité.

Image du conjugué dans le plan complexe.

Interprétation géométrique de $|z - z'|$, cercles et disques.

c) Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble des nombres complexes de module 1. Définition de e^{it} pour $t \in \mathbb{R}$.

Exponentielle d'une somme.

Formules d'Euler. Technique de l'angle moitié : factorisation de $1 \pm e^{it}$, de $e^{ip} \pm e^{iq}$.

Notation $\mathbb{U}$.

Les étudiants doivent savoir retrouver les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q)$, $\sin(p) \pm \sin(q)$.

Linéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^n \cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^n \sin(kt)$.

Formule de Moivre.

Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.

d) Forme trigonométrique

Forme trigonométrique $re^{i\theta}$ ($r > 0$) d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient.

Transformation de $a \cos t + b \sin t$ en $A \cos(t - \varphi)$.