

# Programme de colle n° 10

semaine du 11 décembre 2023

## Remarque pour les colleurs.

Le thème de la colle est « Suites numériques » et « début de l'algèbre linéaire ».

PAS encore d'applications linéaires. Seulement des espaces vectoriels, mais seulement pour les questions de cours.

Pour être plus précis, voir le programme dans les pages suivantes.

## Du chapitre « Suites numériques »

- Preuve de  $\ln(n+1) - \ln n \sim \frac{1}{n}$  et  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$ .

- Savoir prouver :

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'équation  $x + \ln x = n$  possède une unique solution que l'on notera  $x_n$ .

La suite  $(x_n)$  est croissante, tend vers  $+\infty$  et on a  $x_n \sim n$ , puis  $x_n - n \sim -\ln n$ .

Autrement dit, on a le développement asymptotique à deux termes :  $x_n = n - \ln n + o(\ln n)$ .

- Savoir donner un équivalent simple de :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \quad v_n = \sqrt[n]{n} \quad w_n = \left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \quad x_n = \left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \quad y_n = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n}$$

On pourra utiliser librement que si  $\alpha_n \rightarrow 0$ , alors  $\sin \alpha_n \sim \alpha_n$ , ainsi que  $\ln(1 + \alpha_n) \sim \alpha_n$  et  $e^{\alpha_n} - 1 \sim \alpha_n$ .

- Une série de Vrai/Faux :

(a)  ~~$(\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in ]-1, 1[) \implies u_n^n \rightarrow 0$~~  mais  $q \in ]-1, 1[ \implies q^n \rightarrow 0$

(b)  $u_n \rightarrow 0 \implies u_n^n \rightarrow 0$

(c)  $u_n \rightarrow \ell \in ]-1, 1[ \implies u_n^n \rightarrow 0$

(d)  ~~$u_n \rightarrow 1 \implies u_n^n \rightarrow 1$~~

(e)  ~~$(\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1) \implies u_n^n \rightarrow +\infty$~~  mais  $q > 1 \implies q^n \rightarrow +\infty$

(f)  $u_n \rightarrow \ell > 1 \implies u_n^n \rightarrow +\infty$

## Un peu du chapitre « Espaces vectoriels »

Pour les colleurs. Quand rien n'est précisé,  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel « quelconque », avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  (qui sont des corps infinis!)

- Voici des parties de  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Lesquelles sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ ?

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \quad \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \quad \text{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \quad \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K}) \quad \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$$

- Soit  $F$  une partie de  $E$  stable par combinaison linéaire. On a :  $0_E \in F \iff F$  est non vide.

- Un sous-espace vectoriel de  $E$  est un ensemble  $\begin{cases} \text{fini} & \text{s'il est réduit à } \{0_E\} \\ \text{infini} & \text{sinon} \end{cases}$

- L'intersection et la somme de deux sev de  $E$  est un sev de  $E$ .

- Pas de Loi de Morgan avec la somme et l'intersection d'espaces vectoriels  ~~$H \cap (F+G) = H \cap F + H \cap G$~~

En revanche, une inclusion est toujours vraie, laquelle?

Donner un contre-exemple dans  $E = \mathbb{R}^2$ .

- Soit  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Posons  $H = \{M \in E \mid \text{tr}(M) = 0\}$  et  $D = \text{Vect}(I)$ . Montrer que  $H$  et  $D$  sont supplémentaires dans  $E$ .

- Soit  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions dérivables en 0 (c'est bien un  $\mathbb{R}$ -ev, WHY?).

Montrer que  $F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$  et  $G = \{x \mapsto ax + b, a, b \in \mathbb{R}\}$  sont supplémentaires dans  $E$ .

- Une famille est liée si et seulement si un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.

- Déterminer une base de  $H = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}) \mid \text{tr}(A) = 0\}$ .

- Soit  $G = \{X \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0\}$  où  $A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 6 \end{bmatrix}$ . Déterminer une famille base de  $G$ .

# Nombres réels et suites numériques

## CONTENUS

## CAPACITÉS & COMMENTAIRES

### a) Propriété de la borne supérieure

Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de  $\mathbb{R}$ .  
Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de  $\mathbb{R}$  admet une borne supérieure (resp. inférieure).  
Une partie  $X$  de  $\mathbb{R}$  est un intervalle si et seulement si pour tous  $a, b \in X$  tels que  $a \leq b$ ,  $[a, b] \subset X$ .

Notations  $\sup X$ ,  $\inf X$ .  
On convient que  $\sup X = +\infty$  si  $X$  est non majorée.

### b) Généralités sur les suites réelles

Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone.  
Mode de définition d'une suite réelle : explicite, implicite, par récurrence.

Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée si et seulement si  $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée.

### c) Limite d'une suite réelle

Limite finie ou infinie d'une suite.  
Unicité de la limite.  
Suite convergente, divergente.  
Toute suite convergente est bornée.  
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.  
Passage à la limite d'une inégalité large.  
Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell > 0$ , alors  $u_n > 0$  à partir d'un certain rang.  
Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite  $+\infty$ ), par majoration (limite  $-\infty$ ).

Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.  
Notations  $u_n \rightarrow \ell$ ,  $\lim u_n$ .

Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle.

Utilisation d'une majoration de la forme  $|u_n - \ell| \leq v_n$ , où  $(v_n)$  converge vers 0.

### d) Suites monotones

Théorème de la limite monotone.  
Théorème des suites adjacentes.  
Approximations décimales d'un réel.

Valeurs décimales approchées à la précision  $10^{-n}$  par défaut et par excès. Tout réel est limite d'une suite de rationnels.

### e) Suites extraites

Suite extraite.  
Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite.

Tout développement théorique sur les suites extraites est hors programme.  
Utilisation pour montrer la divergence d'une suite.  
Si  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  tendent vers  $\ell$ , alors  $(u_n)$  tend vers  $\ell$ .  
Le théorème de Bolzano-Weierstrass est hors programme.

### f) Suites complexes

Brève extension des définitions et résultats précédents.

Caractérisation de la limite en termes de parties réelle et imaginaire.

### g) Suites particulières

Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.

Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants.

Pour une relation de récurrence  $u_{n+1} = au_n + b$  où  $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$  et  $b \in \mathbb{C}$ , recherche d'une solution constante, détermination des solutions.

## CONTENUS

Présentation de l'étude des suites définies par une relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$  sur quelques exemples simples. Représentation géométrique. Si  $(u_n)$  converge vers un élément  $\ell$  en lequel  $f$  est continue, alors  $f(\ell) = \ell$ .

## CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Cette étude est l'occasion d'introduire la notion d'intervalle stable par une fonction. Pour l'étude de la monotonie de  $(u_n)$ , on souligne l'intérêt, d'une part, de l'étude du signe de  $f(x) - x$ , et, d'autre part, de l'utilisation de la croissance éventuelle de  $f$ .

---