

Programme de colle n° 12

semaine du 15 janvier 2024

Remarque pour les colleurs. Le thème de la colle est « **début de l'algèbre linéaire** » et « **limites et continuité** »

Nous n'avons pas encore traité la « dimension ». Donc des résultats comme

Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité.

Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible.

ne sont pas encore connus des élèves.

Pour être plus précis, voir le programme dans les pages suivantes.

Les questions de cours sont à la page suivante

Un peu d'algèbre linéaire

- **Suite récurrente linéaire d'ordre 2.** Soit $b, c \in \mathbb{K}$. Soit $F_{b,c} = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0 \right\}$.

Savoir montrer rapidement (= donner les grandes lignes de la preuve) que l'application $f : \begin{array}{ccc} F_{b,c} & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array}$ est un isomorphisme.

- **Une proposition.**

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que E est muni d'une base finie $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$.

- f est injective $\iff$ la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille libre de F .
- f est surjective $\iff$ la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de F .
- f est bijective $\iff$ la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de F .

- **Un petit exemple.** Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (y, 0) \end{array}$. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^2)$ et déterminer une base de $\text{Im } f$ et de $\text{Ker } f$.

- **Un petit théorème des noyaux.** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 5f + 6\text{id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Montrer que $E = \text{Ker}(f - 2\text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f - 3\text{id}_E)$

- **Projecteur.** Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.

- On a $\text{Ker}(p - \text{id}_E) = \text{Im } p$.
- Le projecteur p fait naître la décomposition en somme directe de E :

$$E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p \quad \text{que l'on peut encore écrire} \quad E = \text{Ker}(p - \text{id}_E) \oplus \text{Ker } p$$

- **Deux exemples**

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x - y, 0) \end{array}$. Montrer que f est un projecteur de $\mathbb{R}^2$. A-t-on $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$?

L'endomorphisme $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & M + M^T \end{array}$ est-il un projecteur? A-t-on $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$?

- **Involution (symétrie).** Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une involution.

L'involution s fait naître la décomposition en somme directe de E suivante $E = \text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E)$

- **Forme linéaire et hyperplan.** Soit φ une forme linéaire non nulle sur E .

Pour tout vecteur $v_0 \in E$ n'appartenant pas à $\text{Ker } \varphi$, on a $E = \text{Ker } \varphi \oplus \text{Vect}(v_0)$

- **Application linéaire canoniquement associée à une matrice.**

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Considérons $f_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$ (c'est l'application linéaire canoniquement associée à la matrice A).

Décrire le noyau de f_A . Déterminer une famille génératrice de $\text{Im } f_A$. Savoir traiter le cas particulier de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Limites et continuité

- Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ $\begin{array}{ccc} x & \longmapsto & \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{array}$ Montrer que f n'admet pas de limite en 0.

- Prouver

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction T -périodique (où $T > 0$) ayant une limite finie ℓ en $+\infty$.
Alors f est constante.

- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in \mathbb{R}, (f(x))^2 = 1$. Que dire de f ? Preuve à la clé bien sûr!

- Soit $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ $\begin{array}{ccc} x & \longmapsto & \frac{x}{1-e^x} \end{array}$ Sans étudier les variations de f , montrer que f est bornée.

- Soit $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) < g(x)$$

Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) < g(x) - \alpha$$

- Dans l'idéal, ce serait bien de connaître/d'expliquer la preuve par dichotomie du TVI. Au moins de faire un dessin, d'introduire les deux suites, et d'expliquer ce qu'il faut faire avec elles sans vouloir absolument tout montrer.

Espaces vectoriels

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Tout développement théorique sur les espaces de dimension infinie est hors programme.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Espaces vectoriels

Structure de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel.
Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.

Espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Espace $\mathbb{K}^\Omega$, cas particulier $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

b) Sous-espaces vectoriels

Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.

Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels.
Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.

Sous-espace nul. Droite vectorielle.
Plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$.

Notation $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$.
Tout sous-espace vectoriel contenant les x_i contient $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$.

c) Familles finies de vecteurs

Famille génératrice.
Famille libre, liée.

Base, coordonnées.

Ajout d'un vecteur à une famille libre.
Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts.
Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$.
Bases de polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbb{K}_n[X]$.

d) Somme de deux sous-espaces

Somme de deux sous-espaces.
Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection.

Sous-espaces supplémentaires.

La somme $F + G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F + G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.
On incite les étudiants à se représenter des espaces supplémentaires par une figure en dimension 2 et 3.

C - Applications linéaires

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Généralités

Application linéaire.
Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque.

Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire.
Image d'une application linéaire.
Noyau d'une application linéaire.
Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille finie génératrice de E et si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\text{Im } u = \text{Vect}(u(x_i))_{i \in I}$.

Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F .
Bilinéarité de la composition.

Notation $\text{Im } u$.
Notation $\text{ker } u$. Caractérisation de l'injectivité.

b) Endomorphismes

Identité, homothéties.

Notations id_E , id .

Opérations sur les endomorphismes : combinaison linéaire, composition.

Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par $p^2 = p$, par $s^2 = \text{id}$.

Automorphismes. Groupe linéaire.

Notation u^k pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$.

On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3.

Notation $\text{GL}(E)$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.

Notation u^k pour $u \in \text{GL}(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$.

c) Détermination d'une application linéaire lorsque E est de dimension finie

Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E de dimension finie et $(f_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F , alors il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$.

Espaces vectoriels isomorphes

Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u .

Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$, si $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$, $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$, il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ coïncidant avec u_1 sur E_1 et avec u_2 sur E_2 .

f) Formes linéaires et hyperplans en dimension finie

Forme linéaire.

Hyperplan. J'ai (volontairement) compliqué, en donnant la définition en dimension quelconque comme étant un sev admettant une droite vectorielle comme supplémentaire. Le programme mentionne « en dim finie ». J'ai donc désobéi!

Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.

Si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H , alors $E = H \oplus D$.

A - Limites et continuité

Le paragraphe a) consiste largement en des adaptations au cas continu de notions déjà étudiées pour les suites. Afin d'éviter des répétitions, le professeur a la liberté d'admettre certains résultats.

Pour la pratique du calcul de limites, on se borne à ce stade à des calculs très simples, en attendant de disposer d'outils efficaces (développements limités).

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Limite d'une fonction en un point

Étant donné a fini ou infini appartenant à I ou extrémité de I , limite finie ou infinie d'une fonction en a .

Unicité de la limite.

Si f est définie en a et possède une limite en a , alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Si f possède une limite finie en a , alors f est bornée au voisinage de a .

Limite à droite, limite à gauche.

Caractérisation séquentielle de la limite (finie ou infinie).

Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.

Passage à la limite d'une inégalité large.

Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$).

Théorème de la limite monotone.

Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.

Notations $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Notations $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

b) Continuité en un point

Continuité, prolongement par continuité en un point.

Continuité à gauche, à droite.

Opérations sur les fonctions continues en un point : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.

La continuité de f au point a de I est définie par la relation $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$.

c) Continuité sur un intervalle

Continuité sur un intervalle.

Théorème des valeurs intermédiaires.

Image d'un intervalle par une fonction continue.

Corollaire : cas d'une fonction continue strictement monotone.

Théorème des bornes atteintes : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Image d'un segment par une fonction continue.

Toute fonction réelle strictement monotone, définie et continue sur un intervalle, admet une fonction réciproque de même monotonie, définie et continue sur un intervalle.

Principe de démonstration par dichotomie.

La démonstration est hors programme.

La démonstration n'est pas exigible.

d) Fonctions complexes

Brève extension des définitions et résultats généraux sur les limites et la continuité.

Caractérisation de la limite et de la continuité à l'aide des parties réelle et imaginaire.