

Programme de colle n° 14

semaine du 29 janvier 2024

Le thème de la colle est « **polynômes** » et « **arithmétique** ».

Arithmétique. Merci de respecter le programme officiel. Le programme est très spécifique à la classe de PCSI, ce n'est pas celui des MPSI.

Pour être plus précis, voir le programme dans les pages suivantes.

Un peu du chapitre « Arithmétique »

- Savoir prouver le résultat suivant (je propose d'admettre l'inclusion facile (récurrence) et de ne présenter que l'inclusion difficile (division euclidienne)). Attention à ne pas écrire des choses du type $u_{n-p_0q} = u_n$.

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite périodique.

On note $\mathcal{P}_u$ l'ensemble des périodes de u :

$$\mathcal{P}_u = \{p \in \mathbb{N}^* \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = u_n\}$$

Posons $p_0 = \min \mathcal{P}_u$ (licite, WHY?). On a $\mathcal{P}_u = p_0 \mathbb{N}^*$.

- Savoir prouver le lemme fondamental du cours d'arithmétique de PCSI :

Soit $a, b, q, r \in \mathbb{Z}$. On suppose $a = bq + r$.

Alors $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(b) \cap \mathcal{D}(r)$.

En particulier, $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r)$.

Rappel : traiter le cas $b = 0$ à part, car pour lequel $a = r$, et alors tout est trivialement vrai. Puis le cas $b \neq 0$, ce qui assure que a, b sont non tous les deux nuls, et idem pour b, r .

- Voici un exercice traité en classe dont il faut savoir refaire la preuve dans le cas où $b \in \mathbb{N}$.

Expliquer à l'oral comment on traite le cas $b \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

Pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = \text{pgcd}(a, b)$.

Rappel : nous avons fait une preuve par récurrence en notant $\mathcal{H}_b$ la propriété : « Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tel que $au + bv = a \wedge b$ ».

Polynômes

- Un polynôme 1-périodique est constant, et réciproquement, c'est-à-dire $\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(X) = P(X+1)\} = \mathbb{K}_0[X]$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a les deux égalités remarquables suivantes

$$X^n - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega) \quad \text{et} \quad X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} (X - \omega)$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ admet $n+1$ racines *distinctes*, alors $P = 0$.
- Prouver l'énoncé suivante (nous avons fait une preuve par récurrence finie) :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ des scalaires distincts.

On a l'implication

$$\alpha_1, \dots, \alpha_r \text{ racines de } P \implies (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_r) \text{ divise } P$$

L'autre implication est immédiate (WHY?).

- Prouver :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. La famille $((X - \alpha)^k)_{k \in [0, n]}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

La liberté est facile (WHY?). L'aspect générateur : on a montré à la main que $\text{Vect}(T_0, \dots, T_k) = \mathbb{K}_k[X]$ par récurrence finie sur k .

- Prouver la formule de Taylor à l'aide du résultat précédent.

- Prouver

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}$.

Le scalaire α est racine de multiplicité **au moins** m si et seulement si

$$\forall k \in [0, m-1], \quad P^{(k)}(\alpha) = 0$$

Il y a m conditions d'annulation $P(\alpha) = 0, P'(\alpha) = 0, \dots, P^{(m-1)}(\alpha) = 0$.

Le colleur peut consulter le cours en ligne pour voir la définition de cette locution qui ne nécessite pas P non nul! En revanche, pour définir la multiplicité de α , alors, oui, j'ai besoin de P non nul.

Rappel : on a fourni une preuve par équivalence, à l'aide de la formule de Taylor.

Polynômes

L'objectif de cette section est d'étudier les propriétés de base des polynômes et de les exploiter pour la résolution de problèmes portant sur les équations algébriques et les fonctions numériques.

Le programme se limite aux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Ensemble des polynômes à une indéterminée

Ensemble $\mathbb{K}[X]$.

Combinaison linéaire et produit de polynômes, formule du binôme.

Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire.

Degré d'une somme, d'un produit.

Composition.

La construction de $\mathbb{K}[X]$ est hors programme.

Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n .

Le produit de deux polynômes non nuls est non nul.

b) Divisibilité et division euclidienne

Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, diviseurs, multiples.

Théorème de la division euclidienne.

Algorithme de la division euclidienne.

c) Fonctions polynomiales et racines

Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité.

Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré.

Multiplicité d'une racine.

Polynôme scindé.

Expressions de la somme et du produit des racines d'un polynôme scindé en fonction de ses coefficients.

Lien avec l'introduction aux équations algébriques de la section « Nombres complexes ».

Méthode de Horner pour l'évaluation polynomiale.

Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée.

Les fonctions symétriques élémentaires sont hors programme.

d) Dérivation

Dérivée formelle d'un polynôme.

Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de Leibniz.

Formule de Taylor polynomiale.

Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée.

e) Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

Théorème de d'Alembert-Gauss.

Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

La démonstration est hors programme.

Caractérisation de la divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$ à l'aide des racines et des multiplicités.

Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Deux racines complexes conjuguées d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ont même multiplicité.

Rudiments d'arithmétique

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Entiers naturels, entiers relatifs, divisibilité dans $\mathbb{Z}$, diviseurs, multiples.

Théorème de la division euclidienne.

PGCD de deux entiers relatifs dont l'un au moins est non nul.

PPCM.

Algorithme d'Euclide.

Nombre premier.

L'ensemble des nombres premiers est infini.

Existence et unicité de la décomposition d'un entier naturel non nul en produit de nombres premiers.

Le PGCD de a et b est défini comme étant le plus grand élément (pour l'ordre naturel dans $\mathbb{Z}$) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b .

La démonstration est hors programme.
Application au calcul du PGCD et du PPCM.
