

# Programme de colle n° 13

semaine du 22 janvier 2024

**Remarque pour les colleurs.** Le thème de la colle est « **limites et continuité** » (et « **début de l'algèbre linéaire** » s'il reste du temps).

Nous n'avons pas encore fait de séances de TD sur le chapitre « arithmétique ».

Pour être plus précis, voir le programme dans les pages suivantes.

## Limites et continuité

- Soit  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  Montrer que  $f$  n'admet pas de limite en 0.

$$x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

- Prouver

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $T$ -périodique (où  $T > 0$ ) ayant une limite finie  $\ell$  en  $+\infty$ .

Alors  $f$  est constante.

- Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que  $\forall x \in \mathbb{R}, (f(x))^2 = 1$ . Que dire de  $f$ ? Preuve à la clé bien sûr!

- Soit  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  Sans étudier les variations de  $f$ , montrer que  $f$  est bornée.

$$x \mapsto \frac{x}{1-e^x}$$

- Soit  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continues telles que

$$\forall x \in [a, b], f(x) < g(x)$$

Montrer qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$\forall x \in [a, b], f(x) < g(x) - \alpha$$

- Dans l'idéal, ce serait bien de connaître/d'expliquer la preuve par dichotomie du TVI. Au moins de faire un dessin, d'introduire les deux suites, et d'expliquer ce qu'il faut faire avec elles sans vouloir absolument tout montrer.

## Un peu du chapitre « Arithmétique »

- Savoir prouver le résultat suivant (je propose d'admettre l'inclusion facile (récurrence) et de ne présenter que l'inclusion difficile (division euclidienne)). Attention à ne pas écrire des choses du type  $u_{n-p_0q} = u_n$ .

Soit  $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  une suite périodique, c'est-à-dire telle qu'il existe  $a \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+a} = u_n$ .

On note  $\mathcal{P}_u$  l'ensemble des périodes de  $u$  :

$$\mathcal{P}_u = \left\{ p \in \mathbb{N}^* \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = u_n \right\}$$

Posons  $p_0 = \min \mathcal{P}_u$  (licite, WHY?). On a  $\mathcal{P}_u = p_0 \mathbb{N}^*$ .

- Savoir prouver :

**Le lemme fondamental du cours d'arithmétique de PCSI.**

Soit  $a, b, q, r \in \mathbb{Z}$ . On suppose  $a = bq + r$ .

Alors  $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(b) \cap \mathcal{D}(r)$ .

En particulier,  $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r)$ .

Rappele : traiter le cas  $b = 0$  à part, cas pour lequel  $a = r$ , et alors tout est trivialement vrai. Puis le cas  $b \neq 0$ , ce qui assure que  $a, b$  sont non tous les deux nuls, et idem pour  $b, r$ .

- Voici un exercice de TD dont il faut savoir refaire la preuve dans le cas où  $b \in \mathbb{N}$ . Expliquer à l'oral comment on traite le cas  $b \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ .

Pour tout  $a, b \in \mathbb{Z}$ , il existe  $u, v \in \mathbb{Z}$  tels que  $au + bv = \text{pgcd}(a, b)$ .

Rappel. Nous avons fait une preuve par récurrence en notant  $\mathcal{H}_b$  la propriété : « Pour tout  $a \in \mathbb{Z}$ , il existe  $u, v \in \mathbb{Z}$  tel que  $au + bv = a \wedge b$  ».

## A - Limites et continuité

Le paragraphe a) consiste largement en des adaptations au cas continu de notions déjà étudiées pour les suites. Afin d'éviter des répétitions, le professeur a la liberté d'admettre certains résultats.

Pour la pratique du calcul de limites, on se borne à ce stade à des calculs très simples, en attendant de disposer d'outils efficaces (développements limités).

### CONTENUS

### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Limite d'une fonction en un point

Étant donné  $a$  fini ou infini appartenant à  $I$  ou extrémité de  $I$ , limite finie ou infinie d'une fonction en  $a$ .

Unicité de la limite.

Si  $f$  est définie en  $a$  et possède une limite en  $a$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Si  $f$  possède une limite finie en  $a$ , alors  $f$  est bornée au voisinage de  $a$ .

Limite à droite, limite à gauche.

Caractérisation séquentielle de la limite (finie ou infinie).

Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.

Passage à la limite d'une inégalité large.

Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite  $+\infty$ ), par majoration (limite  $-\infty$ ).

Théorème de la limite monotone.

Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.

Notations  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

Notations  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$  ou  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ .

#### b) Continuité en un point

Continuité, prolongement par continuité en un point.

Continuité à gauche, à droite.

Opérations sur les fonctions continues en un point : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.

La continuité de  $f$  au point  $a$  de  $I$  est définie par la relation  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$ .

#### c) Continuité sur un intervalle

Continuité sur un intervalle.

Théorème des valeurs intermédiaires.

Image d'un intervalle par une fonction continue.

Corollaire : cas d'une fonction continue strictement monotone.

Théorème des bornes atteintes : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Image d'un segment par une fonction continue.

Toute fonction réelle strictement monotone, définie et continue sur un intervalle, admet une fonction réciproque de même monotonie, définie et continue sur un intervalle.

Principe de démonstration par dichotomie.

La démonstration est hors programme.

La démonstration n'est pas exigible.

#### d) Fonctions complexes

Brève extension des définitions et résultats généraux sur les limites et la continuité.

Caractérisation de la limite et de la continuité à l'aide des parties réelle et imaginaire.